Deuxième journée de rencontre Cergy / Villetaneuse

06 avril 2009, à l'Université Paris 13

La Méthode de Newton et son fractal

Tan Lei

Université de Cergy-Pontoise

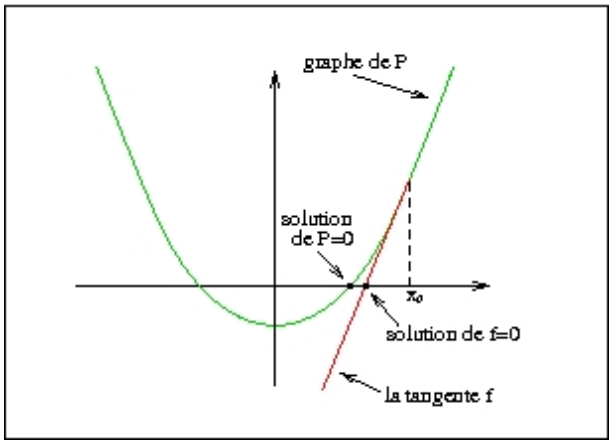
Soit $P(z)$ un polynôme. Pour trouver une valeur approximative d'une racine de P, on peut itérer la méthode de Newton associée :

$$\boxed{N_P(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}}$$

Soit $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ un point quelconque, il s'agit de remplacer $P(z)$ par son DL d'ordre 1:

$$P(z) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad P(z_0) + P'(z_0)(z - z_0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{solution} = z_0 - \frac{P(z_)}{P'(z_0)} = N_P(z_0) = z_1 \ ,$$

$$\rightsquigarrow \quad P(z_1) + P'(z_1)(z - z_1) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{solution} = N_P(z_1) = z_2, \cdots \ .$$



L'itération de $z \to N_P(z)$ nous sert ici comme un exemple d'un système dynamique holomorphe engendré par une fraction rationnelle:

$$R : z \longrightarrow \frac{f(z)}{g(z)}, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}} \ .$$

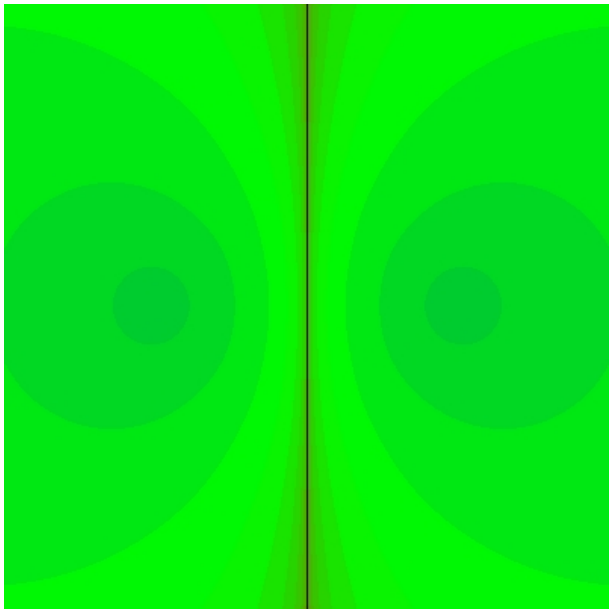
Exemple. Pour $P(z) = z^2 - 2$, on a $N_P(z) = z - \dfrac{z^2-2}{2z} = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{2}{z})$.

On a $N_P(x+iy) = (1 + \dfrac{2}{x^2+y^2})\, x + iy\, (1 - \dfrac{2}{x^2+y^2})$.

Donc N_P laisse invariant $\{x > 0\}$, $\{x < 0\}$ et $\{x = 0\}$.

On peut montrer $N_P^k(x+iy) \longrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } x > 0 \\ -\sqrt{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ lorsque $k \to \infty$.

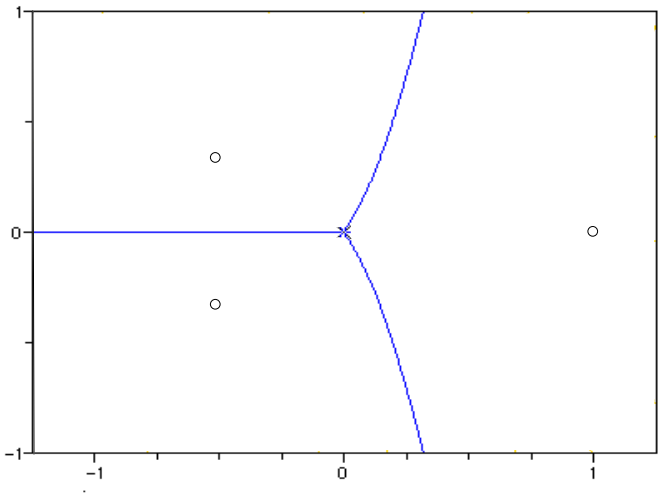
Donc la droite des nombres complexes imaginaires purs est à la fois la médiatrice des deux racines, et la ligne de séparation de deux comportements différents des suites de valeurs itératives.



Essayons maintenant la méthode de Newton $N_P(z)$ pour un polynôme cubique :

$$P(z) = P_a(z) = (z - a + \frac{1}{2})(z + a + \frac{1}{2})(z - 1).$$

Les racines de $P(z)$ sont 1, $-\frac{1}{2} + a$ et $\frac{1}{2} - a$. On aurait pu croire naïvement que, à la place d'une médiatrice, il existe un certain graphe séparateur ayant trois branches qui se rencontre en un point, très probablement le centre de gravité des trois racines (ici 0),



Ce graphe séparerait le plan en trois régions, et qu'une valeur initiale prise dans une région donnée nous donnerait des approximations de la racine dans cette région.

Arthur Cayley avait tenté de justifier cette intuition il y a 130 ans:

En 1879: *"The division into regions is made without difficulty in the case of a quadric equation; but in the next succeeding case, that of a cubic equation, it is anything but obvious what the division is; and the author had not succeeded in finding it."*

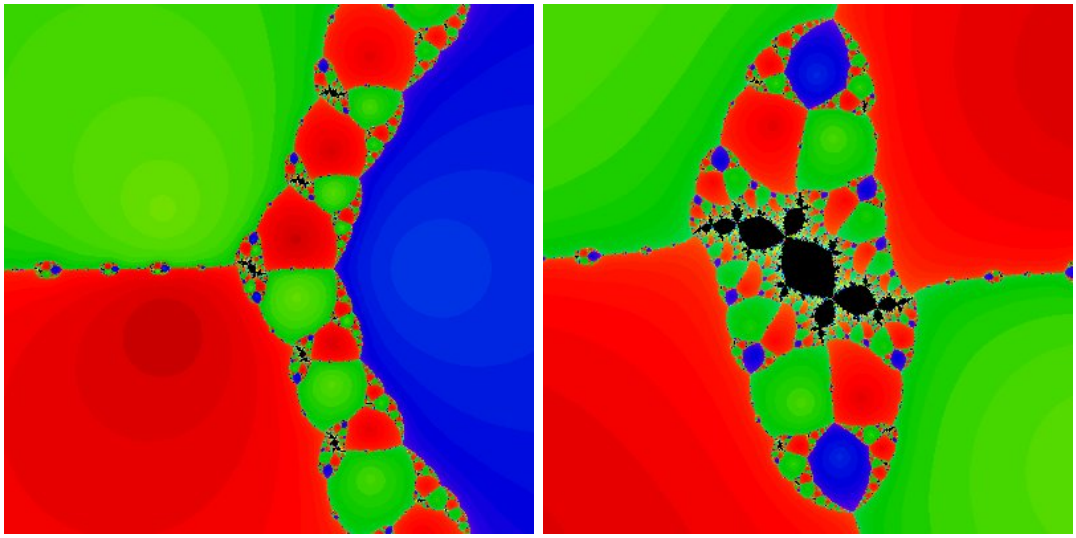
En 1889: *"J'espère appliquer cette théorie au cas d'une équation cubique, mais les calculs sont beaucoup plus difficiles."*

Voici la raison de cet échec.

Prenons par exemple $a = -0.00508 + 0.33136i$. Pour chaque pixel $z_0 = x + iy$ dans le carré $-1,4 < x < 1,6$, $-1,5 < y < 1,5$, demander à un ordinateur d'itérer $N_P(z)$ un grand nombre de fois, et colorier le pixel z_0 en

$$\begin{cases} \text{bleu} & \text{si } N_P^k(z_0) \to 1 \\ \text{vert} & \text{si } N_P^k(z_0) \to -\frac{1}{2} + a \\ \text{rouge} & \text{si } N_P^k(z_0) \to -\frac{1}{2} - a \\ \text{noir} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Voici le résultat + un agrandissement :



Plutôt qu'un simple graphe séparateur, on voit apparaître un surprenant "fractal" qui découpe le carré en trois grand lacs, un autour de chaque racine, mais également en beaucoup de petits lacs rouges, verts et bleus. Et ces lacs s'entremêlent de manière très compliquée... . Certe Caylay aurait bien voulu voir cela!

Notons K l'ensemble noir et J sa frontière. J est appelé l'ensemble de Julia de N_P. Voici la définition générale: Soit $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ de degré ≥ 2:

$$\begin{aligned} J_R &= \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \{R^k(z)\}_k \text{ est instable par rapport à } z\} \\ &= \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \{R^k|_U\}_k \text{ n'est normale sur aucun voisinage } U \text{ de } z\}. \end{aligned}$$

L'ensemble noir K représente le lieu des mauvaises conditions initiales pour la recherche d'une racine. On voit ici que K possède même de l'intérieur. On peut montrer qu'il existe un **attracteur noir** sous forme d'une orbite périodique de période 6 qui attire toute orbite dans $int(K)$. Ceci met donc en doute de l'efficacité globale de la méthode de Newton.

On peut aussi observer et démontrer

$$J = \partial\text{bleu} = \partial\text{rouge} = \partial\text{vert} \ = \partial\text{noir} \ .$$

Il s'agit du phénomène "chaotique" du système dynamique : si $z_0 \in J$, la moindre erreur numérique nous fait basculer soit d'une racine vers une autre, soit vers un piège de couleur noire.

L'ensemble K et J dépendent du choix de a.

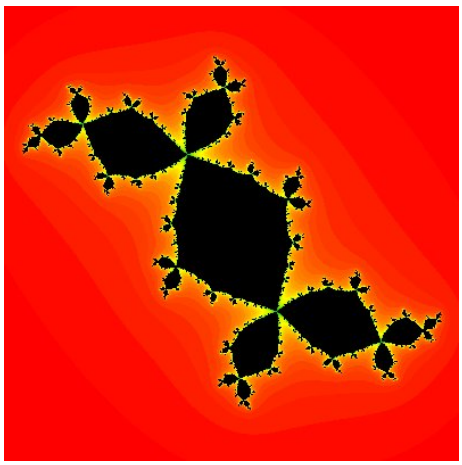
Efficacité globale en sens de mesure?

Théorème (Buff-Chéritat): $\exists\ a_0 \in \{a \in \mathbb{C} \mid J = K\}$ tel que $m(J_{a_0}) > 0$.

Renormalisation.

Douady a très vite compris que pour comprendre l'itération de N_P (fraction rationnelle de degré 3), il faut d'abord étudier l'itération de $f_c(z) = z^2 + c$ (polynôme de degré 2).

Ici $J_c = \partial K_c$, et $K_c = \{z \in \mathbb{C} \mid f_c^k(z) \not\to \infty\}$. Voici K_c pour $c = -0,12 + 0,75i$:



Théorème (Douady-Hubbard):

$$int(K_a) \neq \emptyset \iff \exists\, U \ni 0,\, m \in \mathbb{N},\, c, \quad (N_{P_a})^m|_U \sim_{\text{conjuguée}} f_c$$
$$\iff \exists\, K_c \hookrightarrow K_a \quad \text{avec} \quad int(K_c) \neq \emptyset\ .$$

En particuler pour $a = -0.00508 + 0.33136i$, on a $m = 2$ et $c = -0,12 + 0,75i$.

Noter que a et c sont dans des zônes où les dynamiques correspondantes sont 'structurellement stable'. Et donc une valeur voisine donnerait un enemble de Julia similaire.

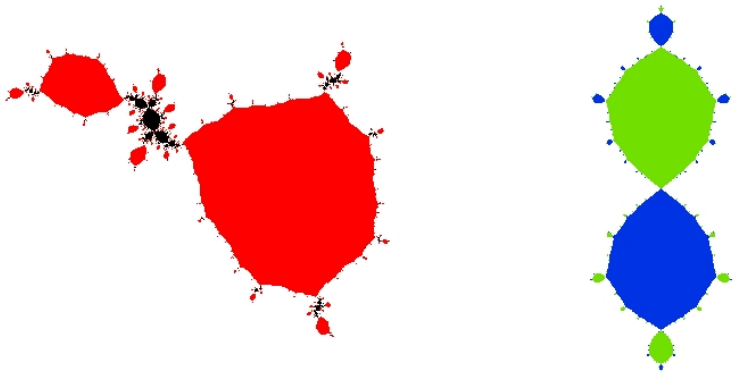
Couture et accouplement

Nous allons donner un modèle topologique de K_a ci-dessus, qui explique en particulier comment les multiples lapins présents dans K_a se sont reliés les uns et les autres.

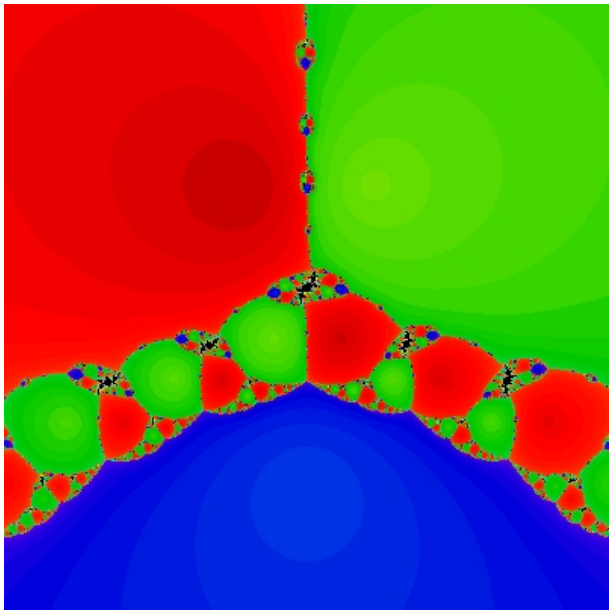
En fait, bien que ce ne soit pas du tout évident à l'oeil nu, ce fractal est obtenu en recousant les ensembles de Julia de deux polynômes cubiques (dont la structure est plus simple à comprendre) :

$$\widehat{\mathbb{C}}_{N_P} \approx K_f \sqcup K_g / \sim \quad \text{et} \quad J \approx J_f \sqcup J_g / \sim ,$$

avec $f(z) = z^3 + (1,503 - 0,8046\,i)z^2$ et $g(z) = z^3 + (2,12i)z^2$. Voici les images. Vous remarquerez que les multiples de lapins sont déjà présents dans K_f.



Puis tournons J de 90° pour mieux visualiser la couture :



Et enfin la couture en vidéo (film réalisé par A. Chéritat), d'abord sur le plan :

(film 1)

puis sur la sphère de Riemann:

(film 2)

Ce procédé de couture a été appelé "accouplement" avec humour par Adrien Douady.

Théorème (T.): Une description complète de l'application

$\mathcal{M} : \{\text{polynômes cubiques}\}^2 \to \{N_{P_a}, a \in \mathbb{C}\}$, notamment :

- son domaine de définition (tout n'est pas accouplable);
- son image (tout n'est pas un accouplement);
- et son non-injectivié (il existe des accouplements partagés!).

Un retour vers le graphe séparateur

L'idée d'un graphe séparateur est tellement naturelle...
Peut-on lui donner un sens?

Yes we can!

Pour cela il faut itérer la méthode de Newton ralentie :

$$N_{P,h} : z \mapsto z - h\frac{P(z)}{P'(z)}$$

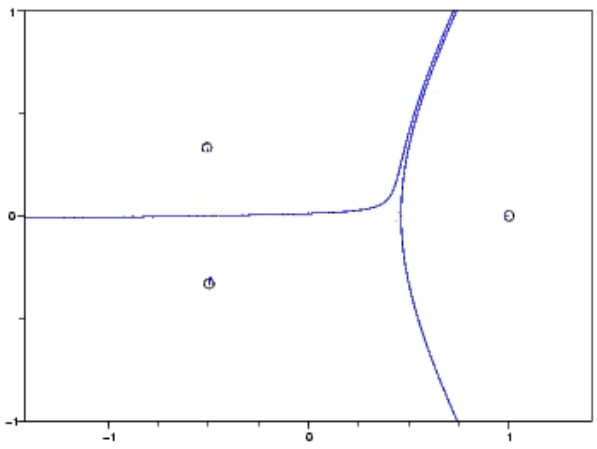
pour chaque $1 \geq h > 0$. Nous avons donc une famille d'ensembles de Julia $\{J_h, h > 0\}$.

> **Théorème** (Flexor-Sentenac) : $J_h \longrightarrow_{h\to 0}$ un graphe Γ ;
> $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ a 3 composantes connexes, chacune contient une racine;
> Γ est composé de trajectoires séparatrices du
> champ de vecteurs de Newton $\xi := -\frac{P(z)}{P'(z)}\frac{\partial}{\partial z}$;
> Le flot de ξ est séparé par Γ en trois basins,
> coulant dans chaque basin vers une racine.

Donc le graphe provient de la méthode de Newton à pas infinitésimal !

Voici ce qui se passe avec P_a où $a = -0.00508 + 0.33136i$.

(film 3)



Surprise : Ce Γ n'a pas vraiment trois branches, et il ne passe pas forcément par le centre de gravité des trois racines de P.

En effet:

Théorèmes :

(Saupe) $\{a \in \mathbb{C} \mid \Gamma_a \text{ a 3 branches}\} = \{a \in \mathbb{C} \mid \Gamma_a \cap \mathbb{C} \text{ connexe}\}$
$= \{a \in \mathbb{C} \mid \xi_a \text{ admet une connection hétérocline}\}$
$=$ graphe Σ d'une pomme tranchée.

(T.) $\{a \in \mathbb{C} \mid J_{a,h} \cap \mathbb{C} \text{ connexe}\} \longrightarrow_{h \to 0} \Sigma$.

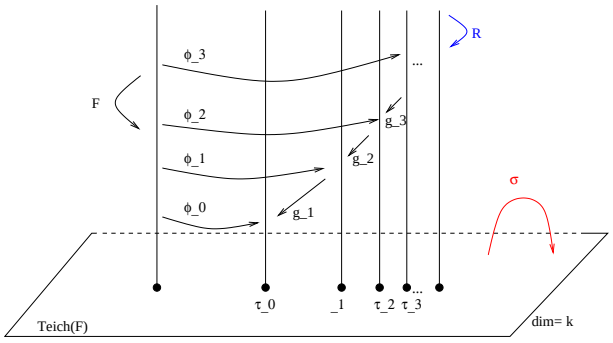
(film 4)

Outil mathématique

• Pour la renormalisation, Douady-Hubbard utilisent la chirurgie quasi-conforme, à l'aide du Théorème d'uniformisation mesurable (introduit par Sullivan) :

$$\forall \mu \in L_\infty(\mathbb{C}) \text{ avec } \|\mu\|_\infty < 1, \exists\, \varphi \begin{cases} \text{homéomorphisme de dérivée dans } L^2_{loc} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \mu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} .$$

• Pour réaliser les accouplements, on construit d'abord un modèle topologique F puis suivant Thurston on itère dans un certain espace de Teichmüller pour tenter de lui trouver une structure complexe invariante.



$$\boxed{Teich(F) = \text{Homéo}^+(S^2 \to \widehat{\mathbb{C}})/\sim}$$

$$\text{avec } \phi \sim \psi \text{ si : } \quad \begin{array}{ccc} & & \widehat{\mathbb{C}},\ (0,1,\infty) \\ & \phi\nearrow & \\ S^2, (a,b,c) & & \downarrow \psi \circ \phi^{-1} \sim_{\text{isotrope rel } \phi(P)} Id \\ & \psi\searrow & \\ & & \widehat{\mathbb{C}},\ (0,1,\infty) \end{array}$$

où $a, b, c \in P = Or(Crit_F)$. La métrique est: $d_T([\phi],[\psi]) = \inf\{\log K(\alpha),\ \alpha \sim \psi \circ \phi^{-1}\}$, où $K(\alpha) = \dfrac{1+\|\mu_\alpha\|_\infty}{1-\|\mu_\alpha\|_\infty}$, et $\mu_\alpha = \dfrac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}} \Big/ \dfrac{\partial\alpha}{\partial z}$.