1 Passage du plan dynamique au plan des paramètres.

Soit R une fraction rationnelle d'une variable. Un point z dans la sphère de Riemann est dit *normal* si la suite des itérés $R^{\circ n}$ est équicontinue dans un voisinage de z. L'ensemble des points non normaux est appelé *ensemble de Julia*, et noté par J_R. Nous savons depuis Fatou et Julia que l'ensemble des points w prépériodiques répulsifs (i.e. pour lesquels il existe des entiers $l \geq 0$, $k \geq 1$ minimaux tels que $R^{\circ(k+l)}(w) = R^{\circ l}(w)$ et $|\rho| > 1$ avec $\rho = (R^{\circ k})'(R^{\circ l}(w)))$ est dense dans J_R. L'application de retour $R^{\circ k}$ est de plus conjuguée à sa partie linéaire $z \mapsto \rho z$ au voisinage de $R^{\circ l}(w)$. Une partie de l'article [9] montre, à l'aide de cette conjuguaison, que J_R est asymptotiquement auto-ressemblant au point de w. Plus précisément, si on agrandit successivement J_R au voisinage de w, avec le nombre complexe ρ comme rapport d'agrandissement, on obtiendra une suite de compacts qui tend vers une limite au sens de Hausdorff. Ceci confirme bien le fait que l'ensemble J_R tracé par un ordinateur a souvent un aspect "fractal".

Soit M l'ensemble de Mandelbrot, ensemble des paramètres c tels que le polynôme $z^2 + c$ ait un ensemble de Julia connexe. Sa frontière ∂M a beaucoup de propriétés communes avec les ensembles de Julia. D'après Mañé-Sad-Sullivan ([MSS]), ∂M coïncide avec l'ensemble des points non normaux de la famille de fonctions holomorphes $\{c \mapsto f_c^n(0)\ , n \in \mathbb{N}\}$.

Notons M' l'ensemble des c tels que le point 0 soit strictement prépériodique pour $z \mapsto z^2 + c$. On voit, grâce à un résulat de Fatou, que le cycle périodique contenu dans l'orbite de 0 est répulsif, et que M' est dense dans ∂M. La deuxième partie de [9] montre que M est aussi asymptotiquement auto-ressemblant en chaque point c de M'. De plus la limite des compacts obtenus par les agrandissements successifs de M en c coïncide avec la limite des compacts obtenus par les agrandissements successifs de $J_{z\mapsto z^2+c}$ en c. C'est un résultat standard dans ce domaine qui établit d'abord une propriété dans le plan dynamique, et ensuite la tranfère au plan des paramètres.

Suivant les mêmes idées, l'article [10] construit un système fondamental de voisinages connexes dans M de tout point de M', ce qui constitue un pas modeste à la résolution de la conjecture de la connexité locale de M.

L'article [11], recopié à la fin de ce texte, reprend les résultats de [9] et illustre la similitude entre ces résultats et la partie du passage au plan des paramètres d'un résultat de Shishikura, qui montre que ∂M est de dimension de Hausdorff 2.

L'article [12], recopié à la fin de ce texte, consiste en un des mes résultats récents qui généralise celui de Shishikura dans des espaces de paramètres en dimension supérieure. Plus précisément, pour une famille analytique de fractions rationnelles paramétrées par une variété complexe Λ de dimension k, Mañé, Sad et Sullivan ont montré que l'ensemble des paramètres stables (i.e. pour lesquels l'application est conjuguée aux applications voisines) est ouvert et dense ([MSS]). Nous montrons que le complémentaire dans Λ de cet ensemble a une dimension de Hausdorff égale à $2k$, à condition qu'il possède une application de type Shishikura (c'est une application ayant un point parabolique avec des propriétés spéciales). En particulier, la frontière du lieu de connexité des polynômes centrés de degré d, en tant que sous-ensemble de l'ensemble des paramètres instables, est de dimension de Hausdorff $2(d-1)$.

La question suivante est de savoir si ce complémentaire est de mesure zéro. C'est une question ouverte même pour la frontière de l'ensemble de Mandelbrot.

Il faut dire que c'était une situation particulièrement "sympatique", où, à modification de détails près, aussi bien l'énoncé que la preuve d'un résultat passent en dimension supérieure. Mais, en général, il n'est pas facile de savoir quels sont les résultats et méthodes de preuve sur l'ensemble de Mandelbrot qui peuvent être étendus à des espaces de paramètres de dimension supérieure. L'étude de ces questions nous fournit beaucoup de sujets de recherche intéressants.

2 Topologie et géométrie de l'ensemble de Julia

2.1 Composantes de Julia prépériodiques

Supposons dans toute cette section que R est une fraction rationnelle.

Rapellons que l'ensemble de Julia J_R de R est l'ensemble des points non normaux de la suite des itérées R^n. C'est la partie où la dynamique change qualitativement. Nous cherchons souvent à comprendre la structure topologique et géométrique de J_R. L'auto-ressemblance citée dans le chapitre précédent est l'un des exemples de ce genre d'étude.

Une des questions que l'on se pose est de savoir si pour une application R donnée, J_R est connexe, ou mieux, localement connexe. L'avantage de la connexité locale est que l'action de R sur J_R est au moins partiellement, parfois même entièrement, semi-conjuguée à un revêtement du cercle, c'est par exemple le cas si R est un polynôme ou un accouplement de deux polynômes (voir le chapitre suivant) avec J_R localement connexe.

Supposons que J_R n'est pas connexe. Alors, il a un nombre non dénombrable de composantes connexes (voir [Mi], Cor. 11.3). De plus, l'image par R d'une composante de J_R est encore une composante de J_R. On peut ainsi parler des composantes de Julia périodiques, prépériodiques et errantes. Un résultat de C. McMullen ([Mc]) montre que l'application de retour R^k sur chaque composante périodique de J_R est topologiquement conjuguée à l'action d'une autre fraction rationnelle sur son ensemble de Julia (qui est connexe). Une des conséquences est qu'il existe au plus un nombre dénombrable de composantes de J_R périodiques ([Mc], Cor. 3.5). Mais, si seulement un nombre fini de composantes de J_R étaient périodiques, alors pour J' l'union de ces composantes, l'ensemble $J_R - J'$ serait un ouvert non vide de J_R sans point périodique. Ceci contredit le fait que l'ensemble des points périodiques répulsifs est dense dans J_R.

Ainsi, il existe exactement un nombre dénombrable de composantes de J_R périodiques. Par conséquent, il existe un nombre dénombrable de composantes de J_R prépériodiques et un nombre non dénombrable de composantes de J_R errantes.

On définit *l'ensemble postcritique* P_R par

$$P_R = \text{adhérence}\left(\bigcup_{n\geq 1}\{R^n(c) \mid c \ \text{ point critique de } R\}\right) . \tag{1}$$

C'est la partie "essentielle" de la dynamique de R.

On dit que R est *hyperbolique* (resp. *géométriquement finie*, *à PJ-fini*) si $P_R \cap J_R = \emptyset$ (resp. $\#(P_R \cap J_R) < \infty$, $P_R \cap J_R$ est inclus dans l'union d'un nombre fini de composantes de J_R). Dans ces cas différents, on peut obtenir des informations plus précises sur J_R. En voici quelques exemples liés à mes travaux:

Théorème 2.1 *([7], en collaboration avec Y. Yin) Supposons que R est une fraction rationnelle géométriquement finie. Alors chaque composante connexe (pré)périodique de J_R est localement connexe. En particulier, J_R est localement connexe s'il est connexe.*

Cet article est recopié à la fin de ce texte. Ce théorème généralise un résultat de Douady et Hubbard dans le cas où R est un polynôme, et un résultat de Douady et Milnor dans le cas où R est une fraction rationnelle hyperbolique.

Théorème 2.2 *([6], en collaboration avec J. Milnor) Soit R l'application $z \mapsto a(z + 1/z) + b$ avec a, b choisis pour que le point critique 1 (resp. -1) soit périodique de période 4 (resp. 3). L'ensemble de Julia J_R est un "tapis de Sierpiński", c'est-à-dire, un ensemble compact, connexe, localement connexe et* *d'intérieur vide, vérifiant de plus que les frontières des composantes connexes de $\overline{\mathbb{C}} - J_R$ sont des courbes de Jordan deux-à-deux disjointes.*

A notre connaissance ceci était le premier exemple de ce genre, à savoir qu'aucun polynôme ne peut avoir un tel ensemble de Julia. Un peu plus tard, K. Pilgrim a trouvé d'autres exemples de degré supérieur, mais avec des ensembles postcritiques plus petits ([Pi], Section 5.6.1). C. McMullen a conjecturé que si R est hyperbolique avec J_R un tapis de Sierpiński alors l'espace des déformations de R (i.e. la composante hyperbolique contenant R) est relativement compact dans l'espace des fractions rationnelles de même degré ([Mc]).

2.2 Composantes de Julia errantes

Nous avons aussi quelques informations sur les composantes de Julia errantes. L'un des résultats dans [8] (en collaboration avec K. Pilgrim) montre que, en supposant que R est une fraction rationnelle géométriquement finie, toute composante de J_R errante, ainsi que toute composante de J_R périodique (sauf un nombre fini d'exceptions) est soit une courbe de Jordan soit un point.

Nous allons être plus précis. Tous les résultats de cette section se trouvent (des fois implicitement) dans [8]. Nous donnerons aussi quelques idées de la démonstration.

Théorème 2.3 *Soit f une fraction rationnelle quelconque. Soient $W_0, \cdots, W_m$ des composantes de Fatou (i.e. composantes de $\overline{\mathbb{C}} - J_f$) vérifiant:*

1. *$f(\bigcup_{i=0}^m W_i) \subset \bigcup_{i=0}^m W_i$;*
2. *chaque W_i rencontre P_f et tombe en un temps fini dans un bassin périodique attractif ou parabolique;*
3. *pour chaque W_i, il n'existe qu'un nombre fini de composantes $K_{1,i}, \cdots, K_{m_i,i}$ de $\overline{\mathbb{C}} - W_i$ intersectant P_f.*

Alors pour $V_i = \overline{\mathbb{C}} - \bigcup_{j=1}^{m_i} K_{j,i}$, on a $V_s \cap V_t = \emptyset$ si $s \neq t$, et toute composante J_0 de J_f, vérifiant $f^n(J_0) \subset \bigcup_i V_i$ pour une infinité de n, est un point.

Corollaire 2.4 *Si f est un polynôme avec $P_f \cap K_f$ inclus dans une union finie K' de composantes de K_f, où K_f est par définition l'ensemble des points z ayant une orbite bornée, alors toute composante de K_f, soit tombe en un temps fini dans K', soit est un point.*

Soit S un connexe ouvert ou fermé de $\overline{\mathbb{C}}$. On dit que S est *simplement connexe (resp. doublement connexe)* si $\overline{\mathbb{C}} - S$ est connexe (resp. a exactement deux composantes connexes).

Definition (décomposition). Supposons que f est une fraction rationnelle à PJ-fini (i.e. $P_f \cap J_f$ est inclus dans un nombre fini de composantes de J_f). Notons $\mathcal{P} = P_f$. On associe à f une décomposition canonique de $\overline{\mathbb{C}} = E \sqcup \mathcal{U} = E \sqcup \mathcal{L} \sqcup \mathcal{A} \sqcup \mathcal{D}' \sqcup \mathcal{D}''$ de la manière suivante:

E est l'union des composantes J' de J_f satisfaisant: soit $J' \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$; soit $J' \cap \mathcal{P} = \emptyset$ mais au moins trois composantes de $\overline{\mathbb{C}} - J'$ rencontrent $\mathcal{P}$; soit $J' \cap \mathcal{P} = \emptyset$, exactement deux composantes de $\overline{\mathbb{C}} - J'$ rencontrent $\mathcal{P}$ et J' est extrêmale parmi les composantes de J_f qui séparent $\mathcal{P}$ de manière parallèle,

$\mathcal{U} = \overline{\mathbb{C}} - E$; $\mathcal{L}$ est l'union des composantes de $\mathcal{U}$ qui, soit rencontrent $\mathcal{P}$, soit ne sont ni simplement connexes ni doublement connexes; $\mathcal{A}$ est l'union des composantes de $\mathcal{U}$ doublement connexes et disjointes de $\mathcal{P}$; $\mathcal{D}'$ est l'union des composantes de $\mathcal{U}$ simplement connexes, disjointes de $\mathcal{P}$ et rencontrant $f^{-1}E$; et finalement $\mathcal{D}''$ est l'union des composantes de $\mathcal{U}$ simplement connexes et disjointes de $\mathcal{P} \cup f^{-1}E$.

(Pour un exemple concret de cette décomposition, voir la preuve du théorème 2.9).

Lemme 2.5 *[i] L'ensemble E a un nombre fini de composantes connexes, chacune d'elles est une composante de J_f prépériodique et $f(E) \subset E$.*

[ii] L'ensemble $\mathcal{L} \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{D}'$ a un nombre fini de composantes connexes, mais $\mathcal{D}''$ peut avoir une infinité de composantes connexes.

[iii] Chaque composante L de $\mathcal{L}$ contient une unique composante W de $\overline{\mathbb{C}} - J_f$ (composante de Fatou) avec $\partial W \supset \partial L$ et $W \cap \mathcal{P} = L \cap \mathcal{P}$.

Definition. Notons $\mathcal{A}^s$ (resp. $\mathcal{A}^o$) l'union des composantes de $f^{-1}(\mathcal{A})$ (qui sont toutes doublement connexes) incluses dans $\mathcal{A}$ et essentielles (resp. non essentielles) dans $\mathcal{A}$.

On remarque que $\mathcal{A}^s \cup \mathcal{A}^o$ a aussi un nombre fini de composantes connexes. Le lemme suivant montre qu'il existe un nombre fini de composantes de $\mathcal{U}$ qui "attrapent" toutes les orbites des composantes de J_f:

Lemme 2.6 *Supposons que f est une fraction rationnelle à PJ-fini. Soit J_0 une composante de J_f. Posons $J_n = f^n(J_0)$. Alors l'orbite $\{J_n\}$ est dans l'une des quatre situations suivantes:*

[a] il existe n_0 tel que $J_n \subset E$ pour tout $n \geq n_0$;

[b] il existe n_0 tel que $J_n \subset \mathcal{A}^s$ pour tout $n \geq n_0$;

[c] $J_n \subset \mathcal{D}' \cup \mathcal{A}^o$ pour une infinité de n;

[d] $J_n \subset \mathcal{L}$ pour une infinité de n.

Les situations [c] et [d] peuvent avoir lieu en même temps.

Ces quatre situations se distinguent aussi par la méthode de démonstration des deux résultats suivants:

Théorème 2.7 *Soit f une fraction rationnelle à PJ-fini et J_0 une composante de J_f. Suivant que l'orbite de J_0 est dans la situation [a], [b], [c] ou [d], J_0 est prépériodique, doublement connexe, simplement connexe ou un point respectivement.*

Théorème 2.8 *Soit f une fraction rationnelle géométriquement finie et J_0 une composante de J_f. Suivant que l'orbite de J_0 est dans la situation [a], [b] ou [c]+[d], J_0 est localement connexe, une courbe de Jordan ou un point respectivement. Par conséquent, chaque composante de J_f est localement connexe.*

Preuve de ces résultats. Voici quelques idées. Le lemme 2.5 est montré par des méthodes purement topologiques, le point [iii] est le plus subtil, il dépend d'un résultat non trivial de la topologie du plan. Quant au lemme 2.6, il se ramène à montrer que si $J_n \subset \mathcal{D}''$ pour une infinité de n, alors $J_n \subset \mathcal{D}' \cup \mathcal{L}$ pour une infinité de n. Supposons que $J_{n_1} \subset D$ pour D une composante de $\mathcal{D}''$. Remarquons d'abord que $f(D)$ est, soit une composante de $\mathcal{D}' \cup \mathcal{D}''$ (ce qui correspond au cas où $D \cap f^{-1}(\mathcal{P}) = \emptyset$), soit une composante de $\mathcal{L}$. Il resulte du théorème de non-existence de domaine de Fatou errant (Sullivan) qu'il existe un entier $0 < k < \infty$ tel que $D \cup f(D) \cup \cdots f^{k-1}(D) \subset \mathcal{D}''$ et tel que $f^k(D)$ soit une composante de $\mathcal{D}' \cup \mathcal{L}$. Ainsi, $J_{n_1+k} \subset \mathcal{D}' \cup \mathcal{L}$.

Le théorème 2.7.[a] résulte du lemme 2.5.[i], et le théorème 2.8.[a] est un cas particulier du théorème 2.1.

Pour montrer le théorème 2.7.[b], notons T_k la composante de $f^{-k}\mathcal{U}$ contenant J_{n_0}. Alors chaque T_k est doublement connexe (i.e. un anneau ouvert), et est incluse de manière essentielle dans T_{k-1}. A l'aide du théorème de Sullivan cité ci-dessus, il est facile de voir qu'il existe une suite $k_j \to \infty$ telle que $\overline{T_{k_j}} \subset T_{k_{j-1}}$ et que $J_{n_0} = \bigcap_k T_k = \bigcap_j \overline{T_{k_j}}$. Ainsi J_{n_0} est doublement connexe. Il en résulte que J_0 est aussi doublement connexe. Pour montrer que J_0 est effectivement une courbe de Jordan, dans la situation du théorème 2.8.[b], il nous faut encore deux ingrédients: J_{n_0} doit être à la fois un ensemble localement connexe et la frontière de chacune des deux composantes de $\overline{\mathbb{C}} - J_{n_0}$. A l'aide de la métrique dilatante pour f (voir [7], recopié à la fin de ce texte, pour la construction de cette métrique), on peut montrer ces deux propriétés facilement.

Le cas [c] dans les deux théorèmes se montre de manière très similaire au cas [b]. Il suffit de remarquer que cette fois-ci chaque T_k est simplement connexe.

Le théorème 2.8.[d] est une conséquence du théorème 2.7.[d], qui lui-même est une conséquence du théorème 2.3 et du lemme 2.5.[iii].

La preuve du théorème 2.3 est plus délicate. Il faut faire plus de combinatoire pour voir qu'il existe un disque fermé Δ tel que $\Delta \cap \mathcal{P} = \emptyset$ et que $f^n(J_0) \subset \Delta$ pour une infinité de n. La proposition B.2 de l'appendice B, ainsi que son corollaire, est une étape principale de cette preuve, mais présentée comme un résultat plus général. Ensuite, une simple application d'un lemme de Fatou nous permet de conclure que J_0 est un point. ■

La géométrie des courbes de Jordan dans le théorème 2.8.[b] peut être assez compliquée. Nous avons:

Théorème 2.9 *Il existe des applications hyperboliques ayant un nombre non dénombrable de composantes connexes de Julia qui sont des courbes de Jordan mais pas des quasi-cercles.*

Preuve. Soit $f_1(z) = \frac{1}{z} \circ (z^2 - 1) \circ \frac{1}{z} + 10^{-11} z^{-3}$. Son ensemble de Julia dans les coordonnées de $\log(z)$ est représenté dans la figure 1.

Pour f_1, les points ∞ et -1 forment l'unique orbite périodique attractive. Une composante de Fatou annulaire (celle au centre de la figure 1) contient cinq points critiques. Cette composante est envoyée sur la composante de Fatou contenant 0 (celle à gauche de la figure 1), qui a pour image la composante de Fatou contenant ∞ (celle à droite de la figure 1). L'ensemble postcritique est inclus dans l'union de ces deux dernières composantes avec celle contenant -1 (le grand disque à droite de la figure 1). L'ensemble E pour f_1 se compose d'une copie J^+ (à droite) de l'ensemble de Julia de $z \mapsto z^2 - 1$, et de sa préimage J^- (à gauche) qui est un revêtement de degré trois de J^+.

On peut montrer que la dynamique induite par f_1 sur l'ensemble des composantes de J_f (avec la distance induite par celle de Hausdorff sur les compacts) est topologiquement conjuguée à l'application de décalage sur l'espace $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. La composante J^+ (resp. J^-) correspond à la suite $000\cdots$ (resp. $1000\cdots$).

Pour une courbe de Jordan $J \subset S^2$, on dit que $0 \leq K = K(J) \leq \infty$ est sa *constante de détour* si K est la constante minimale telle que

$$\mathrm{diam}(L)/d(x,y) \leq K$$

pour tout $x, y \in J$, et pour L l'arc dans $J - \{x, y\}$ ayant le plus petit diamètre (sphérique). On dit que J est un *quasi-cercle* si sa constante de détour est finie.

Revenons à notre application f_1. La composante J^+, comme l'ensemble de Julia de $z \mapsto z^2 - 1$, possède beaucoup de points de *coupure*: points qui disconnectent J^+. Ainsi une courbe de Jordan disjointe de J^+, mais proche de J^+ (au sense de Hausdorff), a sûrement une constante de détour très grande.

Soit J_0 une composante de J_{f_1} dont la suite symbolique a une infinité de 1 mais accumule à $000\cdots$ (i.e. la suite possède des mots de 0 de longueur arbitrairement grande). Autrement dit, il existe une sous-suite $J_{n_j} = f_1^{n_j}(J_0)$ convergeant vers J^+. On va montrer que J_0 n'est pas un quasi-cercle.

Par le théorème 2.8 le compact J_0 ainsi que J_{n_j} sont des courbes de Jordan. Par la remarque ci-dessus, la constante de détour $K(J_{n_j})$ tend vers ∞ lorsque $j \to \infty$. D'autre part, $f_1^{n_j} : J_0 \to J_{n_j}$ s'étend en un revêtement holomorphe au voisinage de J_0. Donc par le théorème de distorsion de Koebe $K(J_0) \geq K(J_{n_j})$. Comme ceci est vrai pour tout j, on conclut que $K(J_0) = \infty$ et que J_0 n'est pas un quasi-cercle.

Il est aussi facile de montrer la réciproque, c'est-à-dire que, J_0 est un quasi-cercle si et seulement si son orbite ni ne tombe dans J^+, ni ne s'accumule sur J^+. ■

2.3 Arbre canonique et questions ouvertes

La décomposition ci-dessus nous offre beaucoup de questions intéressantes dans ce sujet. Ces questions ressemblent beaucoup aux résultats de combinaisons de Maskit dans le cadre des groupes kleiniens.

Soit f une fraction rationnelle à PJ-fini. On pose $E = E_1, \mathcal{U} = \mathcal{U}_1, \mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ etc. pour les ensembles définis dans la section précédente. Posons $\mathcal{P}_2 = f^{-1}P_f$. On peut définir E_2, $\mathcal{U}_2$ etc. relativement à $\mathcal{P}_2$, de la même manière que la section précédente. On peut montrer $f^{-1}E_1 = E_2$, $f^{-1}(\mathcal{L}_1) = \mathcal{L}_2$ etc.

A chacune de ces partitions, on associe un arbre abstrait de la façon suivante. L'ensemble $E \cup \mathcal{D}''$ est un compact ayant un nombre fini de composantes connexes. Chaque composante de $E \cup \mathcal{D}''$ correspond à un sommet de type e, chaque composante L de $\mathcal{L}$ correspond à un sommet de type l avec un nombre fini d'arêtes, ces arêtes connectent ce sommet aux sommets de type e qui correspondent aux composantes connexes de ∂L. Chaque composante D de $\mathcal{D}'$ correspond à un sommet de type d avec une arête liant ce sommet avec le sommet correspondant à ∂D. Chaque composante A de $\mathcal{A}$ correspond à une arête liant les deux composantes de ∂A.

Les deux partitions E_1 et E_2 nous donnent deux arbres T_1 et T_2. Il y a deux applications naturelles $i : T_2 \to T_1$ et $f_R : T_2 \to T_1$, la première correspond à l'inclusion et la deuxième à la dynamique de R.

Beaucoup de questions naturelles sur i et f_R restent à étudier. Par exemple quelles sont les propriétés élémentaires de i et f_R? Induisent-elles une application de T_1? Si oui, à quel point l'entropie topologique de cette application détermine la complexité de R? Par ailleurs, quelles sont les applications d'arbres qui peuvent être réalisées comme f_G d'une fraction rationnelle G? Peut-on classifier les applications R à PJ-fini par i et f_R?

3 Constructions de dynamique holomorphe, application de la théorie de Thurston

Souvent on se demande si une dynamique spécifique est réalisée par une fraction rationnelle. Mais construire directement une fraction rationnelle avec une dynamique prescrite est très difficile. En revanche, il existe une théorie de Thurston qui permet, dans certains cas, de contourner la difficulté en passant par des revêtements ramifiés. Plusieurs des mes travaux consistent à l'application de cette théorie.

Les articles [1], [2], [3] et [5] (en collaboration avec M. Shishikura) consistent à étudier des revêtements ramifiés dans trois familles spéciales: la famille quadratique $\mathcal{Q}$, la famille $\mathcal{N}$ contenant la méthode de Newton des polynômes cubiques et la famille $\mathcal{A}$ qui contient un contre-exemple pour des résultats de revêtements ramifiés quadratiques.

Comme il y a des idées similaires dans chacune de ces études, au lieu de décrire les résultats séparément, nous allons essayer de tracer un chemin commun pour l'ensemble de ces études.

3.1 Obstruction de Thurston et cycle de Levy

Pour un revêtement ramifié $R : S^2 \to S^2$, un point *critique* de R est par définition un point où R n'est pas localement injectif. On définit son ensemble postcritique P_R comme dans la formule (1) (voir la section 2.1).

Soient $R, G : S^2 \to S^2$ deux revêtements ramifiés. On dit que R et G sont *équivalents* au sens de Thurston s'il existe une conjugaison topologique R_1 de R qui est égale à $h \circ G$, avec $h : S^2 \to S^2$ un homéomorphisme, valant l'identité sur P_G, et isotope à l'identité parmi les homéomorphismes fixant P_G. C'est bien une relation d'équivalence. La question qui nous intéresse est de savoir si la classe d'équivalence de R contient une fraction rationnelle.

Lorsque P_R est fini, Thurston a donné un critère combinatoire (que nous allons décrire ci-dessous). Grâce à ce critère, on peut construire des revêtements ramifiés avec des dynamiques voulues, et ensuite vérifier s'ils sont équivalents à des fractions rationnelles.

Voici une conséquence directe de la définition:

Lemme 3.1 *Si $R \sim G$, alors $R^n \sim G^n$ pour tout entier $n \geq 0$. En particulier si R est équivalent à une fraction rationnelle, R^n l'est aussi.*

Pour décrire le critère de Thurston, une liste assez longue de notations n'est malheureusement pas évitable:

Définition.

- Soit γ une courbe de Jordan dans $\overline{\mathbb{C}} - P_f$. On dit que γ est *périphérique* si γ est homotope dans $\overline{\mathbb{C}} - P_f$ à une courbe de longueur sphérique arbitrairement petite.

- On dit que $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ est une *multicourbe* si les γ_j sont des courbes de Jordan disjointes, non périphériques et deux-à-deux non homotopes dans $S^2 - P_R$.

- Pour une multicourbe Γ, on définit $R_\Gamma : \mathbb{R}^\Gamma \to \mathbb{R}^\Gamma$ par

$$R_\Gamma(\gamma_j) = \sum_{\gamma' \text{ une courbe dans } R^{-1}(\gamma_j)} \frac{1}{\deg(R : \gamma' \to \gamma_j)} [\gamma']_\Gamma \ ,$$

où $[\gamma']_\Gamma = \gamma_i$ s'il existe γ_i homotope à γ', et $[\gamma']_\Gamma = 0$ sinon. Cette application linéaire admet une valeur propre positive dominante (d'après Perron-Frobenius), notée par $\lambda(\Gamma)$.

Soit Γ une multicourbe. On dit que Γ est

- *irréductible* si la matrice de R_Γ l'est;

- *R-invariante* si les composantes de $R^{-1}(\Gamma)$ sont soit périphériques, soit homotopes à des courbes dans Γ;

- une *obstruction de Thurston* si Γ est soit irréductible, soit R-invariante, avec $\lambda(\Gamma) \geq 1$;

- un *cycle de Levy* si, quitte à renuméroter, $R^{-1}(\gamma_j)$ admet une composante γ'_j homotope à $\gamma_{j-1 \pmod n}$ et $\deg(R : \gamma'_j \to \gamma_j) = 1$.

Lemme 3.2 *Tout cycle de Levy est une obstruction de Thurston.*

Preuve. $R_\Gamma = (a_{ij})$. On a $a_{ij} \geq b_{ij}$, où $b_{ij} = 1$ si $j = i + 1$ ou si $i = n$ et $j = 1$; et $b_{ij} = 0$ ailleurs. Alors $\lambda(\Gamma) \geq \lambda((b_{ij})) = 1$. ■

Un revêtement ramifié R est dit *à ensemble postcritique fini* si $\#P_R < \infty$. Soit R une telle application. La *signature* de l'orbifold de R est définie par l'ensemble $\nu(P_R)$, où $\nu : S^2 \to \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ est la fonction minimale telle que $\nu(x) = 1$ pour $x \notin P_R$, et que $\nu(y)$ soit un multiple de $\nu(x) \cdot \deg_x R$ pour tout $x \in R^{-1}(y)$.

Voici enfin le critère de Thurston:

Théorème 3.3 *(Thurston) Soit R un revêtement ramifié à ensemble postcritique fini. Supposons que la signature de son orbifold est différente de $(2, 2, 2, 2)$. Alors R n'est pas équivalent à une fraction rationnelle si et seulement si R possède une obstruction de Thurston. De plus, deux telles fractions rationnelles sont équivalentes si et seulement si elles sont conformément conjuguées.*

Un résumé de la preuve de ce théorème sera donné dans l'appendice A. Ce critère est en pratique difficile à utiliser, car il y a en général une infinité de multicourbes invariantes. Il faut donc développer des techniques de réduction des obstructions pour des cas particuliers.

3.2 Préimages des composantes de $S^2 - \Gamma$, première réduction

Pour Γ une obstruction de Thurston d'un revêtement ramifié R, l'étude des préimages des composantes de $S^2 - \Gamma$, surtout des composantes simplement connexes de $S^2 - \Gamma$, réduit souvent Γ à une obstruction plus simple, par exemple à un cycle de Levy avec des propriétés spéciales.

Définition. Une multicourbe Γ est dite *un cycle de Levy dégénéré* si $S^2 - \Gamma$ a exactement n composantes simplement connexes $D_1, \cdots, D_n$ avec $n = \max(\#\Gamma, 2)$, et, quitte à renuméroter, $R^{-1}(D_j)$ admet une composante D'_j qui est un disque homotope à $D_{j-1 \pmod n}$, avec $\deg(R : D'_j \to D_j) = 1$.

Le résultat suivant résulte d'un mélange d'idées de S. Levy, M. Rees, M. Shishikura, l'auteur et autres.

Théorème 3.4 *([2], théorème 3.1) Supposons que R possède une obstruction de Thurston. Alors il existe une multicourbe Γ, telle que soit [a]: Γ est un cycle de Levy dégénéré, soit [b]: Γ est irréductible, $\lambda(\Gamma) \geq 1$ et il existe une composante simplement connexe D de $S^2 - \Gamma$ telle que $R^{-1}D$ contienne une composante non simplement connexe.*

Preuve. On commence par "minimiser" une obstruction R-invariante, on prend ensuite pour Γ l'unique sous-multicourbe irréductible "dominante", et puis on analyse les préimages de toutes les composantes simplement connexes de $S^2 - \Gamma$. La conclusion suit à l'aide du fait que deux disques disjoints n'ont pas de préimages homotopes (rel. à P_R), et la préimage d'un disque n'a pas deux composantes homotopes (rel. à P_R). ■

En pratique, le cas [a] exige souvent un traitement spécial. Parfois, il existe un homéomorphisme h, qui est l'identité en dehors des $\bigcup_{k,i} R^{-k}(D_i)$, et est homotope à l'identité à l'intérieure des $R^{-k}(D_i)$ relativement au bord, tel que $R_1 = h \circ R$ n'ait plus Γ comme obstruction, et $\#(P_{R_1} \cap R^{-k}(D_i)) \leq 1$. On considère que R_1 est une *réduction* de R. Si, après plusieurs réductions successives, on obtient un revêtement ramifié équivalent à une fraction rationnelle, on considère que R est équivalent à une fraction rationnelle *au sense faible.*

Dans la suite de ce texte, on ne se concentre que sur le cas [b]. Nous allons appliquer le théorème 3.4 dans trois familles spéciales de revêtements ramifiés: Notons $\mathcal{Q}$ l'ensemble des revêtements ramifiés quadratiques, $\mathcal{N}$ l'ensemble des revêtements ramifiés cubiques ayant trois points critiques fixes et $\mathcal{A}$ l'ensemble des revêtements ramifiés cubiques ayant un point critique double w et un cycle périodique $x \mapsto y \mapsto z \mapsto x$ avec x, y points critiques simples. Dans le dernier cas, on note a l'image de w. Dans ces cas spéciaux, on peut pousser l'étude des préimages des composantes de $S^2 - \Gamma$ plus loin et obtenir des informations beaucoup plus précises.

D'abord une notation. On dit qu'une multicourbe est un *bon cycle de Levy* si soit Γ est un cycle de Levy ayant une seule courbe, soit $S^2 - \Gamma$ possède une unique composante non simplement connexe C, de plus une composante C' de $R^{-1}(C)$ est homotope à C rel. P_R et $\deg(R : C' \to C) = 1$.

Théorème 3.5 *([2]-théorème 3.3, [3]-théorème 3.3 et [5]-théorème 4.1) Supposons que Γ est une multicourbe pour un revêtement ramifié R vérifiant la conclusion du théorème 3.4.[b].*

Si $R \in \mathcal{Q}$ alors Γ contient un bon cycle de Levy.

Si $R \in \mathcal{N}$ alors Γ est un cycle de Levy ayant une seule courbe.

Si $R \in \mathcal{A}$ alors soit [i]: Γ est un bon cycle de Levy ayant une ou deux courbes, soit [ii]: $S^2 - \Gamma$ a exactement deux disques composantes D_1 et D_2 avec $a, y \in D_1$, $z \in D_2$ et $x \notin D_1 \cup D_2$.

3.3 Accouplements, arbres de Hubbard

I. On se concentre ici sur une construction spéciale de revêtements ramifiés, appelée *accouplement*. La dynamique d'un tel revêtement ramifié est étroitement liée avec celle de deux polynômes. Les cycles de Levy d'un accouplement sont particulièrement faciles à étudier, grâce à l'existence des rayons externes. Ce sera le contexte du théorème 3.6. Une façon standard de traiter les obstructions de Thurston d'un accouplement est de d'abord les réduire en des cycles de Levy (comme dans le théorème 3.5), ensuite en des obstructions formées par des classes d'équivalences de la rayon-relation (voir définition et théorème 3.6 ci-dessous), et puis de chercher de bonnes propriétés de cette relation pour déterminer tous les cas où une telle obstruction peut exister.

Pour f un polynôme de degré d, rappelons que K_f est l'ensemble des points ayant une orbite bornée. L'ensemble de Julia J_f coïncide avec la frontière de K_f. Lorsque K_f est connexe, il existe une unique représentation conforme $\phi_f : \mathbb{C} - \Delta \to \mathbb{C} - K_f$ (où Δ est le disque unité fermé), tangente à l'identité à l'infini, telle que $\phi_f(z^d) = f(\phi_f(z))$. Si l'on rajoute un cercle S^1 à l'infini (c'est le cercle des directions), l'application ϕ_f s'étend en un homéomorphisme de ce cercle. Si de plus K_f est localement connexe, ϕ s'étend même jusqu'au bord de Δ en une application continue.

Notons $\widetilde{\mathbb{C}}_f = \mathbb{C} \cup S^1$, et $R_f(\theta)$ l'image par ϕ_f du rayon d'angle θ, et $\gamma_f(\theta) = \phi_f(e^{2i\pi\theta})$.

A partir de deux polynômes unitaires f et g de même degré d, on peut construire un système dynamique $f \perp\!\!\!\perp g : \widetilde{\mathbb{C}}_{f,g} \to \widetilde{\mathbb{C}}_{f,g}$ de la façon suivante: l'espace $\widetilde{\mathbb{C}}_{f,g}$ est $\widetilde{\mathbb{C}}_f \sqcup \widetilde{\mathbb{C}}_g$ quotienté par la relation d'équivalence $\approx$ engendrée par $\phi_f(\theta, \infty) \approx \phi_g(-\theta, \infty)$. Et on définit $f \perp\!\!\!\perp g$ comme l'application quotiente de $f \sqcup g : \widetilde{\mathbb{C}}_f \sqcup \widetilde{\mathbb{C}}_g \to \widetilde{\mathbb{C}}_f \sqcup \widetilde{\mathbb{C}}_g$. Ainsi les rayons $R_f(\theta)$ et $R_g(-\theta)$ se collent sur l'équateur de $\widetilde{\mathbb{C}}_{f,g}$, et il existe une topologie naturelle sur l'espace $\widetilde{\mathbb{C}}_{f,g}$ pour qu'il soit homéomorphe à une sphère.

On appelle $F = f \perp\!\!\!\perp g$, qui est un revêtement ramifié de $\widetilde{\mathbb{C}}_{f,g}$, *l'accouplement* de f et g. On se demande si $F = f \perp\!\!\!\perp g$ est équivalent à une fraction rationnelle. Si oui, la dynamique de cette fraction rationnelle peut être interprétée comme une combinaison simple de celles de $f|_{K_f}$ et $g|_{K_g}$.

Pour pouvoir appliquer le critère de Thurston, on se restreint au cas où f et g sont géométriquement finis. Dans ce cas K_f et K_g sont localement connexes et $f \perp\!\!\!\perp g$ est aussi géométriquement fini. On définit la *rayon-relation* $\sim$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}_{f,g}$ par la relation d'équivalence engendrée par $x \sim y$ si x et y se trouvent dans l'adhérence d'un même rayon de f ou de g.

Grâce à l'existence de cette relation d'équivalence, on peut déterminer tous les cycles de Levy d'un accouplement:

Théorème 3.6 *([2], théorème 2.8) Soit F un accouplement à ensemble post-critique fini. Alors tout cycle de Levy de F induit un cycle périodique de la classe $\sim$.*

II. Nous allons appliquer ce résultat général à nos familles spéciales $\mathcal{Q}$, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{A}$. Pour cela, il faut d'abord déterminer tous les accouplements dans ces familles.

Notons $f_c : z \mapsto z^2 + c$, $g_a : z \mapsto z^3 - 3a^2 z + 2a^3 + a$, $h_b : z \mapsto z^3 + b$ et $\zeta : z \mapsto z^3 + 3z/2$. Il existe quatre polynômes cubiques unitaires deux-à-deux non conjugués s_1, s_2, s_3 et s_4 tels que l'orbite des deux points critiques x, y soit $x \mapsto y \mapsto z \mapsto x$ pour chaque s_i, et tels que, quitte à renuméroter les indices, s_1 et s_2 soient les seuls polynômes réels, et pour s_1, les point x, y, z soient aussi réels, avec $y < x < z$.

Lemme 3.7 *Les accouplements dans $\mathcal{Q}$ sont les revêtements ramifiés de la forme $f_c \perp\!\!\!\perp f_{c'}$; ceux dans $\mathcal{N}$ sont de la forme $\zeta \perp\!\!\!\perp g_a$ et ceux dans $\mathcal{A}$ sont de la forme $h_b \perp\!\!\!\perp s_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.*

Les théorèmes 3.5, 3.6, le lemme 3.7 et la réduction sur les cycles de Levy dégénérés nous donnent:

Théorème 3.8 *([2], théorème 4.1; [3] lemme 4.4 et [5] propositions 4.4-4.6). Supposons que F est un accouplement à ensemble postcritique fini. Si $F \in \mathcal{Q}$, il existe une classe de $\sim$ ayant deux points fixes et une courbe fermée; si $F \in \mathcal{N}$ alors $F = \zeta \perp\!\!\!\perp g_a$ avec $\gamma_a(0) = \gamma_a(1/2)$; si $F \in \mathcal{A}$ et si F possède un bon cycle de Levy comme dans le théorème 3.5.[i], alors $F = h_b \perp\!\!\!\perp s_2$ avec $\gamma_b(5/8) = \gamma_b(7/8)$.*

III. On peut ensuite interpréter ces résultats dans les plans des paramètres. Par exemple, comme corollaire, $F = f_c \perp\!\!\!\perp f_{c'}$ est équivalent à une fraction rationnelle si et seulement si F n'a pas de cycle de Levy non dégénéré, et si et seulement si c, c' se trouvent dans des membres non conjugués de l'ensemble de Mandelbrot. Ceci donne une réponse affirmative (en parallèle que M. Rees) à une conjecture d'A. Douady.

IV. Nous avons un outil puissant pour étudier la rayon-relation $\sim$, c'est les arbres de Hubbard de f et g. Ces arbres jouent un rôle d'attracteur pour les points ayant une classe d'équivalence non triviale. Plus précisément:

Proposition 3.9 *([3], prop. 4.3, voir aussi l'appendice C) Soit f un polynôme à ensemble postcritique fini. Notons H_f, l'arbre de Hubbard, l'enveloppe convexe de P_f dans K_f. Alors $f(H_f) \subset H_f$ et, pour tout point $x \in K_f$ qui est le point d'aboutisement d'au moins deux rayons, il existe n_0 tel que $f^n(x) \in H_f$ pour tout $n \geq n_0$.*

Une preuve de ce résultat se trouve dans l'appendice C.

V. Lorsque f et g sont à ensemble postcritique fini, M. Rees et puis M. Shishikura ont montré que, si $f \perp\!\!\!\perp g$ est équivalent à une fraction rationnelle, alors $\widetilde{\mathbb{C}}_{f,g}/\sim$ est homéomorphe à S^2 (voir [Sh]). On peut se demander si c'est une condition nécessaire et suffisante.

Combinant le résultat de Rees-Shishikura avec le théorème 3.8, et à l'aide de la proposition 3.9, nous avons:

Corollaire 3.10 *Soit $F = f \perp\!\!\!\perp g \in \mathcal{Q} \cup \mathcal{N}$ un accouplement à ensemble postcritique fini. Alors F est équivalent à une fraction rationnelle si et seulement si $\widetilde{\mathbb{C}}_{f,g}/\sim$ est homéomorphe à S^2.*

Or,

Proposition 3.11 *([5], Exemple 1) Pour tout $F = h_b \perp\!\!\!\perp s_i \in \mathcal{A}$, l'espace $\widetilde{\mathbb{C}}_{h_b,s_i}/\sim$ est toujours homémorphe à S^2, sauf si $i = 2$ et $\gamma_b(5/8) = \gamma_b(7/8)$. Mais il existe F, de la forme $h_b \perp\!\!\!\perp s_1$, possèdant une obstruction de Thurston comme dans le théorème 3.5.[ii]. Par conséquent, F n'est pas équivalent à une fraction rationnelle.*

En effet l'étude de la famille $\mathcal{A}$ a été développée spécialement pour construire ces contre-exemples.

VI. On peut aussi se poser la question réciproque: étant donnée une fraction rationnelle Q, existe-il un couple de polynômes f et g tels que $f \perp\!\!\!\perp g$ soit équivalent à Q? Y a-t-il aussi l'unicité de ce couple?

La réponse à la question d'unicité est en général non. Voir par exemple [W]. Il existe des conditions suffisantes pour l'existence du couple (f, g). Mais il n'y a pas de critère efficace (à part des conditions triviales) pour la non existence du couple (f, g). Par exemple, la méthode que B. Wittner avait utilisé pour montrer que l'application R dans le théorème 2.2 n'est pas équivalente à un accouplement est de compter tous les cas possibles. Ce n'est sûrement pas une méthode pratiquable dans le cas général.

La situation est pourtant plus simple si l'on sait que l'un des deux polynômes doit avoir un arbre de Hubbard "étoilé" (voir définition dans la section suivante), comme par exemple l'arbre de Hubbard de $\zeta : z \mapsto z^3 + 3z/2$. C'est pour cela que l'étude de la famille $\mathcal{N}$ est plus facile (voir aussi J. Luo, [Lu], où l'un des polynômes est $z^2 - 1$).

L'article [3] a pu déterminer non seulement quand un accouplement dans cette famille est équivalent à une fraction rationnelle, mais en plus quelle fraction rationnelle dans $\mathcal{N}$ est équivalente à un accouplement, et ce de combien de manières, et de quels couples de polynômes. De plus, les fractions rationnelles qui ne sont pas des accouplements ont aussi une dynamique facile à comprendre. En effet, elles sont toutes des *captures*, une dynamique construite à partir d'un seul polynôme (voir la section suivante). Ces résultats donnent ainsi une description complète de toutes les fractions rationnelles à ensemble postcritique fini dans cette famille.

3.4 Capture, extension d'une application de graphe

Soit $Q \subset S^2$ un graphe connexe topologiquement fini. Soit $g : Q \to Q$ une application continue, ayant un nombre fini de points critiques (i.e. points où g n'est pas localement injective) et d'ensemble postcritique P_g fini. Le résultat suivant est une conséquence simple de la définition:

Lemme 3.12 *Supposons que $g : Q \to Q$ s'étend en un revêtement ramifié G de S^2 tel que G soit injectif dans chaque composante de $S^2 - Q$. Alors pour $Q' = G^{-1}g(Q)$, la classe d'équivalence de Thurston de G ne dépend que de la classe d'isotopie de $G|_{Q'}$ rel. à P_g.*

A l'aide du théorème de Schrönflies, on peut donner des critères topologiques sur (g, Q) pour que l'extension G existe. Nous n'entrons pas dans les détails ici. Voir par exemple [W] et [BFH].

Grâce à l'existence des arbres de Hubbard, un accouplement F à ensemble postcritique fini possède toujours des graphes invariants tels que F soit une extension du genre du lemme 3.12 de ces applications de graphe.

Une autre construction de revêtements ramifiés comme extension d'applications de graphe s'appelle *capture*. Nous allons illustrer cette technique par l'étude sur notre polynôme spécial ζ.

Les détails de la suite se trouvent dans [3]. Notons $u = i/\sqrt{2}$ et $v = -i/\sqrt{2}$ les deux points critiques de ζ. Ils sont aussi des points fixes de ζ. Dans le bassin immédiat de u, il y a aussi un système des rayons $\{R_u(\theta)\}$. Ce sont des rayons "internes". Rappelons que $R_\zeta(\theta)$ désigne le rayon externe de ζ d'angle θ.

L'union des quatre rayons $R_u(0) \cup R_u(1/2) \cup R_\zeta(0) \cup R_\zeta(1/3)$ forme une courbe de Jordan nommé γ dans $\overline{\mathbb{C}}$.

Soit $y \in K_\zeta$ un point prépériodique. L'ensemble $\zeta^{-1}\{\zeta(y)\}$ a trois points distincts, notés y_0, y_0', y. L'union de $R_\zeta(0) \cup R_\zeta(1/3) \cup \{\infty\}$ avec l'enveloppe convexe (comme pour les arbres de Hubbard) des points $u, v, y_0, y_0', \bigcup_{n\geq 1} \zeta^n(y)$ forme un graphe topologiquement fini dans $\overline{\mathbb{C}}$, noté par $T(y)$.

On a $\zeta(T(y)) \subset T(y)$. Nous allons identifier y_0 et y_0' pour créer un point critique, ou bien pour qu'un point critique soit "capturé" artificielement par y_0:

Théorème 3.13 *([3], théorème 5.2) Il existe un sous-ensemble Y de K_ζ dans la composante de $\overline{\mathbb{C}} - \gamma$ disjointe de v, tel que pour tout $y \in Y$, le graphe $T(y)/y_0 \sim y_0'$ se plonge en un graphe Q dans S^2, et l'application $g : Q \to Q$ induite par $f : T(y) \to T(y)$ admette une extension $G = G(\zeta, y)$ comme dans le lemme 3.12. Le revêtement ramifié G est dans $\mathcal{N}$, sa classe the Thurston ne dépend que de y, et G est toujours équivalent à une fraction rationnelle. De plus, toute fraction rationnelle dans $\mathcal{N}$ est soit équivalente à un accouplement $\zeta \perp\!\!\!\perp g_a$, soit équivalente à une capture $G(\zeta, y)$.*

La plupart de la démonstration a été fait par J. Head ([He]), sauf pour montrer que G n'a pas de cycle de Levy dégénéré lorsque y est strictement prépériodique mais non préfixe, et pour montrer le dernier énoncé. Mais dans le premier cas, l'unicité du lemme 3.12 nous guarantie que G est aussi un accouplement. On peut ainsi appliquer les résultats sur des accouplements pour conclure. Le dernier énoncé du théorème résulte aussi de l'unicité du lemme 3.12 et les graphes connectant les arbres de Hubbard dans le cas des accouplements.

La technique que J. Head avait utilisé est très différente de celle du théorème 3.6 (i.e. celle des rayons). Elle consiste à montrer que, lorsqu'une obstruction de Thurston Γ intersecte un arc fixé par G de manière essentielle, alors Γ est un cycle de Levy avec des propriétés particulières. Ce résultat a été repris et généralisé dans [5] et [4]. La forme la plus générale de cet énoncé se trouve dans [4], théorème 3.2.

Cette technique d'intersections d'arcs est aussi l'outil principal pour démontrer les résultats de l'article [4] (en collaboration avec K. Pilgrim). Ce travail étudie une nouvelle construction de revêtements ramifiés. Plus précisément, partant d'une fraction rationnelle f et d'un arc α, on découpe la sphère le long d'α, on lui recolle un disque D, et on étend la dynamique sur D pour que l'image de D soit $S^2 - f(\alpha)$. Avec des bonnes conditions sur l'arc, le nouveau revêtement ramifié est toujours équivalent à une fraction rationnelle. Nous négligeons les détails ici.

Cette technique d'intersections d'arcs plus les résultats sur les accouplements nous donnent aussi un corollaire intéressant.

On dit que f est un polynôme *étoilé* si d'une part son arbre de Hubbard H est un nombre fini d'arêtes partant d'un sommet commun α, d'autre part $f : H \to H$, $\alpha \mapsto \alpha$ est un homéomorphisme.

Corollaire 3.14 *Soit f un polynôme unitaire étoilé. Soit g un polynôme unitaire de même degré, et à ensemble postcritique fini. Notons $F = f \perp\!\!\!\perp g$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

- *F est équivalent à une fraction rationnelle;*
- *F n'a pas de cycle de Levy non dégénéré;*
- *$\widetilde{\mathbb{C}}_{f,g}/\sim$ est homéomorphe à S^2;*
- *tout rayon $R_f(\theta) \cup R_g(-\theta)$ aboutisant à α n'aboutit pas à un point fixe de g.*

3.5 Question ouvertes

1. Accouplements de polynômes à ensemble postcritique infini.

Pour deux polynômes unitaires f et g de même degré, la rayon-relation est bien définie dès que K_f et K_g sont localement connexes. Mais que peut-on dire sur $\widetilde{\mathbb{C}}_{f,g}/\sim$ et sur $[f \perp\!\!\!\perp g]$? D'abord est-ce qu'il y a des critères simples pour que $\sim$ soit une relation fermée et que $\widetilde{\mathbb{C}}_{f,g}/\sim$ soit homéomorphe à une sphère? Que peut-on dire de plus lorsque f et g sont quadratiques, de type de Yoccoz par exemple? Si $\widetilde{\mathbb{C}}_{f,g}/\sim$ est homéomorphe à une sphère, est-ce que $[f \perp\!\!\!\perp g]$ est conjuguée à une fraction rationnelle (d'après Rees-Shishikura la réponse est oui lorsque f et g sont à ensemble postcritique fini et $f \perp\!\!\!\perp g$ est équivalent à une fraction rationnelle)? Y a-t-il une sorte de continuité en $[f \sqcup g]$ quand on varie f et g (A. Epstein a donné récemment une réponse négative dans certains cas).

Que peut-on dire sur $f \perp\!\!\!\perp g$ si l'un des K_f, K_g n'est pas localement connexe?

2. Pour un accouplement F à ensemble postcritique fini les cycles de Levy sont associés à des classes des rayons. Que peut-on dire sur les obstructions de Thurston qui ne sont pas des cycles de Levy? Y a-t-il une sorte de mesure invariante sur l'équateur associée à chaque obstruction? Comment trouver systématiquement des obstructions du genre du théorème 3.5.[ii] par exemple?

3. Lorsque qu'un revêtement ramifié F n'est pas équivalent à une fraction rationnelle, peut-on décomposer la dynamique de F le long des courbes d'une obstruction de Thurston? Ceci est vraisemblable si F possède une obstruction

“canonique”, c’est-à-dire une obstruction disjointe de toutes les autres obstructions (c’est le cas pour Γ si $\lambda(\Gamma) > 1$). Mais existe-il toujours une obstruction canonique?

Appendices

A Esquisse de la preuve du théorème de Thurston (d'après Douady-Hubbard [DH2])

On suppose que la signature de l'orbifold de R est différente de $(2, 2, 2, 2)$.

Notons P l'ensemble postcritique de R et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_R$ l'espace de Teichmüller de R (c'est l'espace des structures presque complexes sur S^2 quotienté par la relation $\sim$, où $\mu_1 \sim \mu_2$ si $\mu_2 = h^*\mu_1$, avec h un difféomorphisme de S^2, fixant les points de P et homotope à l'identité rel. P). L'espace $\mathcal{T}$ muni de la métrique de Teichmüller est un espace complet.

On définit $\sigma = \sigma_R : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ par $\sigma([\mu]) = [R^*\mu]$. C'est une application bien définie.

Première reduction. R est équivalent à une fraction rationnelle si et seulement si σ admet un point fixe.

Ceci déroule de la définition.

On se ramène ainsi à étudier la dynamique de σ. Par des techniques standards de la théorie des espaces de Teichmüller, on remarque que σ est une contraction au sense large et que $\sigma \circ \sigma$ est une contraction. Un des corollaires est l'unicité d'une fraction rationnelle dans la classe de R. Une autre conséquence est qu'un point fixe de σ attire nécessairement tout point de $\mathcal{T}$.

Deuxième réduction. σ admet un point fixe si et seulement s'il existe $\tau_0 \in \mathcal{T}$ tel que la suite $\tau_n = \sigma(\tau_{n-1})$ converge, si et seulement si pour tout point $\tau_0 \in \mathcal{T}$ la suite τ_n converge.

Pour chaque $\tau \in \mathcal{T}$, et μ une structure presque complexe représentant τ, il existe un homéomorphisme $\phi : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ qui est holomorphe entre (S^2, μ) et $\overline{\mathbb{C}}$. Pour toute courbe de Jordan γ dans $S^2 - P$, on définit $l_\tau(\gamma)$ la longueur de la géodésique homotope à $\phi(\gamma)$ dans la surface de Riemann $\overline{\mathbb{C}} - \phi(P)$, munie de sa métrique hyperbolique. Il faut remarquer que $l_\tau(\gamma)$ est indépendent ni du choix de représentant μ ni du choix de ϕ pour intégrer μ. De plus, pour $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ une multicourbe, il existe des anneaux disjoints $A_1, \cdots, A_n$ dans $\overline{\mathbb{C}} - \phi(P)$ d'équateur γ_j, de module entre $\frac{\pi}{2l_\tau(\gamma_j)} - 1$ et $\frac{\pi}{2l_\tau(\gamma_j)}$. Notons

$$w(\gamma, \tau) = \log \frac{1}{l_\tau(\gamma)}; \quad w(\Gamma, \tau) = \log \frac{1}{\inf_{\gamma \in \Gamma} l_\tau(\gamma)} \quad \text{et } w(\tau) = \log \frac{1}{\inf_\gamma l_\tau(\gamma)} .$$

Troisième réduction. Soit $\tau_0 \in \mathcal{T}$. La suite τ_n converge si et seulement si la suite $w(\tau_n)$ est majorée.

Ceci se démontre également par des propriétés de $\mathcal{T}$ et σ.

Démonstration du théorème. Nécessité: ceci se déduit facilement d'un théorème de Strebel.

Suffisance.

Etape 1. Les applications $\tau \mapsto w(\gamma,\tau)$ and $\tau \mapsto w(\tau)$, $\mathcal{T} \to \mathbb{R}$ sont lipschitziennes de constante de Lipschitz 2.

Ainsi, pour τ_n une orbite de σ, on a

$$|w(\tau_n)-w(\tau_{n-1})| \leq 2d(\tau_n,\tau_{n-1}) \leq 2d(\tau_1,\tau_0) := 2D\,, \text{ et } |w(\tau_{j+m})-w(\tau_j)| \leq 2mD\,.$$

Pour $b > 0$ et $\tau \in \mathcal{T}$ donnés, on définit $\Gamma_{b,\tau}$ comme l'ensemble des courbes de Jordan γ telles que $w(\gamma,\tau) \geq b$.

Etape 2. Si $b > A = -\log\log(1+\sqrt{2})$, alors $\Gamma_{b,\tau}$ est une multicourbe.

Soient d le degré de R et $p = \#P$. Il existe un entier $m = m(d,p)$ tel que $\|R_\Gamma^m\| \leq 1/2$ pour toute multicourbe Γ avec $\lambda(\Gamma) < 1$ (car avec d,p donnés, une multicourbe a au plus $p-3$ éléments, et il n'existe qu'un nombre fini de matrices de la forme R_Γ).

Etape 3. Soient τ_n une orbite de σ et $D = d(\tau_1,\tau_0)$. Soient $J = m(\log d + 2D)$ et $a = a(J,\tau_0,\tau_m)$ le plus petit nombre supérieur à A tel que pour toute courbe de Jordan γ', $w(\gamma',\tau_0) \notin\,]a,a+J[$ et $w(\gamma',\tau_m) \notin\,]a,a+J[$. Alors si $w(\tau_0), w(\tau_m) > B = 2(p-3)J + A$, on a $\Gamma = \Gamma_{a+J,\tau_0} = \Gamma_{a+J,\tau_m} \neq \emptyset$ et c'est une multicourbe R-invariante. De plus, pour les vecteurs $v_i = \{1/l_{\tau_i}(\gamma),\ \gamma \in \Gamma\}$, on a $v_m = (R_\Gamma^m)v_0 + r$ avec $\|r\| < K$ où $\|r\| = \max_i |r_i|$, et K est une constante ne dépendant que de p, d et J, et est croissante par rapport à J.

Etape 4. Si $w(\tau_0), w(\tau_m) > C = \sup\{B, \log(2K)\}$ et si $w(\Gamma,\tau_m) \geq w(\Gamma,\tau_0)$, alors $\lambda(\Gamma) \geq 1$ (si $\lambda(\Gamma) < 1$, alors $\|v_m\| \leq \|v_0\|/2 + \|r\| \leq \|v_0\|/2 + K$. Comme $K < e^{w(\tau_0)}/2 = \|v_0\|/2$ on a $\|v_m\| < \|v_0\|$ ainsi $w(\tau_m) < w(\tau_0)$).

Etape 5. On suppose que R n'est pas équivalent à une fraction rationnelle. Ainsi $\limsup_{n\to\infty} w(\tau_n) = +\infty$. Prenons C' tel que $C' > C$ et $C' \geq w(\tau_0)$.

Soit $i+m$ l'entier minimal tel que $w(\tau_{i+m}) \geq C' + 2mD$. Par l'étape 1, on a $i \geq 0$ et $w(\tau_i) \geq C' > C$. Soient $J' = m(\log d + 2\cdot d(\tau_i,\tau_m))$ et $a = a(J',\tau_i,\tau_{i+m})$. On remarque que $J' \leq J$. Soit $\Gamma = \Gamma_{a+J',\tau_i}$. Par les étapes 2 et 3, $\Gamma = \Gamma_{a+J',\tau_{i+m}}$, et Γ est une multicourbe R-invariante non vide. De plus, due au choix de i, $w(\tau_{i+m}) \geq C' + 2mD > w(\tau_i)$. Ainsi, par l'étape 4, $\lambda(\Gamma) \geq 1$. $\blacksquare$

B Un résultat général sur les revêtements ramifiés

We state at first a classical result:

Lemma B.1 *Let $E \sqcup W$ be a decomposition of $\overline{\mathbb{C}}$ with W open and connected. Suppose we have a nested sequence of closed discs D_n such that $\partial D_n \subset W$ and $\sup_{z\in\partial D_n} d(z, \partial W) \to 0$ as $n \to \infty$, then $\bigcap_n D_n$ is a component of E. On the other hand, each component K of E is contained in a nested sequence of closed discs D_n such that $\partial D_n \subset W$ and $\bigcap_n D_n = K$. As a consequence, the complement of K is connected and simply connected.*

Proof. This is classical topology. For example one may construct the discs D_n via tilings of squares of diameter $1/n$. ∎

Proposition B.2 *Let $F : S^2 \to S^2$ be a branched covering of degree ≥ 1.*

a) Let W be an open connected subset of S^2, and W' a component of $F^{-1}W$. Then $F(W') = W$ and $F(\partial W') = \partial W$. Moreover for each component K' of $S^2 - W'$ there is a unique component K of $S^2 - W$ such that $F(\partial K') = \partial K$. Furthermore either $F(K') = K$ or $F(K') = S^2$. In the last case K' (resp. K) contains at least two distinct critical points (resp. critical values).

b) Let $K \subset S^2$ be a compact connected set. Then there are at most finitely many components $U_1, \cdots, U_p$ of $S^2 - K$ such that $F^{-1}U_i$ contains a non disc component. There is a connected neighborhood V of K with p boundary components such that each component V' of $F^{-1}(V)$ contains exactly one component K' of $F^{-1}(K)$. Moreover, K' is also compact connected, $\partial V'$ is contained in the union of finitely many components of $S^2 - K'$, and any other component of $S^2 - K'$ is contained in V' and is mapped by F onto a component of $S^2 - K$, distinct from $U_1, \cdots, U_p$ (so is contained in V). As a consequence, for each component K' of $F^{-1}K$, we have $F(K') = K$. And K' contains a critical point if and only if $F : K' \to K$ is not locally injective.

Proof. This result can be considered as a generalization of the following property of branched coverings: Let γ be a Jordan curve disjoint from critical values of F. Then $\Gamma' = F^{-1}(\gamma)$ consists of finitely many disjoint Jordan curves, each of them is mapped by F onto γ. If we name (or color) the two discs of $S^2 - \gamma$ by R (red) and G (green), then each component B' of $S^2 - \Gamma'$ is mapped by F onto one of the two discs, say R, and B' is a component of $F^{-1}(R)$. Moreover if B' is not a disc then B' contains at least two critical points and $F(B')$ contains at least two distinct critical values. Furthermore two components of $S^2 - \Gamma'$ having a common boundary point (so a common boundary component) are mapped by F onto discs with different colors.

A subtlety is that the map $F|\partial W' : \partial W' \to \partial W$ need not be an open mapping in the subspace topology.

a) We have $F(W') \subset W$, and $F(\partial W') \subset \partial W$. Thus $F : W' \to W$ is a proper mapping. As a consequence, $F(W') = W$ and $F(\partial W') = \partial W$. Without loss of generality, we may assume that $\infty \in W$, $\infty \in W'$, and $F(\infty) = \infty$. Let K' be a component of $S^2 - W'$. Then $\partial K'$ is a component of $\partial W'$, $F(\partial K')$ is connected and is contained in ∂W. So there is a unique component K of $S^2 - W$ such that $F(\partial K') \subset \partial K$. We want to show that $F(\partial K') = \partial K$.

Let D_n be a sequence of open discs such that ∂D_n is a Jordan curve, $\partial D_n \subset W$, $\overline{D_n} \subset D_{n-1}$ and $\bigcap_n D_n = K$, given by Lemma B.1. We may assume that $\partial D_0 \cup (D_0 - K)$ contains no critical value.

Fix a point $x \in \partial K'$. So $F(x) \in \partial K \subset D_0$. Denote by B_0' the component of $F^{-1}D_0$ containing x.

From the above general property of branched coverings we know that $\partial B_0'$ consists of finitely many disjoint Jordan curves, each of them is mapped onto $\partial D_0'$. On the other hand $\overline{B_0'}$ is bounded since $F(\overline{B_0'}) = \overline{D}_0$, $F(\infty) = \infty$ and $\overline{D}_0$ is bounded. Therefore there is a unique boundary component γ' of B_0', which separates B_0 from ∞. The curve γ' is also the unique boundary curve of B_0' which separates x and ∞. We claim now that γ' must be contained in W'. For otherwise γ' would be contained in $F^{-1}W - W'$, which does not disconnect $\overline{W'}$, nor separate x and ∞.

Denote by A the open annulus $D_0 - K$. Since A contains no critical values, each component S' of $F^{-1}A$ is again an open annulus. One can check easily that either $S' \cap B_0' = \emptyset$ or $S' \subset B_0'$, and F maps each component of $\partial S'$ onto a component of ∂A. Moreover to each boundary component s' of B_0' is "attached" a unique component S' of $F^{-1}A$ in the sense that $S' \subset B_0'$ and s' is a boundary component of S'. The other component of $\partial S'$ is contained in $B_0' \cap F^{-1}(\partial K)$. There are no other component of $F^{-1}A$ contained in B_0'.

Denote by A' the component of $F^{-1}A$ that is attached to the curve γ'. So the outer boundary of A' is γ' and the inner boundary L' of A' is a subset of $B_0' \cap F^{-1}\partial K$. Moreover $F(L') = \partial K$, since ∂K is the inner boundary component of A.

We are going to show $\partial K' = L'$.

At first we show $W' \cap B_0' = A' \cap F^{-1}W$. Since $F(L') = \partial K$ we have $L' \cap W' = \emptyset$ and L' does not disconnect W'. So $W' \cap B_0' \subset A'$ and $W' \cap B_0' \subset A' \cap F^{-1}W$. On the other hand, $A' \cap F^{-1}(W) \subset W'$, for otherwise A' would contain an entire component of $F^{-1}W$ and thus a pole. Therefore $A' \cap F^{-1}(W) \subset W' \cap B_0'$.

This formula will help us to find out the position of our base point $x \in \partial K'$.

There is a sequence $x_m \in W' \cap B'_0$ such that $x_m \to x$. From above x_m is also contained in A'. Thus $x = \lim x_m$ is contained in $\overline{A'} = \gamma' \cup A' \cup L'$. But $F(x) \in K$, $F(A') = A$ and $F(\gamma') = \partial D_0 \subset W$. So in fact $x \in L'$.

Now we make use of the sequence D_n. Denote by B'_n the component of $F^{-1}D_n$ containing x, and by D'_n the union of B'_n together with the bounded components of $S^2 - B'_n$. Then $\overline{D'_n}$ is a disc. Since $K' \cap \partial D'_n = \emptyset$ and $x \in K' \cap D'_n$, we have $K' \subset D'_n$ for all n. Thus $K' \subset \bigcap_n D'_n$. On the other hand, $\bigcap_n D'_n$ is compact connected with boundary L', and disjoint from W'. So $\bigcap_n D'_n \subset K'$. Therefore $K' = \bigcap_n D'_n$ and $\partial K' = \partial \bigcap_n D'_n = L'$.

As a consequence, $F(\partial K') = \partial K$.

As for $F(K')$, we distinguish two cases: 1. The component B'_0 is a disc. In this case $B'_n = F^{-1}D_n \cap B'_0 = D'_n$ is a disc for all n, and $K' = \bigcap_n B'_n$. Since $F(B'_n) = D_n$, $\bigcap_n D_n = K$, we have $F(K') = K$.

2. The component B'_0 is not a disc. Then by the general property at the beginning of the proof D_0 thus K contains at least two critical values and B'_0 contains at least two distinct critical points. Moreover $F(D'_0) = S^2$, where D'_0, as above, denotes the union of B'_0 together with the bounded components of $S^2 - B'_0$. Similarly for any n, we have $F(B'_n) = D_n$ and $F(D'_n) = S^2$. As a consequence, $F(\bigcap_n B'_n) = K$, $F(K') = F(\bigcap_n D'_n) = S^2$, and $\bigcap_n B'_n$ therefore K' contains at least two critical points. Moreover $\bigcap_n B'_n$ is a component of $F^{-1}K$.

We now prove b). Each U_i must contain at least two critical values. So there are at most finitely many of them. We set $p = 0$ if there is no such component. For example this is the case when each component of $S^2 - K$ contains at most critical value.

In case $p = 0$, we take $V = S^2$. We only need to show that $F^{-1}K$ is connected (and then apply the formula $FF^{-1}K = K$). Since K is connected, each component U of $S^2 - K$ is simply connected. By assumption each component of $F^{-1}(U)$ is again simply connected, therefore each component of $S^2 - F^{-1}K$ is simply connected, so $F^{-1}K$ is connected. Moreover each component of $S^2 - F^{-1}K$ is mapped by F onto a component of $S^2 - K$.

Assume now $p > 0$. We are going to make a topologically surgery to reduce to the case $p = 0$. For $i = 1, \cdots, p$, take a Jordan curve $\gamma_i \subset U_i$ disjoint from critical values such that the annulus bounded by ∂U_i and γ_i contains no critical value. Then $\bigcup_{i=1}^{p} \gamma_i$ separates S^2 into $p+1$ components. One of them, called V, contains K, the others are topological discs.

Let V' be a component of $F^{-1}(V)$. The mapping $F : V' \to V$ is a proper branched covering. We define a new branched covering $G : S^2 \to S^2$ such that

$G|_{V'} = F$, $G^{-1}V = V'$ and G has at most one critical value in each component of $S^2 - V$. Therefore $G^{-1}(U)$ are discs for each component U of $S^2 - K$. So $G^{-1}K$ is connected (as shown above). Since $G^{-1}(K) \cap \partial V' = \emptyset$, we have $G^{-1}(K) \subset V'$. So $F^{-1}(K) \cap V' = G^{-1}(K) = K'$ is a connected component of $F^{-1}K$. Moreover $F(K') = G(K') = K$.

The rest is easy. ■

Corollary B.3 *Let S be a closed subset of S^2 and W be an open connected subset of S^2. Define*

$$U(W, S) = W \cup \bigcup \{K \mid K \textit{ a component of } S^2 - W \textit{ such that } K \cap S = \emptyset\} .$$

Let $F : S^2 \to S^2$ be a branched covering. The postcritical set $\mathcal{P}$ is well defined. Assume $S \supset \mathcal{P}$. Then, for W' a component of $F^{-1}W$, we have

a) $U(W', F^{-1}S)$ coïncides with the component of $F^{-1}U(W, S)$ containing W'.

b) $U(W', F^{-1}S) = F^{-1}(U(W, S)) \cap U(W', F^{-1}\mathcal{P})$.

Note that this corollary fails to be true if the condition $S \supset \mathcal{P}$ is not satisfied (for example when S is a single point).

Proof. a). Clearly $W' \subset U(W', F^{-1}S)$. To prove a) we just need to show that $F(U(W', F^{-1}S)) \subset U(W, S)$ and $F(\partial U(W', F^{-1}S)) \subset \partial U(W, S)$.

At first $F(W') = W$ by Proposition B.2. Let K' be a component of $S^2 - W'$ such that $K' \cap F^{-1}S = \emptyset$. In particular K' contains no critical point. By Proposition B.2, there is a component K of $S^2 - W$ such that $F(K') = K$. So $K \cap S = \emptyset$ and $K \subset U(W, S)$. This proves that $F(U(W', F^{-1}S)) \subset U(W, S)$.

Now each boundary component of $U(W', F^{-1}S)$ is in the form $\partial K'$, with K' a component of $S^2 - W'$ such that $K' \cap F^{-1}S \neq \emptyset$. Again by Proposition B.2, there is a component K of $S^2 - W$ such that $F(\partial K') = \partial K$, and either $F(K') = K$ or K (resp. K') contains at least two critical values (resp. two critical points). In both cases $K \cap S \neq \emptyset$ so $\partial K \subset \partial U(W, S)$. Thus $F(\partial U(W', F^{-1}S)) \subset \partial U(W, S)$.

b). From part a) and the fact that $F^{-1}S \supset F^{-1}\mathcal{P}$ we have

$$U(W', F^{-1}S) \subset F^{-1}(U(W, S)) \cap U(W', F^{-1}\mathcal{P}) .$$

To prove the inclusion in the other direction, we need to show that the set $U(W', F^{-1}\mathcal{P}) - U(W', F^{-1}S)$ is disjoint from $F^{-1}(U(W, S))$. The first set consists of components K' of $S^2 - W'$ such that $K' \cap F^{-1}S \neq \emptyset$ but $K \cap F^{-1}\mathcal{P} = \emptyset$. Any such K' will not contain critical points. By Proposition B.2, the set $F(K')$ is a component of $S^2 - W$. Moreover $F(K') \cap S \neq \emptyset$. ■

C Arbre de Hubbard

Every monic postcritically finite polynomial g of degree d has a forward invariant *Hubbard tree* H_g, which is the convex hull of P_g in K_g. For a detailed description of Hubbard trees, and notations about external angles and rays, please refer to [DH1],I, especially pages 30-36.

Proposition C.1 *Every point x in the Julia set J_g with more than one external rays eventually falls into the Hubbard tree H_g, under iterations by g.*

Proof. Set $H = H_g$, $\beta = \gamma(0)$ the fixed point with external angle 0,

$$\beta,\ \beta_1 = \gamma(\frac{1}{d}),\ \beta_2 = \gamma(\frac{2}{d}), \cdots,\ \beta_{d-1} = \gamma(\frac{d-1}{d})$$

the preimages of β, H' the 'convex hull' of $\{\beta, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{d-1}\}$ in K_g and $\hat{H}$ the convex hull in K_g of $P_g \cup \{\beta, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{d-1}\}$. According to Douady-Hubbard's tree theory, $H, H' \subset \hat{H}$. Moreover, if t and t', belonging to different components of

$$[0,1] - \{\frac{1}{d}, \frac{2}{d}, \cdots, \frac{d-1}{d}\}, \tag{2}$$

are external angles of the same point x, then $x \in H'$.

Suppose now that $x \in J_g$ and x has at least two external angles t, t' $(t \neq t')$. Then in the expansions of t, t' in base d:

$$t = 0.\varepsilon_0\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k \cdots\ ,\quad t' = 0.\varepsilon'_0\varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_k \cdots\ ,$$

there is k such that $\varepsilon_k \neq \varepsilon'_k$ and hence $d^k t, d^k t'$ are in different components of (2) and thus $g^k(x) \in H'$.

We need now to show that every $x \in H'$ having more than one external ray eventually falls into H. First of all, there is a unique point $a \in H$ such that $([\beta, a] - \{a\}) \cap H = \emptyset$, with $a = \beta$ if $\beta \in H$, where $[\beta, a]$ denotes the unique regular arc (see [DH1],I,page 33) for definition) connecting β and a. Since $[\beta, a] - \{a\}$ contains no critical values, we have $g(H') \subset H \cup [\beta, a]$.

If $\beta \in H$ then $a = \beta$ and $g(H') \subset H$, so we are done in this case.

Assume now $\beta \notin H$. Assume at first that $[\beta, a] - \{a\}$ contains no critical points.

If $g(a) \neq a$, then $[\beta, a] \subset [\beta, g(a)]$, $[a, g(a)] \subset H$ and $g : [\beta, a] \to [\beta, g(a)]$ is an expanding homeomorphism, so every point in $[\beta, a] - \{\beta\}$ eventually falls into $[a, g(a)] \subset H$ and then stays in H since $g(H) \subset H$. If $g(a) = a$, let a' be the fixed point in $[\beta, a]$ closest to β. Then every point in $[\beta, a'] - \{\beta\}$ is attracted to a'. Hence a' is an attracting fixed point, which must be in H. So $a' = a$. Therefore points in $[\beta, a] - \{\beta\}$ are contained in the attracting basin of a, hence disjoint from J_g. Consequently $g(H' \cap J_g) \subset H \cup \{\beta\}$.

Assume now $[\beta, a] - \{a\}$ contains critical points $c_1, \cdots, c_l$. They are ordered in the arc $[\beta, a]$ as $\beta < c_1 < c_2 < \cdots < c_l < a$. The map g is injective in each of the sub-arcs. Since $g(c_i) \in H$, each of the sub-arcs, except $[\beta, c_1]$, is mapped homeomorphically onto an arc contained in H. Furthermore $g([\beta, c_1]) \supset [\beta, a]$. For the same reason as above, there can not be fixed points in $[\beta, c_1] - \{\beta\}$. So every point in $[\beta, c_1] - \{\beta\}$ is mapped eventually into $[c_1, a] \cup H$, and is mapped into H after one more iteration. ■

Liste des travaux, articles et publications

References

[1] Accouplements des polynômes quadratiques complexes, *C. R. Acad. Sc.* Paris, t.302, série I, $n°17$, 1986.

[2] Matings of quadratic polynomials, *Ergodic theory and dynamical systems*, 12, 589-620, 1992, version prélimilaire: Accouplements de polynômes complexes, thèse de doctorat à l'Université de Paris-Sud, 1987.

[3] Branched coverings and cubic Newton maps, à paraître dans *Fundamenta Mathematicae.*

[4] (avec K. Pilgrim) Surgery on postcritically finite rational maps by blowing up an arc, prépublication MSRI, no. 104-95, à paraître dans *Ergodic theory and dynamical systems.*

[5] (avec M. Shishikura) A family of cubic rational maps and matings of cubic polynomials, prépublication Max-Planck-Institute für Mathematik, Bonn, Allemagne, 88-50, 1988. Version récente: manuscript.

[6] (avec J. Milnor) A Sierpiński carpet as Julia set, une appendice dans J. Milnor, Geometry and dynamics of quadratic rational maps, *Experimental Math.* vol. 2 (1993), 78-81.

[7] (avec Y. Yin) Local connectivity of the Julia set for geometrically finite rational maps, *Science in China* (Series A), vol. 39, no. 1 (1996), 39-47.

[8] (avec K. Pilgrim) Rational maps with disconnected Julia set, prépublication de l'Université de Warwick, no. 43/1996, à paraître dans *Astérisque*, volume spécial en l'honneur d'A. Douady.

[9] Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets, *Commun. Math. Phys.* 134, 587-617, 1990 .

[10] Voisinages connexes des points de Misiurewicz, *Ann. Inst. Fourier*, **42**, 4, 707-735, 1992.

[11] Local properties of the Mandelbrot set M, Similarities between M and Julia sets, Proceedings of the seventh EWM meeting, Madrid, 1995.

[12] Hausdorff dimension of subsets of the parameter space for families of rational maps, (a generalization of Shishikura's result), prépublication de l'Université de Warwick, no. 3/1997.

[13] Continuous and discrete Newton's algorithms, Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Nankai Institute of Mathematics, 1992, International press 1994, pp. 208-219.

[14] L'ordre du contact des composantes hyperboliques de M, un chapitre dans A. Douady et J.H. Hubbard: Etude dynamique des polynômes complexes, II, publications mathématiques d'Orsay, 85-04, 1985.

Bibliographie complémentaire

[BFH] B. Bielefeld, Y. Fisher et J. Hubbard: The classification of critically preperiodic polynomials as dynamical systems, *J. Amer. Math.Soc.* **5** (1992), 721-762.

[DH1] A. Douady et J. Hubbard, Etude dynamique des polynômes complexes, I et II, avec la collaboration de P. Lavaurs, Tan Lei et P. Sentenac, Publication d'Orsay 84-02, 85-04, 1984/1985.

[DH2] A. Douady et J. Hubbard, A proof of Thurston's topological characterization of rational functions, *Acta Math.*, 171 (1993), 263-297.

[He] J. Head, The combinatorics of Newton's method for cubic polynomials, Ph.D. thesis, Cornell University, 1987.

[Lu] J. Luo, Combinatorics and holomorphic dynamics: captures, matings, Newton's method, Ph.D. thesis, Cornell University, 1995.

[MSS] R. Mañé, P. Sad, and D. Sullivan, On the dynamics of rational maps, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., (4) 16 (1983) p. 193-217.

[Mc] C. McMullen, Automorphisms of rational maps. In *Holomorphic Functions and Moduli I*, pages 31-60. Springer Verlag, 1988.

[Mi] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures, prépublication SUNY Stony Brook, 1990.

[Pi] K. Pilgrim, Cylinders for iterated rational maps, Ph.D. thesis, University of California at Berkeley, 1994.

[Sh] M. Shishikura, On a theorem of M. Rees for matings of polynomials, prépublication I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, France, 1990.

[W] B. Wittner, On the bifurcation loci of rational maps of degree two, Ph.D. thesis, Cornell University, 1986.