# Itérations des fractions rationnelles

Notes d'école d'été 94 à Grenoble

Tan Lei

# Introduction

Nous donnons d'abord la définition de l'ensemble de Julia et Fatou pour une fraction rationnelle, ensuite les quatres résultats fondamentaux de la théorie:

1. L'ensemble de Julia coincide avec l'adhérence des points périodiques répulsifs.
2. Classification des composantes de Fatou périodiques.
3. Toute composante de Fatou est prépériodique.
4. Il n'existe qu'un nombre fini d'orbites périodiques des composantes de Fatou.

Les idées principales des démontrations sont développées. Nous décrivons en même temps le rôle que jouent dans la dynamique des points périodiques, exceptionnels et critiques.

Nous étudions ensuite: relation frontière entre le Julia et le Fatou; dépendance de la dynamique par rapport au paramètre et enfin construction des fractions rationnelles avec une dynamique spécifiée (théorie de Thurston).

Les références de bases sont [Be], [Br], [CG], [Ly], [Mi] et [St].

## 1 Résultats préliminaires

**a.** Soit $\overline{\mathbb{C}}$ la sphère de Riemann, munie de la *métrique sphérique* $2|dz|/(1+|z|^2)$. Notons $d(z,w)$ cette distance. On a

$$d(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} \ , \ z,w \in \mathbb{C} \ \text{ et } \ d(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \ .$$

**b.** Tout ouvert connexe $U$ de $\overline{\mathbb{C}}$ ayant au moins trois points au bord admet une unique *métrique hyperbolique* $\rho$. Soient $K_n \subset U$ une suite de compacts, $x_n \in K_n$, avec $x_n \to_d \partial U$ et $diam_\rho(K_n) < cte$ pour tout $n$. Alors $diam_d(K_n) \to 0$. Toute fonction holomorphe contracte au sens large cette métrique (lemme de Schwarz).

**c.** Famille normale et théorème de Montel.

Soit $U$ un ouvert connexe de $\overline{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{A}$ une famille de fonctions continues de $U$ dans $\overline{\mathbb{C}}$. On dit que $\mathcal{A}$ est *équicontinue sur tout compact* si pour tout $K \subset U$ compact, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta$, tel que $\forall z, w \in K$ avec $d(z,w) < \delta$ et $\forall f \in \mathcal{A}$, on ait $d(f(z), f(w)) < \varepsilon$ . On dit que $\mathcal{A}$ est *normale* si toute suite dans $\mathcal{A}$ admet une sous suite qui converge uniformément sur tout compact (par rapport à la métrique sphérique). D'après le théorème d'Ascoli, les deux conditions sont équivalentes, c'est-à-dire $\mathcal{A}$ est normale ssi $\mathcal{A}$ est équicontinue sur tout compact.

**Théorème de Montel**. Supposons que les fonctions dans la famille $\mathcal{A}$ sont holomorphes. S'il existe trois points distincts $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ tels que $\bigcup_{f\in\mathcal{A}} f(U) \subset \overline{\mathbb{C}} - \{a, b, c\}$, alors $\mathcal{A}$ est normale. Plus généralement s'il existe trois fonctions holomorphes $a : U \to \overline{\mathbb{C}}$, $b : U \to \overline{\mathbb{C}}$ et $c : U \to \overline{\mathbb{C}}$ telles que pour toute $f \in \mathcal{A}$ et tout $z \in U$, les quatres points $f(z), a(z), b(z), c(z)$ sont deux-à-deux distincts, alors $\mathcal{A}$ est normale.

Notons que dans le cas holomorphe toute fonction limite de $\mathcal{A}$ est aussi holomorphe.

**d. Théorème de Rouché**. Soit $\overline{D}$ un domaine de Jordan dans $U$. Supposons $f_n : U \to \overline{\mathbb{C}}$ holomorphes convergeant uniformément sur compact vers $h$. Si $h \neq 0$ sur $\partial D$, alors à partir d'un certain $n$, $f_n$ a autant de zéros dans $D$ que $h$. (ce théorème sert souvant à montrer l'existence de zéros d'une fonction).

**e.** Une fonction holomorphe $f$ est injective dans un voisinage de $a$ ssi $f'(a) \neq 0$. Si $f'(a) = 0$, et $f(z) = b + c_k(z-a)^k + O(|z-a|^{k+1})$ avec $c_k \neq 0$, il existe un changement de variable holomorphe $\phi$ tel que $f(z) - b = \phi(z)^k$. Ainsi, pour tout point $b' \neq b$ proche de $b$, $f^{-1}(b')$ a exactement $k$ points distincts proches de $a$. De plus, on peut décomposer un voisinage de $a$ en $k$ secteurs tels que $f$ soit injective dans chaque secteur, et $f$ envoie l'adhérence de chaque secteur sur un voisinage de $b$.

**f.** Le groupe des transformations de Möbius conforme $PSL(2, \mathbb{C})$ est transitif sur les triplets de points de $\overline{\mathbb{C}}$. Deux fractions rationnelles conjuguées par un élément de $PSL(2, \mathbb{C})$ ont essentiellement la même dynamique.

**g.** Une fonction holomorphe non constante de $\overline{\mathbb{C}}$ sur $\overline{\mathbb{C}}$ est une fraction rationnelle.

# 2 Ensemble de Fatou et Julia

**a. Définition**. Soit $f(z) = P(z)/Q(z)$ une fraction rationnelle, $(P, Q) = 1$, de degré $d \geq 2$ (où $deg(f) = \max(deg(P), deg(G))$. L'ensemble de Fatou $\mathcal{F}$ est défini comme l'ensemble des $z \in \overline{\mathbb{C}}$ desquels il existe un voisinage $U$ tel que $\{f^n|_U\}$ forme une famille équicontinue (ou normale, les deux définitions sont équivalentes), et l'ensemble de Julia $J = \overline{\mathbb{C}} - \mathcal{F}$ par définition. Intuitivement, si $z \in \mathcal{F}$, alors l'orbite de $z$ (formée par les itérées) et l'orbite d'un point $w$ restent $\varepsilon$-proches dès que $z, w$ soient $\delta$-proches.

**Lemme 2.1** *$\mathcal{F}$ est ouvert et $J$ est fermé. On a $J \neq \emptyset$. Soit $int(J) = \emptyset$ soit $J = \overline{\mathbb{C}}$. Et $f(\mathcal{F}) = f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ et $f(J) = f^{-1}(J) = J$. Pour tout $N$, $\mathcal{F}(f^N) = \mathcal{F}(f)$. Pour $U$ une composante connexe de $\mathcal{F}$, la famille $\{f^n|_U, n \in \mathbb{N}\}$ est normale. Pour tout $\phi \in PSL(2, \mathbb{C})$ et $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$, on a $\mathcal{F}(g) = \phi(\mathcal{F}(f))$.*

**Preuve**. La famille finie $\{f, f^2, \cdots, f^N\}$ est équi-uniformément continue.

Supposons $\mathcal{F} = \overline{\mathbb{C}}$. Il existe une sous suite $f^{n_k}$ qui converge uniformément sur $\overline{\mathbb{C}}$ vers $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ holomorphe. Si $h$ est constante, pour $n$ grand, $diam(f^{n_k}(\overline{\mathbb{C}}))$ devraît être petit. Ce qui est impossible car $f^{n_k}$ est surjective. Si $h$ n'est pas constante, elle est une fraction rationnelle et $h^{-1}(0)$ est fini non nul. Par le théorème de Rouché, lorsque $k$ est grand, $\#(f^{n_k})^{-1}(0) = \#h^{-1}(0)$. Ce qui est impossible car $\#(f^{n_k})^{-1}(0) = \deg(f^{n_k}) \to \infty$ (ici, on compte les zéros avec multiplicité).

Soit $U \subset int(J)$ ouvert. Par le théorème de Montel, $\bigcup_{n\geq 0} f^n(U)$ recouvre $\overline{\mathbb{C}}$ sauf éventuellement deux points. Donc $\overline{\mathbb{C}} = \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^n(U)} \subset J$. ∎

**Exemple**. $f(z) = z^d$ et $f(z) = 1/z^d$.

**b. Points périodiques, critiques et exceptionnels**.

Un point $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ est *périodique* de période $p \geq 1$ si $f^p(z_0) = z_0$ et si $p$ est minimal pour cette propriété. Localement $f^p(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + O(|z - z_0|^2)$. La valeur $\lambda$ est appelé le *multiplicateur* de l'orbite de $z_0$. Notons que $\lambda = f'(z_0)f'(f(z_0)) \cdots f'(f^{p-1}(z_0))$ si $f^l(z_0) \neq \infty$, $l = 0, \cdots, p-1$. La valeur $\lambda$ ne dépend que de l'orbite de $z_0$. Posons $Z = \{z_0, f(z_0), \cdots, f^{p-1}(z_0)\}$. On dit que

$$Z \text{ est } \begin{cases} \text{répulsif} \\ \text{attractif} \\ \text{superattractif} \\ \text{parabolique} \\ \text{indifférent irrationnel} \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} |\lambda| > 1 \\ 0 < |\lambda| < 1 \\ \lambda = 0 \\ \lambda = e^{2i\pi p/q}, \ p, q \in \mathbb{Z} \\ \lambda = e^{2i\pi\theta}, \ \theta \text{ irrationnel} . \end{cases}$$

**Remarque**. Si $\phi \in PSL(2, \mathbb{C})$ conjugue $f$ à $g$, alors $\phi(z_0)$ est aussi périodique pour $g$, de la même période $p$ et du même multiplicateur $\lambda$.

**Lemme 2.2** *Les points périodiques répulsifs et paraboliques sont dans $J$ et les points (super)attractifs sont dans $\mathcal{F}$.*

**Preuve**. Soit $z_0$ un point périodique. Quitte à itérer et conjuguer, on peut supposer $z_0 = 0$ et $p = 1$. Ainsi $f(z) = \lambda z + O(|z|^2)$. Si $|\lambda| < 1$ (resp. $> 1$), il existe $c$ avec $|\lambda| < c < 1$ (resp. $1 < c < |\lambda|$), $r > 0$, tels que $|f(z)| < c|z|$ (resp. $> c|z|$) pour $|z| < r$. Donc $\{f^n|_{\{|z|<r\}}\}$ est (resp. n'est pas) équicontinue. Si $\lambda = e^{2i\pi p/q}$, quitte à itérer ($q$ fois), on peut supposer $\lambda = 1$. Ainsi, $f(z) = z + a_m z^m + O(|z|^{m+1})$, $m \geq 2$, $a_m \neq 0$. Donc $f^k(z) = z + k a_m z^m + O(|z|^{m+1})$. Si une sous suite $f^{n_k}$ admet une fonction limite holomorphe $h$, alors $h^{(m)}(0) = \lim_{k\to\infty}(f^{n_k})^{(m)}(0) = \infty$. Ce qui est impossible. Donc $\{f^n\}$ est pas équicontinue au voisinage de 0. (Intuitivement, $f$ dilate les directions $\{z | a_m z^{m-1} \in \mathbb{R}_+\}$ et contracte les directions $\{z | a_m z^{m-1} \in \mathbb{R}_-\}$). ∎

**Définition**. On dit que $a \in \overline{\mathbb{C}}$ est un point *critique* de multiplicité $m(a) = k - 1$ si dans des cartes locales $f(z) = c_0 + c_k(z - a)^k + O(|z - a|^{k+1})$, $c_k \neq 0$, $k \geq 2$ au voisinage de $a$. L'entier $m(a)$ est invariant par conjugaison par élément de $PSL(2, \mathbb{C})$.

**Lemme 2.3** *Soit $d$ le degré de $f$. a) Pour $a$ un point critique, $m(a) \leq d - 1$.*

*b) $f$ a exactement $2d - 2$ points critiques (compté avec multiplicité).*

*c) Un polynôme a $d - 1$ points critiques finis.*

**Preuve**. a) $f^{-1}(f(a))$ contient exactement $d$ points, compté avec multiplicité. b) On verra une preuve topologique de ce fait plus tard (corollaire 3.4). c) $m(\infty) = d-1$. ■

**Corollaire 2.4** (et définition) *L'ensemble* exceptionnel

$$E = \bigcup \{E' \subset \overline{\mathbb{C}} \mid \#E' < \infty,\ f^{-1}(E') \subset E'\ \}$$

*contient au plus deux points. Si* $\#E = 2$*,* $f$ *est conjuguée à* $z^d$ *ou* $z^{-d}$*. Si* $\#E \geq 1$*,* $f$ *est conjuguée à un polynôme. Dans tous les cas* $E \subset \mathcal{F}$*.*

**Preuve**. L'application $f^{-1} : E' \to E'$ est multivaleur et $f^{-1}(x) \cap f^{-1}(y) = \emptyset$ si $x \neq y$. Comme $E'$ est fini, $f^{-1} : E' \to E'$ est en fait une bijection. Soient $x, y \in E'$ tels que $x = f^{-1}(y)$. Alors $x$ est un point critique de multiplicité $m(x) = d-1$. Comme $\sum_{x \in E'} m(x) \leq 2d-2$, on a $\#E' \leq 2$. Par conséquent $\#E \leq 2$. Si $E \neq \emptyset$, quitte à conjuguer, on a $\{\infty\} \subset E \subset \{0, \infty\}$. D'où le résultat. ■

**Corollaire 2.5** *a) Pour tout* $U$ *ouvert,* $U \cap J \neq \emptyset$*,* $U \cap E = \emptyset$*, on a* $\bigcup_{n\geq 0} f^n(U) = \overline{\mathbb{C}} - E$*.*
*b) Tout compact* $Q$ *avec* $f^{-1}(Q) \subset Q$*,* $\#Q \geq 3$ *contient* $J$*.*
*c) Pour tout* $z \in J$*, l'ensemble* $Q = acc(\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(\{z\}))$ *est* $J$*.*
*d) L'ensemble de Julia est parfait.*

**Preuve**. a) Par le théorème de Montel, l'ensemble $E_U = \overline{\mathbb{C}} - \bigcup_{n\geq 0} f^n(U)$ contient au plus deux points. De plus $f^{-1}(E_U) \subset E_U$. Donc $E_U \subset E$. On a aussi $E_U \supset E$ car $U \cap E = \emptyset$.

b) On a $f(\overline{\mathbb{C}} - Q) \subset f(\overline{\mathbb{C}} - f^{-1}(Q)) = \overline{\mathbb{C}} - Q$. Donc $\overline{\mathbb{C}} - Q \subset \mathcal{F}$. Ainsi $Q \supset J$.

c) On applique b) à $Q_N = \overline{\bigcup_{k\geq N}(f^{-k}(z) - \bigcup_{0\leq i<k} f^{-i}(z))}$ pour conclure que $Q_N = J$. On remarque ensuite que $Q = \bigcap_N Q_N$.

d). Par c), tout point $z \in J$ est aussi un point d'accumulation de ses préimages distinctes. ■

**Lemme 2.6** $\#\{$*cycles périodiques non répulsifs*$\} \leq C(d) < \infty$*, où* $C(d)$ *est une constante ne dépendant que le degré* $d$*.*

(On va montrer ce lemme plus tard.)

Voici le premier résultat fondamental de la théorie (due à Fatou et Julia):

**Théorème 2.7** $J$ *coincide avec l'adhérence des points périodiques répulsifs.*

**Preuve**. Il suffit de montrer que $J$ est inclus dans l'adhérence des points périodiques, i.e. les points périodiques sont dense dans $J$, combinant les résultats du lemme précédent, le corollaire 2.5.b) et le lemme 2.2.

Soit $a \in J$ un point non fixe, non valeur critique. Il existe $b, c \in f^{-1}(a)$ tels que $a, b, c$ soient 2-à-2 distincts. Prenons $U$ un voisinage de $a$ pour que les deux inverses $\phi_b, \phi_c$ de $f$ soient bien définies dans $U$, avec $\phi_b(a) = b, \phi_c(a) = c$. Si pour tout $n$, aucune des trois équations $f^n(z) = \phi_b(z)$, $f^n(z) = \phi_c(z)$, $f^n(z) = z$ n'a solution dans $U$. Par le théorème de Montel, $\{f^n|_U\}$ est normale. Cece contredit $a \in J$. Il existe donc des solutions d'équations. Une telle solution est périodique de période divisant $n$ ou $n+1$. ■

# 3 Dynamique sur les composantes connexes de $\mathcal{F}$

## 3.1 formule de Riemann-Hurwitz

**Définition**. Soient $U, V$ deux ouverts connexes de $\overline{\mathbb{C}}$. On dit que $R : U \to V$ est un *revêtement ramifié* si pour tout $v \in V$, il existe un voisinage connexe $D(v)$ (appelé *voisinage élémentaire*) tel que $R^{-1}(D(v))$ soit une réunion non vide d'ouverts connexes disjoints $B(u_1), \cdots, B(u_k), \cdots$, et qu'il existe des homéomorphismes préservant l'orientation $\phi_j : B(u_j) \to D$, $u_j \mapsto 0$, $j = 1, \cdots$, et $\psi : D(v) \to D$, $v \mapsto 0$ vérifiant $\psi \circ f \circ \phi_j^{-1}(z) = z^{d_j}$, $d_j \geq 1$. Soit $K', K$ deux compacts connexes de $\overline{\mathbb{C}}$. Une application $R$ définie dans un voisinage de $K'$ est un revêtement ramifié s'il existe des voisinages ouverts connexes $U \supset K'$ et $V \supset K$ tels que $R : U \to V$ soit un revêtement ramifié , et que $R^{-1}K = K'$.

Si $d_j > 1$ pour un certain $j$, on dit que $u_j$ est un point *critique* de $R$, de multiplicité $m(u_j) = d_j - 1$. Notons que les points critiques sont isolés.

**Lemme 3.1** *a) Il existe $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (appelé le degré de $R$) tel que pour tout $v \in V$, $\#R^{-1}(v) = d$ (compté avec multiplicité). En particulier $R$ est surjectif. b) Pour tout $V' \subset V$ ouvert connexe, et toute $U'$ composante connexe de $R^{-1}(V)$, l'application $R : U' \to V'$ est un revêtement ramifié . c) Dans le cas $d < \infty$, pour tout $K \subset V$ connexe compact, et toute $K'$ composante connexe de $R^{-1}K$, on a $R(K') = K$.*

**Preuve**. a) Le nombre $\#R^{-1}(v')$ est égale à $\sum d_j$ pour tout $v' \in D(v)$. C'est donc un entier localement constant. Comme $U$ est connexe, il est constant sur $U$. b) Pour tout $v \in V'$, on peut choisir un voisinage élémentaire $D(v)$ tel que $D(v) \subset V'$. Pour toute composante $B(u_i)$ de $R^{-1}(D(v))$, on a soit $B(u_i) \cap U' = \emptyset$ soit $B(u_i) \subset U'$. Sinon $B(u_i) \cup U'$ serait connexe et $B(u_i) \cup U' \subset R^{-1}V'$, en contradiction avec le fait que $U'$ est une composante connexe de $R^{-1}(V)$. Reste à montrer que $d_v = \#(R^{-1}v \cap U') \neq 0$ pour tout $v \in V'$. $d_v$ est localement constante et est non nul pour au moins un $v_0 \in V'$, donc est une constante non-nulle sur tout $V'$. c) Il existe une suite décroissante d'ouverts connexes $V_n$ telle que $\bigcap_n V_n = K$. La suite $R^{-1}V_n$ est aussi décroissante. La suite des nombres $k_n$ des composantes connexes de $R^{-1}V_n$ est croissante, bornée par $d < \infty$, donc est éventuellement stationnaire, c'est-à-dire $k_n = k$ pour $n > N$. Comme l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts connexes est soit vide soit connexe, et dans notre cas non vide, $R^{-1}K$ a exactement $k$ composantes connexes $K'_1, \cdots, K'_k$ et $R(K'_i) = K$ pour tout $i$. ■

**Proposition 3.2** *a) Une fraction rationnelle* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *est un revêtement ramifié de degré* $deg(f)$*. Les deux notions de points critiques coincident. b) Soient* $L$ *une composante connexe de Fatou (resp. de Julia). Alors* $f(L)$*, ainsi que les composantes connexes de* $f^{-1}(L)$ *sont des composantes connexes de Fatou (resp. Julia). De plus,* $f : L \to f(L)$ *est un revêtement ramifié de degré fini.*

On montre d'abord un critère de revêtement ramifié de degré fini:

**Lemme 3.3** *Soient* $U, V$ *ouverts connexes de* $\overline{\mathbb{C}}$*,* $g : \overline{U} \to \overline{\mathbb{C}}$ *continue, holomorphe dans* $U$ *et* $g(U) \subset V$*. Alors* $g : U \to V$ *est un revêtement ramifié de degré fini ssi* $g$ *est propre, c'est-à-dire* $g(\partial U) \subset \partial V$*. Dans ce cas* $g(U) = V$ *et* $g(\partial U) = \partial V$*. De plus, si* $G$ *est une extension holomorphe de* $g$*,* $U$ *est une composante connexe de* $G^{-1}(V)$*.*

**Preuve**. Nécessité. On a $g(\partial U) \subset \overline{V}$ mais $g(\partial U) \cap V = \emptyset$ (car $g^{-1}(D(v))$ ne rencontre pas $\partial U$ pour un voisinage élémentaire de $v \in V$).

Suffisance. Notre application $g$ est *propre*, donc $g^{-1}$(compact de $V$) est un compact de $U$. Pour $v \in V$, $g^{-1}(v)$ est discret et compact dans $U$, donc fini. On peut trouver un voisinage élémentaire pour $v$ (grâce au fait que $g|_U$ est holomorphe).

On a $g(U) = V$ par le lemme précédent. Donc $g(\overline{U}) = \overline{V}$. Comme $g(U) \cap \partial V = \emptyset$, on a $\partial V \subset g(\partial U)$. ■

**Preuve de la proposition 3.2** . On a $f(U) \subset V$ car $f(U) \subset \mathcal{F}$ et $f(U)$ est connexe, ainsi que $f(\partial U) \subset \partial V$ car $\partial U \subset J$. On peut donc appliquer le lemme ci-dessus. ■

**Formule de Riemann-Hurwitz**. Soit $R : U \to V$ un revêtement ramifié de degré $d$ avec $U, V$ ouverts connexes de $\overline{\mathbb{C}}$. Supposons que $\overline{\mathbb{C}} - U$ et $\overline{\mathbb{C}} - V$ ont un nombre $q_U$, $q_V$ de composantes connexes , avec $0 \le q_U < \infty$, $0 \le q_V < \infty$. Alors

$$2 - q_U = d \cdot (2 - q_V) - \#\{ \text{ points critiques de } R : U \to V\}$$

où le nombre des points critiques est compté avec multiplicité. Rappelons que $2 - q_V$ est le caractéristique d'Euler de $V$. Cette formule se démontre facilement avec une triangulation de $V$.

**Corollaire 3.4** *Soit* $R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *un revêtement ramifié de degré* $d$*. a) Il a exactement* $2d - 2$ *points critiques, compté avec multiplicité. b) Pour* $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ *ouvert connexe (resp. compact connexe), et* $U_1, \cdots, U_k$ *les composantes connexes de* $R^{-1}(V)$*, on a* $\sum_i \deg(R : U_i \to V) = d$*. c) Notons*

$$I = \bigcup \{I' \mid I' \text{ est une union finie de composantes connexes de } \mathcal{F} \text{ telle que } R^{-1}I' \subset I'\} \ .$$

*Alors* $I$ *contient au plus deux composantes connexes et* $R(I) = R^{-1}(I) = I$*. d)* $\mathcal{F}$ *a zero, une, deux ou une infinité dénombrable de composantes connexes .*

**Preuve**. a) Appliquer la formule de Riemann-Hurwitz au cas $U = V = \overline{\mathbb{C}}$, ainsi $q_u = q_v = 0$.

b) Le degré total doit être $d$.

c) Il existe $k$ tel que $R^k$ fixe chaque composante de $I'$. Si $I'$ a au moins deux composantes connexes , chacune doit être simplement connexe (principe de maximum). On revient à $R$ et conclut en combinant la formule de Riemann-Hurwitz et la methode de preuve du corollaire 2.4.

d) S'il y a au moins trois composantes connexes dans $\mathcal{F}$, au moin une n'est pas dans $I$. Le nombre des préimages successives de celle-là est infini. ∎

## 3.2 Composante de Fatou périodique simplement connexe

Soit $U$ une composante de Fatou périodique de période $p$. Par la formule de Riemann-Hurwitz pour $f^p : U \to U$, on conclut que $U$ est soit simplement connexe, soit doublement connexe ($q_U = 2$), soit infiniment connexe. Dans le cas où $q_U = 1$, soit $\psi : U \to D$ une représentation conforme, alors $\psi \circ f^p \circ \psi^{-1}$ est une application holomorphe propre du disque unité à lui même. Elle se prolonge donc en un produit de Blaschke

$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^{d} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z} \ , \quad |a_j| < 1 \ , |\lambda| = 1 \ .$$

Les $a_j$ ne sont pas forcément distincts. Si $d > 1$, on a $J_B = S^1$.

## 3.3 Composante de Fatou périodique attractif et superattractif

Supposons que $U$ est une composante connexe de $\mathcal{F}$ contenant un point point périodique (super)attractif $a$ de période $p$, et $\lambda = (f^p)'(a)$.

**Lemme 3.5** *Il existe des voisinages $U_0$ de $a$ vérifiant $f^p(\overline{U}_0) \subset U_0$. Pour tout $U_0$ un tel voisinage, et $U_n$ la composante connexe de $f^{-p}(U_{n-1})$ contenant $a$, construite par récurrence sur $n$, on a $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ et $U = \bigcup_{n \geq 0} U_n$.*

**Preuve**. Pour simplifier, on suppose $a = 0$, $p = 1$. Il existe $c$, $|f'(0)| < c < 1$, tel que $|f(z)| < c|z|$ pour $z \in \{|z| < r\}$ avec un $r$ petit. On peut prendre $U_0 = \{|z| < r\}$ par exemple. Supposons par récurrence $\overline{U}_{n-1} \subset U_n$. On a $f(\overline{U}_n) = \overline{U}_{n-1} \subset U_n$, et $\overline{U}_n$ connexe. Donc $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ car $U_{n+1}$ est la composante connexe de $f^{-1}(U_n)$ contenant 0. Notons $V_n = f^{-1}U_n$. Alors $V_n$ est une famille d'ouverts croissantes et le nombre $k_n$ de composantes connexes de $V_n$ décroît. Il existe donc $N$ tel que $k_n = k$ pour tout $n > N$. Par conséquent $\bigcup_n V_n = f^{-1} \bigcup_n U_n$ a $k$ composantes connexes dont l'une est $\bigcup_n U_n$. Ainsi $f : \bigcup_n U_n \to \bigcup_n U_n$ est propre. Donc la famille $\{f^n\}$ n'est pas équicontinue au voisinage d'un point $b \in \partial \bigcup_n U_n$, on a $\partial \bigcup_{n \geq 0} U_n \subset J$. ∎

**Lemme 3.6** *Il existe un voisinage $U_0$ de $a$, une fonction holomorphe injective $\phi : U_0 \to \mathbb{C}$, avec $\phi(a) = 0$ tels que*

*1) cas $\lambda \neq 0$ : $\lambda\phi(z) = \phi \circ f^p(z)$. De plus $\phi$ se prolonge en une fonction holomorphe définie sur $U$, d'image $\mathbb{C}$, vérifiant $\lambda\phi(z) = \phi \circ f^p(z)$. La fonction $\phi$ est unique à multiplication d'une constante complexe près.*

*2) Cas $f^p(z) - a = c_k(z-a)^k + O(|z-a|^{k+1})$, $k \geq 2$, $c_k \neq 0$ : $\phi(z)^k = \phi \circ f^p(z)$. De plus $\phi$ se prolonge en une fonction holomorphe injective définie sur $U_N$, d'image dans le disque unité, vérifiant $\phi(z)^k = \phi \circ f^p(z)$, ou $U_N$ est construit comme dans lemme 3.5, et $N \leq \infty$ est l'entier maximal pour que $U_N - \{a\}$ ne contienne pas de point critique de $f^p$. La fonction $\phi$ est unique à multiplication d'une racine $(k-1)$-ième d'unité près.*

**Preuve**. Pour simplifier, on suppose $a = 0$, $p = 1$.

1) Cas $\lambda \neq 0$. Notons $f(z) = \lambda z(1 + g(z))$. Il existe $M, r > 0$, $0 < c < 1$ tels que sur $\overline{D}(0,r)$, $f$ est injective, $|f(z)| \leq c|z| < |z|$ et $|g(z)| \leq M|z|$. Posons $\phi_n(z) = f^n(z)/\lambda^n$, $z \in D(0,r)$. On a $\phi_n$ injective, $\phi_n(0) = 0$, $\phi_n'(0) = 1$ et

$$\phi_{n+1}(z) = \frac{f(f^n(z))}{\lambda^{n+1}} = \frac{\lambda f^n(z)(1 + g(f^n(z)))}{\lambda^{n+1}} = z \prod_{m=0}^{n} (1 + g(f^m(z))) \ .$$

Comme $|g(f^m(z))| \leq M|f^m(z)| \leq Mc^m r$, la série $\sum_m |g(f^m(z))|$ converge normalement en $D(0,r)$. Ainsi, d'après un théorème classique (voir [Ru], section "Infinite product"), $\phi_n(z)$ converge uniformément vers une fonction holomorphe injective $\phi(z)$, avec $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$, et $\lambda\phi(z) = \phi \circ f(z)$.

Quant au prolongement, posons $U_0 = D(0,r)$. Pour $z \in U_n$ défini comme dans le lemme précédent, posons $\phi(z) = \phi(f^n(z))/\lambda^n$. Puisque $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, on a $\phi(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}\phi(U_0) = \mathbb{C}$.

Unicité. Il est clair que $w\phi(z)$ vérifie le lemme pour tout $w \in \mathbb{C}^*$. Soient $\phi, \psi$ deux solutions locales du lemme. Alors $\phi \circ \psi^{-1}$ est holomorphe injective au voisinage de 0 commutant avec $z \mapsto \lambda z$. En comparant les coefficients de la série entière de $\phi \circ \psi^{-1}(\lambda z)$ et de celle de $\lambda\phi \circ \psi^{-1}(z)$ , on conclut que $\phi \circ \psi^{-1}(z) = cte \cdot z$.

2) Cas $\lambda = 0$. Quitte à conjuguer, on peut supposer $f(z)/z^k \to 1$ $(z \to 0)$. Ainsi localement $f(z) = z^k + O(|z|^{k+1}) = z^k(1 + h(z))^k$, avec $h(z)$ holomorphe et $h(0) = 0$. Quitte à rétrécir, on peut supposer qu'en $D(0,r)$, $|h(z)| < 1/2$ et $|f(z)| \leq |z|/2$. Posons $\phi_n(z) = (f^n(z))^{1/k^n}$ formellement. On a

$$\phi_{n+1}(z) = ((f(f^n(z)))^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{k^n}} = (f^n(z))^{\frac{1}{k^n}}(1 + h(f^n(z)))^{\frac{1}{k^n}} = z \prod_{m=0}^{n} (1 + h(f^m(z)))^{\frac{1}{k^m}}$$

$$= z \prod_{m=0}^{n} \left(1 + \left((1 + h(f^m(z)))^{\frac{1}{k^m}} - 1\right)\right) \ .$$

En prenant la racine principale de $(1+h(z))^{1/k^m}$ pour tout $m$ et tout $z \in D(0,r)$, on définit de manière unique $\phi_n$ sur $D(0,r)$. Elles sont holomorphes, avec $\phi_n(0) = 0$, $\phi_n'(0) = 1$.

Puisque $|\xi| = |h(f^m(z))| < 1/2$ sur $D(0,r)$, on a $|(1+\xi)^{1/k^m} - 1| \leq 1/k^m$. Ainsi $\phi_n(z)$ converge uniformément vers une fonction holomorphe $\phi(z)$, avec $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$ et $\phi(z)^k = \phi(f(z))$. De plus, $\phi$ est injective dans un voisinage simplement connexe $U_0 \subset D(0,r)$. Quitte à restreindre $U_0$, on peut supposer $\phi(U_0) = D(0,s)$ pour un certain $s$ petit.

Prolongement de $\phi$ dans $U_N$. Soit $n \leq N$. Par la formule de Riemann-Hurwitz, $f : U_n - \{0\} \to U_{n-1} - \{0\}$ est un revêtement non ramifié, de degré $k$. On peut donc relever $\phi : U_{n-1} - \{0\} \to D(0, s^{1/k^{n-1}})$ à $\phi_n : U_n - \{0\} \to D(0, s^{1/k^n})$. Ce relèvement est unique si l'on demande que $\phi_n | U_{n-1}$ coincide avec $\phi$. Nous obtenons ainsi une extension de $\phi$. On conclut par récurrence sur $n$.

Unicité. On ne suppose plus $c_k = 1$. Une solution $\phi$ du lemme vérifie $\phi'(0)^{k-1} = c_k$. Soit $b$ tel que $b^{k-1} = 1$, alors $b\phi(z)$ convient aussi au lemme. Soient $\phi, \psi$ deux solutions locales du lemme. Alors $\phi \circ \psi^{-1}$ est holomorphe injective au voisinage de 0 commutant avec $z \mapsto z^k$. Soit $\phi \circ \psi^{-1}(z) = \sum_{n-1}^{\infty} b_n z^n$. Alors $b_1^{k-1} = 1$. Soit $l \geq 2$ l'entier minimal tel que $b_l \neq 0$. En comparant les deux premiers coefficients de $\phi \circ \psi^{-1}(z^k)$ et $(\phi \circ \psi^{-1}(z))^k$, on conclut que $b_l = 0$, une contradiction. Ainsi $\phi \circ \psi^{-1}(z) = b_1 z$. ∎

**Corollaire 3.7** *(Fatou) Une orbite de composante périodique (super)attractives de $\mathcal{F}$ contient au moins un point critique de $f$. Une telle composante est soit simplement connexe soit infiniement connexe.*

**Preuve**. Suppososns d'abord que $U$ est une composante fixe avec $0 \in U$ comme point fixe (super)attractif. Supposons par absurde que $U$ ne contient pas de point critique de $f$. En particulier $f'(0) \neq 0$ et et on peut appliquer le lemme 3.6 cas 1). On voit par construction que $\phi : U \to \mathbb{C}$ est un revêtement ramifié (pour tout $v \in \mathbb{C}$, il existe un voisinage $D(v)$ tel que $\phi^{-1}(D(v)) \subset U_n$ pour un certain $n$ et $\phi : U_n \to \phi(U_n)$ est un revêtement ramifié ), et $\phi'(z) = 0$ ssi il existe $k \geq 0$, et $f'(f^k(z)) = 0$. Par notre hypothèse $\phi : U \to \mathbb{C}$ est un revêtement non ramifié, de degré 1 (formule de Riemann-Hurwitz). Donc $\phi^{-1} : \mathbb{C} \to U$ est une fonction holomorphe. C'est une contradiction avec le petit théorème de Picard, car $\partial U$ contient au moins trois points.

Si $U$ n'est pas infiniement connexe, de nouveau par la formule de Riemann-Hurwitz, on a $2 - q_U = (2 - q_U)\deg(f : U \to U) - C$ avec $C > 0$. Par conséquent $2 - q_U > 0$ et $q_U = 1$ $(U \neq \overline{\mathbb{C}})$.

Soit maintenant $p > 1$ la période de $U$. Alors $U$ contient un point $c$ tel que $(f^p)'(c) = 0$. Ainsi $f'(c)f'(f(c)) \cdots f'(f^{p-1}(c)) = 0$. Il existe $j$ tel que $f'(f^j(c)) = 0$, et $f^j(c) \in f^j(U)$. ∎

## 3.4 Composante de Fatou périodique parabolique

On peut avoir $f^{pn}(U) \to a \in \partial U$ uniformément sur tout compact. On dit que $U$ est un *bassin d'attraction* de $a$. Pour cela, on doit d'abord étudier la dynamique au voisinage d'un point fixe parabolique. Les $P_i$ (resp. $Q_i$) dans la proposition suivante sont appelés pétales *attractifs* (resp. *répulsifs*) de $f$.

**Proposition 3.8** *Supposons que dans un voisinage $W$ de 0, $f(z) = z(1+a_k z^k)+O(|z|^{k+2})$ et $g(z) = f^{-1}(z)$ sont holomorphes avec $a_k \neq 0$, $k \geq 1$, et soit bien définie sur $W$. Alors il existe $k$ domaines de Jordan fermés $P_1, \cdots, P_k$ (resp. $Q_1, \cdots, Q_k$) vérifiant $P_i \cap P_j = \{0\}$ (resp. $Q_i \cap Q_j = \{0\}$) $i \neq j$, tels que pour tout $i$, on ait $f(P_i) \subset int(P_i) \cup \{0\}$ (resp. $g(Q_i) \subset int(Q_i) \cup \{0\}$), et que $\{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{k}(P_i \cup Q_i)$ forme un voisinage de 0. Dans le cas où $f$ s'étend en une fraction rationnelle , notons $V_{n,i}$ la composante connexe de $f^{-n}(int(P_i))$ contenant $int(P_i)$ et $U_i$ la composante connexe de $\mathcal{F}(f)$ contenant $int(P_i)$. Alors $U_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{n,i}$. En particulier, $U_i \cap U_j = \emptyset$, $i \neq j$.*

**Preuve**. Pour se fixer les idées, on ne traite que le cas simple $f(z) = z + z^{k+1}$. Faisons deux changements de variable $Z(z) = 1/z$, $F(Z) = 1/f(1/Z)$ et $w = -Z^k/k = -1/(kz^k)$, $G(w) = -F(Z)^k/k = -1/(kf(z)^k)$. Ainsi

$$G(w) = \frac{w}{(1-\frac{1}{kw})^k} = w + 1 + O(\frac{1}{|w|}) .$$

Pour $P' = \{w, Re(w) \geq C_0\}$ ou bien $P' = \{w = x+iy, y^2 \geq -x + C_1\}$ avec $C_0, C_1 > 0$ grands, on a $G(P') \subset int(P')$. De manière symmétrique, pour $Q' = -P'$, on a $G^{-1}(Q') \subset int(Q')$. Notons que $P' \cup Q'$ contient le complémentaire d'un grand disque. Le pétale $P'$ se relève en $k$ pétales dans le plan des $z$. En rajoutant 0 à chaque pétale, on obtient les compacts $P_i$. De plus, $f(P_i) \subset int(P_j) \cup \{0\}$, pour un certain $j$. Mais comme $f$ est proche de l'identité, et $P_i$ a un angle non nul vers 0, on a $j = i$. De même on relève $Q'$ pour obtenir les $Q_i$. On voit aussi que les $Q_i$ sont interposés avec les $P_i$, et que la réunion des $2k$ pétales forme un voisinage de 0. Notons le $V$ pour la suite.

Lorsque $f$ est une fraction rationnelle , le fait que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_{n,i} = U_i$ se montre comme dans le cas attractif (lemme 3.5). Ainsi pour tout $z \in U_i$, il existe $N$ tel que $f^n(z) \in P_i$ pour tout $n > N$. Soient $i \neq j$. Comme $P_i \cap P_j = \emptyset$, on a $U_i \cap U_j = \emptyset$. ∎

**Lemme 3.9** *Pour tout $i$, il existe $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}$, revêtement ramifié holomorphe de degré infini, injective sur $int(P_i)$, telle que $\phi_i(z) + 1 = \phi_i(f(z))$ (coordonnée de Fatou). Les points critiques de $\phi_i$ sont les points précritiques de $f$. En particulier $f$ a au moins un point critique dans $U_i$. L'application $\phi_i$ est unique à l'addition d'une constante complexe près.*

**Preuve**. On se place dans la coordonnée $w$ de la preuve précédente. Pour $w \in int(P')$ posons $\Phi_n(w) = G^n(w) - n - b\log n$, où $b$ est la constante telle que $G(w) = w + 1 + b/w + O(1/|w|^2)$. Reste à établir la convergence uniforme des $\Phi_n$ (voir [CG] p.36 pour les détails).

La fonction limite se relève en $\phi_i$ définie dans $int(P_i)$, qui s'étend ensuite sur tout $U_i$ par l'équation $\phi_i(z) = \phi_i(f^n(z)) - n$. On vérifie facilement que $\phi_i(U_i) = \mathbb{C}$. Comme $\partial U_i$ contient au moins trois points, $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}$ ne peut pas être un homéomorphisme. Elle doit être donc un revêtement ramifié de degré infini (par la formule de Riemann-Hurwitz et le fait que $\overline{\mathbb{C}} - \mathbb{C}$ est un point). Il est claire que les points critiques de $\phi_i$ doivent être les points $z$ tels que $f^k(z)$ soit un point critique de $f$, pour un certain $k \geq 0$. Par conséquent, $U_i$ contient au moins un point critique de $f$.

Unicité. Il est clair que $\phi_i(z) + cte$ convient aussi au lemme. Soit $\Phi'$ une autre solution dans la coordonnée des $w$. Alors dans un demi-plan à droite $\Phi''(w) = \Phi' \circ \Phi^{-1}(w)$ est injective et commute avec $w \mapsto w+1$ . Ainsi $\Phi''(w) - w$ s'étend sur $\mathbb{C}$ en une fonction holomorphe périodique injective, donc affine, donc constante. ■

Cas $f(z) = e^{2i\pi p/q} z + \cdots$, on a $f^q(z) = z + \cdots$. On trouve donc des pétales invariants par $f^q$. Comme $f$ est proche de $e^{2i\pi p/q} z$, $f$ fait une permutation des pétales avec un nombre de rotation $p/q$.

## 3.5 Domaine de rotation

**Définition**. Une composante connexe périodique de période $p$ de $\mathcal{F}$ est un *disque de Siegel* (resp. *anneau d'Herman*) si $f^p : U \to U$ est conformément conjuguée à une rotation irrationnelle sur un disque (resp. un anneau).

Voici quelques résultats d'existence: Soit $f_\theta(z) = e^{2i\pi\theta} z + z^2$. Posons

$$\mathcal{S} = \{ \ \theta \in \mathbb{T} \mid 0 \text{ est le centre d'un disque de Siegel de } f_\theta \} \ .$$

**Théorème** (Siegel, Brujno, Yoccoz, Herman, Shishikura).

1. $\mathcal{S}$ est de mesure de Lebesgue 1.
2. $\mathbb{T} - \mathcal{S}$ est l'intersection dénombrable d'ouverts denses.
3. $\mathcal{S} = \{\theta \mid \sum \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty\}$, où $p_n/q_n$ sont les réduites de $\theta$ par fraction continue.
4. Pour tout $e^{2i\pi\theta}$ le multiplicateur d'un disque de Siegel, on peut construire une fraction rationnelle ayant un anneau d'Herman de même multiplicateur.

Pour une version plus faible du théorème, voir [Mi].

## 3.6 Classification des composantes périodiques

**Théorème 3.10** *Toute composante connexe périodique de $\mathcal{F}$ est soit (super)attractive, soit parabolique, soit un domaine de rotation (disque de Siegel ou anneau d'Herman).*

**Preuve**. La première partie est valable pour tout $U$ ouvert connexe avec $\#\overline{\mathbb{C}} - U \geq 3$ et toute fonction $f : U \to U$ holomorphe.

On remarque d'abord que $f$ contracte au sens large la métrique de Poincaré $\rho_U$. Si $f^n(x)$ sort de tout compact de $U$ pour un point $x$ alors il est vrai pour tout point de $U$. Par contre si $f^n(x)$ visite une infinité de fois d'un compact alors soit $f^n$ converge uniformément sur compact vers une fonction constante $x_0 \in U$, avec $x_0$ un point fixe attractif de $f$, soit $f$ est un revêtement et une isométrie locale pour $\rho_U$.

On montre ensuite pour $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ un sous groupe discret, soit $\Gamma$ est abélien, soit le semi-groupe $End(\Gamma) = \{g \in PSL(2,\mathbb{R}),\ g\Gamma g^{-1} \subset \Gamma\}$ est discret. On se place dans le cas où $f$ est un revêtement. Si $\pi_1(U)$ est abélian, alors $U$ est isomorphe à un disque, un anneau ou un disque pointé, et $f$ est une rotation irrationnelle ou rationnelle. Si $\pi_1(U)$ est non abélian, alors $U \approx H/\Gamma$ avec $\Gamma$ un sous groupe discret de $PSL(2,R)$ et $\Gamma \approx \pi_1(U)$. Soit $g_n : H \to H$ un relevé de $f^n$. Alors $g_n \in End(\Gamma)$ qui est discret, et on peut choisir $g_n$ dans un compact de $Aut(\Gamma)$. Il existe donc $n, m$ tels que $g_n = g_m$. Ainsi $f^n = f^m$ et $f^{n-m} = id$.

Le deuxième partie traite le cas où $U$ est une composante périodique de $\mathcal{F}$. Les cas $U \approx D^*$ ou $f_U^n = id$ ne sont pas réalisables, car $J$ est sans point isolé et $\deg(f^n) > 1$. Les autres cas nous donnent des bassins attractifs, des disques de Siegel et des anneaux d'Herman, et le cas où $f^n(x)$ sort de tout compact. Reste de montrer que ce dernier cas nous donne un bassin parabolique. Traçons un arc $L \subset U$ passant par $x, f(x)$ et $f^2(x)$, on voit que tout point d'accumulation de $f^n(L)$ est un point fixe de $f$. Comme l'ensemble des points fixes est discret, et $acc(f^n(L))$ est connexe, on voit que $f^n(x) \to x_0 \in \partial U$, uniformément sur compact, avec $x_0$ un point fixe indifférent de $f$ ($|f'(x_0)| = 1$). Nous devons maintenant appliquer le "Snail Lemma" de Douady-Sullivan (voir [CG], lemma IV.2.4, ou [Mi], p74) pour conclure que $f'(x_0) = 1$ et $U$ est parabolique. ∎

**Corollaire 3.11** *Soit $z$ un point qui est ni dans l'ensemble exceptionnel ni dans un domaine de rotation pour $f$. Alors $acc(\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(\{z\})) = J$.*

**Preuve**. Il suffit de traiter le cas $z \in \mathcal{F}$. Si $z$ est dans une composante non périodique, toutes ces préimages appartiennent aux composantes connexes de Fatou distinctes, donc ne peuvent s'accumuler que sur $J$. Si $z \in U$, avec $U$ un basin (super)attractif ou parabolique, alors soit $f^{-n}(z) \cap U = \{z\}$ pour tout $n$, soit il existe un voisinage $W$ de $(f^{-1}(z) - \{z\}) \cap U$, tel que toutes les composantes connexes de $f^{-n}(W) \cap U$ sont deux-à-deux distinctes et s'accumulent au bord de $U$, et toutes les composantes connexes de $f^{-n}(W) - U$ appartiennent aux composantes connexes de Fatou distinctes, et s'accumulent dans $J$. ∎

## 3.7 Points critiques et composantes périodiques, normalité des branches inverses

Soit $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ un ouvert connexe. Notons

$$\mathcal{A}(V) = \bigcup_{n\geq 1} \{\ f^{-n} : V \to U \mid \text{pour tout } U \text{ tel que } f^n : U \to V \text{ soit un homéomorphisme}\}.$$

**Lemme 3.12** *(Brolin) Soit $V$ un ouvert connexe. La famille $\mathcal{A}(V)$ est soit vide soit finie soit normale. Si $V$ n'est pas inclus dans un domaine de rotation, toute fonction limite de $\mathcal{A}(V)$ est une constante dans $J$; et pour $K \subset V$ compact, $\epsilon > 0$, on a* $\mathrm{diam}(g(K)) < \epsilon$ *pour tout $g \in \mathcal{A}(V)$ sauf un nombre fini d'exception.*

**Preuve**. Notons $C_n$ l'ensemble des points critiques de $f^n$, $n \geq 1$, et $C = C_1$. Alors $C_n = \bigcup_{j=0}^{n-1} f^{-j}(C)$, donc les $C_n$ forment une famille croissante. On a $\#C \geq 2$. Et $\#C_2 \geq 3$ sauf si $f$ est conjuguée à $z^{\pm d}$ (car si $f^{-1}(C) \subset C$, $C$ est dans l'ensemble exceptionnel de $f$). Comme $g(V) \cap C_2 = \emptyset$ pour tout $g \in \mathcal{A}(V)$ sauf un nombre fini de choix, le théorème de Montel nous affirme que $\mathcal{A}(V)$ est normale dans le cas où $\#C_2 \geq 3$. Dans le cas $f(z) = z^{\pm d}$ , la famille $\mathcal{A}(V)$ est vide si $V$ sépare $0, \infty$, et est normale sinon (cela se montre directement car toute suite de $\mathcal{A}(V)$ converge uniformément sur tout compact de $V$).

Pour étudier les fonctions limites de $\mathcal{A}(V)$, on distingue deux cas (non exclusifs): Premier cas: $V \cap J \neq \emptyset$ (y compris le cas $J = \overline{\mathbb{C}}$). Soit $g_n \in \mathcal{A}(V)$ une suite non stationnaire et $g_n \to g$. Il existe $k_n \to \infty$ tel que $f^{k_n} \circ g_n = id$. Supposons que $g$ n'est pas constante, donc ouverte. Prenons $V'$ un disque ouvert d'adhérence dans $V$ tel que $J \cap V' \neq \emptyset$ et $J - V' \neq \emptyset$. Par le théorème de Rouché, il existe un disque $W$ avec $\overline{W} \subset g(V')$, $J \cap W \neq \emptyset$ tel que $\overline{W} \subset g_n(V')$ pour $n$ suffisament grand. Ainsi $f^{k_n}(W) \subset V'$ pour les mêmes $k_n$ et donc forme une famille normale. De là on a deux arguments pour mener à une contradiction.

1. Il existe $x \in W$ périodique répulsif de période $N$ et un voisinage ouvert $W' \subset W$ tel que $f^N(W') \supset W'$. Ainsi $f^{kN}(W'), k = 1, 2, \cdots$ forment une suite croissante d'ouverts et couvrent $J = J_{f^N}$ à partir d'un certain rang (corollaire 2.5). Comme $f(J) = J$, on a $f^k(W') \supset J$ pour tout $k$ suffisament grand. Ceci est en contradiction avec $f^{k_n}(W) \subset V'$ pour $n$ grand car $J - V' \neq \emptyset$.

2. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $f^{k_n}|_W \to h$. Fixons $N$ et mettons $k_n = Nm_n - j_n$ avec $0 \leq j_n < N$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $j_n = j$. Ainsi $f^{Nm_n} = f^{j+k_n} \to f^j \circ h$. Ceci contredit que $J = J_{f^N}$ et que aucune sous suite de $(f^N)^k$ n'est convergente dans $W$.

Deuxième cas: $V \cap \mathcal{F}$ contient un ouvert $U$ qui n'est pas dans un domaine de rotation (donc $\mathcal{F} \neq \emptyset$). D'après le corollaire 3.11, les préimages de tout point de $U$ s'accumulent dans $J$, qui est sans intérieure car $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Donc une fonction limite de $\mathcal{A}(V)$ n'est pas ouverte, donc constante.

Pour $K \subset V$, s'il existe $g_n \in \mathcal{A}(V)$ tels que $\mathrm{diam}(g_n(K)) \geq \epsilon > 0$, aucune sous suite de $\{g_n\}$ ne peut converger vers une fonction constante uniformément sur $K$. ∎

**Corollaire 3.13** *Soit $R$ un domaine de rotation. Soit $V$ tel que $V \cap R \neq \emptyset$ et $V$ contienne un ouvert connexe $U$ dans $\mathcal{F}$ qui n'est pas dans un domaine de rotation. Alors pour toute suite $g_n \in \mathcal{A}(V)$ convergente, $g_n(V) \cap R = \emptyset$ pour $n$ grand.*

Citons au passage un corollaire du théorème 2.7 que nous venons de démontrer:

**Corollaire 3.14** *L'ensemble $\mathcal{F}$ coincide avec l'ensemble des $z$ pour lesquels il existe un voisinage $U$ tel qu'une sous suite de $f^n|_U$ converge uniformément.*

**Corollaire 3.15** *Soit $V$ un ouvert simplement connexe tel que $V \cap P_f = \emptyset$ et que $V$ ne soit pas inclus dans un domaine de rotation. Soit $L$ un compact connexe tel que $f^{n_k}(L) \subset V$*

*pour une suite $n_k \to \infty$. On suppose que soit il existe $K \subset V$ compact tel que $f^{n_k}(L) \subset K$ pour une infinité de $k$, soit $\partial V$ est localement connexe, alors $L$ est un point et $L \subset J$.*

**Preuve**. Le premier cas est un corollaire du résultat ci-dessus. Le deuxième cas demande une étude sur les graphes connectant $P_f$ et disjoint de $V$. ■

Ceci nous fournit dans la suite une technique "classique" pour montrer que les points sont des points. Notons qu'il y a des techniques plus récentes utilisant une suite emboitée des anneaux de somme de modules divergente ou un anneau de module minoré avec la distance sphérique des deux composantes du bord petit.

Notons $C = C_f$ l'ensemble des points critiques de $f$, et $P = P_f$ =adhérence$\bigcup_{n\geq 1} f^n(C)$ l'ensemble postcritique. Notons également $P' = P'_f = acc(\bigcup_{n\geq 1} f^n(C))$.

**Lemme 3.16** *On a $f(P) \subset P$, $f(P') = P'$, $P \subset f^{-1}(P)$ et $P' \subset f^{-1}(P')$.*

**Preuve**. Il suffit de montrer la deuxième relation. Soit $\lim_{j\to\infty} f^{n_j}(c_j) = y$, avec $c_j \in C$ et $n_j \to \infty$. Alors $\lim_{j\to\infty} f^{n_j+1}(c_j) = f(y)$, et $f(P'_f) \subset P'_f$. De plus, la suite $\{f^{n_j-1}(c_j)\}_j$ admet une sous suite convergeant vers un point $x$. Donc $x \in P'_f$ et $y = f(x) \in P'_f$. ■

On remarque que pour $V$ un ouvert simplement connexe avec $V \cap P_f = \emptyset$, pour tout $n$, l'inverse de $f^n$ a exactement $d^n$ branches définies sur $V$. La famille $\mathcal{A}(V)$ est donc infinie.

**Corollaire 3.17** *Si tout point critique d'un polynôme est attiré par l'infini, l'ensemble de Julia est totalement discontinu.*

**Preuve**. Il suffit de prendre $V$ un grand disque et $N$ un entier grand tel que $V \cap P_{f^N} = \emptyset$, et remarquer que $J_f = J_{f^N} \subset V$, et que $z_0 \in J_f$ ssi $g \equiv z_0$ est une fonction limite de $\mathcal{A}(V)$. ■

**Corollaire 3.18** *Soit $f$ un polynôme. Chaque composante connexe périodique $K'$ de $K_f$ est quasi-conformément homéomorphe à $K_g$ pour un autre polynôme $g$. Chaque composante connexe errante $K'$ de $K_f$ sans point de $P_f$ est un point. (??)*

**Corollaire 3.19** *Soit $V$ un ouvert simplement connexe tel que $V \cap P'_f = \emptyset$, que $V$ ne soit pas inclus dans un domaine de rotation et que $V$ ne contienne pas de point superattractif. Supposons que pour tout $n \geq 1$, toutes les composantes connexes de $f^{-n}(V)$ sont simplement connexe. Alors pour tout $K \subset V$ compact connexe, et $\varepsilon > 0$, les composantes connexes de $f^{-n}(K)$ sont de diamètre inférieure à $\varepsilon$, sauf un nombre fini d'exception.*

**Preuve**. Par hypothèse, $V$ ne contient pas de point périodique non répulsif. Etant donné $K \subset V$, quitte à rétrécir $V$, on peut supposer $K \subset V$, $\overline{V} \cap P'_f = \emptyset$. Donc $\#V \cap P_f < \infty$. Supposons d'abord que $V$ ne contient pas de point périodique de $P_f$. Il existe un $N$ maximal tel que $f^N(c_N) \in V$ pour un certain $c_N \in C$. On a $f^{-N}(V) \cap P_f = \emptyset$. Ainsi les composantes connexes $f^{-k}(f^{-N}(K))$ sont de diamètre tendant vers zero. Pour chaque point périodique répulsif $\alpha \in P_f \cap \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}V$ (il y en a un nombre fini), soit $p$ la période de $\alpha$. Notons $V'$ la composante connexe de $\alpha$ dans $f^{-k}(V)$ pour un $k$ minimal et $V_{np}$ la composante connexe de $\alpha$ dans $f^{-np}(V')$. Comme $V_{np} \cap P_f$ est décroissant par rapport à $n$, il existe un $N$ tel que $V_{np} \cap P_f$ devienne stationnaire pour $n \geq N$. Donc tout point dans $V_{Np} \cap P_f$ est périodique non critique. La famille $\mathcal{A}(V_{Np})$ contient $f^{-kp} : V_{Np} \to V_{(N+k)p}$, $k \geq 1$, qui sont deux-à deux différentes car $V_{Np}$ n'est pas dans un domaine de rotation. Ainsi $\mathcal{A}(V_{Np})$ est infinie et normale. Les autres composantes connexes de $f^{-n}(V)$ ne contiennent pas de point périodique de $P_f$. On les traite comme dans le cas précédent. ■

**Corollaire 3.20** *Le bord d'un domaine de rotation $U$ est un sous ensemble de $P'_f$.*

**Preuve**. On montre d'abord $\partial U \subset P_f$. Sinon il existe un ouvert simplement connexe $V$ tel que $V \cap \partial U \neq \emptyset$ et $V \cap P_f = \emptyset$. Prenons $V'$ un disque inclus dans $V \cap U$. Alors $\mathcal{A}(V)$ est infinie avec toutes les fonctions limites constantes. Or on sait qu'une branche inverse $g : U \to U$ de $f$ est conjuguée à une rotation irrationnelle. Donc $\mathcal{A}(V')$ admet une fonction limite non constante. Comme $\mathcal{A}(V') = \{g|_{V'},\ g \in \mathcal{A}(V)\}$, on obtient une contradiction.

Comme $\partial U$ est compact connexe non réduit à un point, on a $\partial U \subset P'_f$. ■

**Corollaire 3.21** *Tout point périodique indifférent dans $J$ est dans $P'_f$.*

**Preuve**. Supposons $f(z_0) = z_0$, $f'(z_0) = \lambda$, $|\lambda| = 1$ et $z_0 \in J$. Soit $V$ un disque voisinage de $z_0$ tel que $V - \{z_0\} \cap P_f = \emptyset$. Notons $V_n$ la composante connexe de $f^{-n}(V)$ contenant $z_0$. Par la formule de Riemann-Hurwitz, $V_n - f^{-n}(z_0)$ est un disque pointé. Donc $g_n = f^{-n} : V \to V_n$ est bien définie et $g_n \in \mathcal{A}(V)$. Par conséquent toute fonction limite de $\{g_n\}$ est constante. Ce qui contredit $|g'_n(z_0)| = |\lambda^{-n}| \not\to 0$. ■

Notons ici il existe une extension de ce résultat par Mañẽ (voir [Ma]) par rapport aux orbites critiques récurrentes.

**Proposition 3.22** *Le nombre des orbites périodiques attractives plus la moitié du nombre des orbites périodiques de multiplicateur dans $S^1 - \{1\}$ est borné par $2d - 2$.*

**Preuve**. Voir [CG]. ■

# 4 Il n'y a pas de composante de Fatou errante (Sullivan)

Structure complexe et applications quasi-conformes:

**1. Cas affine.** Munir l'espace vertoriel $\mathbb{R}^2$ d'une structure complexe c'est définir un produit $a \cdot v$ pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{R}^2$ pour que $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ devienne un espace $\mathbb{C}$-vectoriel.

Si on se donne une application linéaire $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $J^2 = -id$, on peut définir $(x+iy)\cdot v$ par $xv + y(Jv)$. Inversement, si $\mathbb{R}^2$ est munie d'une structure $\mathbb{C}$-vectorielle, la multiplication $v \mapsto i \cdot v$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire vérifiant $i^2 = -id$. Ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des structures complexes de $\mathbb{R}^2$ coincide avec l'ensemble des matrices $J$ avec $J^2 = -id$. Cet ensemble coincide aussi avec l'ensemble des ellipses $L$ centrées en 0 quotienté par la relation d'équivalence $L \approx tL, t \in \mathbb{R}_+$, et ce de la manière suivante: toute matrice $J$ avec $J^2 = -id$ s'écrit $M^{-1} \circ J_0 \circ M$, où $M$ est une transformation linéaire préservant l'orientation et $J_0$ est la matrice $(c_{ij})$, $c_{ii} = 0$, $c_{12} = -1$ et $c_{21} = 1$. On associe à $J$ la classe $[L]$ des ellipses envoyées par $M$ sur la classe des cercles.

A chaque classe $[L]$ on associe $ke^{i\theta} \in D$ avec $\frac{1+k}{1-k}$ = le rapport des axes de $L$ et $\theta$ le double de l'angle du petit axe de $L$. Il est clair qu'à partir d'un point de $D$ on peut construire une ellipse correspondante. Ainsi on identifie $\mathcal{S}$ à $D$, avec la métrique hyperbolique et la mesure de Lebesgue.

Ainsi, pour toute application linéaire préservant l'orientation $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, z \mapsto az + b\bar{z}$, la classe d'ellipses $[L]$ associée à $M$ devient $b/a$ dans $D$. De plus, comme $M$ envoie une classe d'ellipses quelconque sur une classe d'ellipses, $M$ induit une application $M_* : D \to D$. Nous allons voir que c'est application est même un homéomorphisme. On note $M^* = (M^{-1})_*$ (le tiré en arrieère des structures complexes). Commencons par le cas $b = 0$, alors $M$ est en fait holomorphe, et $M_* u = \frac{a}{\bar{a}} u$ et $M^*(v) = \frac{\bar{a}}{a} v$. Comme $\det M = |a|^2 - |b|^2 > 0$, donc $|b/a| < 1$. Supposons maintenant $a = 1$. On a $M_*(0) = ib$ et $M^*(0) = b$, et $M^*(v) = \frac{v+b}{1+\bar{b}v}$ (posons $u = M^* v$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\lambda(z + v\bar{z}) \circ (z + b\bar{z}) = z + u\bar{z}$). Finalement dans le cas où $a$ est quelconque, $Mz = (z + \frac{b}{\bar{a}}\bar{z}) \circ az$. Donc $M^*(v) = \frac{\bar{a}}{a} \frac{v + \frac{b}{\bar{a}}}{1 + \frac{\bar{b}}{a} v}$. Notons que $M^* : D \to D$ est toujour un automorphisme conforme de $D$. Il préserve donc la métrique hyperbolique.

**2. Cas infinitésimal.** Soit $U$ un ouvert connexe de $\overline{\mathbb{C}}$. On définit

$$\mathcal{S}(U) = \{u(z) \in L^\infty(U, D), \|u\|_\infty < 1\}\ .$$

On note $\sigma_0 \equiv 0$. Une application $\phi : U \to V$ est *quasi-conforme* si $\phi$ est un homéomorphisme préservant l'orientation, $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ existe au sens de distribution, $\frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \in L^1_{loc}(U)$ et $\|\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} / \frac{\partial \phi}{\partial z}\|_\infty \le k < 1$. Une telle application agit naturellement sur $\mathcal{S}(U), \mathcal{S}(V)$ par $\phi^*(v)(z) = (d\phi|_z)^*(v(\phi(z)))$. En particulier, $\phi^*(\sigma_0) = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} / \frac{\partial \phi}{\partial z}$.

**Lemme 4.1** *(Weyl) Si $\phi^*(\sigma_0) = \sigma_0$, alors $\phi$ est conforme. Par conséquent si $\phi_1^*(\sigma_0) = \phi_2^*(\sigma_0)$, alors $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est un automorphisme conforme de $V$.*

Si $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ est une fraction rationnelle alors $f^*$ agit sur $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{C}})$: pour $v \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{C}})$, $u = f^*(v)$ est défini par: $u(z) = 0$ si $z$ est point critique de $f$, et $u(z) = (f'(z))^*(v(f(z)) = \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)} v(f(z))$ sinon. On remarque que $\|u\|_\infty = \|v\|_\infty$. Ce calcul nous permet aussi de définir $\mathcal{S}(V)$, pour $V$ une surface de Riemann, comme l'ensemble des $-1,1$-formes $\mu$ mesurables avec $\|\mu\|_\infty \le k < 1$ (formes de Beltrami).

Plus généralement si $R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ est quasi-régulière (fraction rationnelle composée avec une application quasi-conforme), alors $R^* : \mathcal{S}(\overline{\mathbb{C}}) \to \mathcal{S}(\overline{\mathbb{C}})$ est aussi bien défini.

**Théorème 4.2** *(Ahlfors-Bers, Weyl) Soit $u \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{C}})$ un point fixe de $R^*$. Alors $R$ est quasi-conformément conjugué à une fraction rationnelle $f_{R,u}$ de même degré. De plus, si $t \mapsto u_t$, $\mathbb{R}^N \to \mathcal{S}(\overline{\mathbb{C}})$ est $C^\infty$, avec $R^*(u_t) = u_t$, alors, quitte à normaliser, $t \mapsto f_{R,u_t}$, $\mathbb{R}^N \to Rat(d)$ est aussi $C^\infty$.*

**Théorème 4.3** *(Sullivan) Toute composante de Fatou est prépériodique.*

**Preuve**. Supposons $D_{-1}$ est une composante de Fatou errante. Posons $D_n = f^{n+1}(D_{-1})$. Quitte à itérer et conjuguer, on peut supposer que $\infty \in D_{-1}$ et que $D_0$ ne contienne pas de point critique de $f^n$ pour tout $n$.

**Première étape**. $D_0$ est simplement connexe.

On montre d'abord que toute fonction limite de la famille normale $\{f^n : D_0 \to D_n\}$ est constante. Si $\lim f^{n_k}$ est ouverte, alors pour $k$ grand, $f^{n_k}(D_0) \cap f^{n_{k+1}}(D_0) \neq \emptyset$, ce qui contredit que $D_0$ est un domaine errant. Ainsi pour toute courbe de Jordan $\gamma \subset D_0$, on a $\mathrm{diam}(f^n(\gamma)) \to 0$.

Soit $\gamma \subset D_0$ une courbe de Jordan. On va montrer que $\gamma$ est homotope à un point dans $D_0$. Ceci se réalize ssi $\gamma_n = f^n(\gamma)$ est homotope à un point dans $D_n$ pour un certain $n$, car $f^n : D_0 \to D_n$ est un revêtement. Soit $E_n$ l'union des composantes connexes bornées de $\overline{\mathbb{C}} - \gamma_n$ ne contenant pas $D_{-1}$. On a $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$. Comme $f$ est uniformément continue, on a aussi $\mathrm{diam}(f(E_n)) \to 0$. Ceci nous permet d'établir $f(E_n) = E_{n+1}$ pour $n \geq N$ (on a deux façon de voir cela: une topologique, qui montre que soit $f(E_n) = E_{n+1}$ soit $\infty \in f(E_n)$; une d'analyse, qui consiste à éliminer les pôles de $f$ par le choix de $N$ et ensuite appliquer le principe de maximum). Ainsi la famille $\{f^k : E_N \to \mathbb{C} - D_{-1}\}$ est normale. Donc $E_N \subset D_N$ et $\gamma_N = \partial E_N$ est homotope à un point dans $D_N$. Comme $f(\gamma_n) \cap D_{-1} = \emptyset$, $\gamma_n \cap f^{-1}(D_{-1}) = \emptyset$ pour tout $n$. Notons que les pô les sont dans $f^{-1}(D_{-1})$. Comme $\mathrm{diam}_{S^2}(\gamma_n) \to 0$, on a $d_{S^2}(\gamma_n, \text{pôles}) > \mathrm{diam}(\gamma_n)$ pour tout $n$ grand.

**Deuxième étape**. Le goupe des homéomorphismes de $J$ commutant avec $f$ est totalement discontinu.

Soit $H : J \to J$ un homéomorphisme avec $H \circ f = f \circ H$. Alors pour tout $k$, $H \circ f^k = f^k \circ H$. Donc pour $P_k = \{z \in J, f^k(z) = z\}$, on a $H(P_k) = P_k$. Si de plus $H$ est homotope à l'identité, on a $H|_{P_k} = id$ pour tout $k$. Donc $H = id$.

**Troisième étape**. L'ensemble des bouts premiers d'un ouvert simplement connexe $U$ qui ont tous $x \in \partial U$ comme point principal est totalement discontinu.

Rappolons quelques définitions: Une *coupure* est un arc simple dans $U$ avec les pieds sur $\partial U$. On fixe $z_0 \in U$. Une suite de coupures $\{\gamma_n\}$ est une *chaine* si $\overline{\gamma}_i \cap \overline{\gamma}_j = \emptyset$, $i \neq j$, chaque $\gamma_n$ sépare $z_0$ et $\gamma_{n+1}$ et $\mathrm{diam}(\gamma_n) \to 0$. Deux chaines sont *équivalentes* si on peut trouver une sous suite dans chaque chaine telle que l'union des deux formes encore une chaine. Une classe de chaines est un *bout premier*. Un point $x \in \partial U$ est un *point principal* du bout premier $\xi$ s'il existe une chaine $\{\gamma_n\}$ représentant $\xi$ telle que $\overline{\gamma}_n \to x$. Notons $\widehat{U} = U \cup \{\text{bouts premiers de } U\}$.

**Théorème de Carathéodory**: a) Tout point $x \in \partial U$ est un point principal d'un bout premier. b) Une représentation conforme $g : D \to U$ s'étend en une bijection $\widehat{g} : \overline{D} \to \widehat{U}$, et introduit une topologie sur $\widehat{U}$, indépendante du choix de $g$. c) Pour $U, V \subset \overline{\mathbb{C}}$ ouverts simplement connexes, tout homéomorphisme $h : \overline{U} \to \overline{V}$ induit un homéomorphisme $\widehat{h} : \widehat{U} \to \widehat{V}$.

De plus, $g$ admet des limites non-tangentielles $\overline{g} : \partial D - E \to \partial U$ où $E$ est de mesure de Lebesque nulle (Fatou) et $\overline{g}$ ne peut pas être constante en un ensemble de mesure positive (théorème des Frères Riesz, voir [Valiron], ou [Mi]). Et pour $t \in \partial D - E$, le point $\overline{g}(t) \in \partial U$ est l'unique point principal du bout premier $\widehat{g}(t)$. Ainsi l'ensemble des bouts premiers ayant $x \in \partial U$ comme point principal est inclus dans $\widehat{g}(\overline{g}^{-1}(x) \cup E)$, qui est totalement discontinu.

**Quatrième étape**. Déformation quasi-conforme. Principe de dimension.

Tout d'abord toute fonction $u(z) \in \mathcal{S}(D_0)$ s'etend en une fonction $u(z) \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{C}})$ avec $f^*(u) = u$: pour $z = f^n(w)$, $w \in D_0$, on définit $u(z) = (f^n)_*(u(w))$; pour $z$ tel que $f^n(z) = w$, $w \in D_0$, on définit $u(z) = (f^n)^*(u(w))$; pour $z$ ailleurs, on met $u(z) = 0$.

**a).** Notons $D$ le disque unité. Soit $N > 4d+2$. Pour $t \in \mathbb{R}^N$, on choisit $t \mapsto \psi_t$ une famille $C^\infty$ de difféomorphismes de $\overline{D}$ sur lui-même telle que $\psi_s \circ \psi_t^{-1}|_{\partial D}$ ne soit pas de la forme $e^{i\theta}(z-a)/(1-\bar{a}z)$ pour $s \neq t$. Soit $g : D \to D_0$ une représentation conforme. Notons $u_t = g_* \psi^*(\sigma_0)$ et encore $u_t$ son extension dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{C}})$. Il existe ainsi $\varphi_t : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ quasi-conforme, $C^\infty$ par rapport à $t$, tel que $\varphi_t^*(\sigma_0) = u_t$ et que $t \mapsto \varphi_t \circ f \circ \varphi_t^{-1} : \mathbb{R}^N \to Rat(d)$ soit bien défini et $C^\infty$. Comme $\dim_{\mathbb{R}}(Rat(d)) = 4d+2 < N$, il existe une courbe $\gamma \subset \mathbb{R}^N$ partant d'un point $t_0$ telle que $\varphi_t \circ f \circ \varphi_t^{-1} = \varphi_{t_0} \circ f \circ \varphi_{t_0}^{-1}$ pout tout $t \in \gamma$. Ainsi $h_t \circ f \circ h_t^{-1} = f$, avec $h_t = \varphi_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t$, $t \in \gamma$, et $h_{t_0} = id$.

On voit d'abord $h_t(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ par l'uniforme continuité de $h$ et la définition (équicontinue) de $\mathcal{F}$. Donc $h_t(J) = J$ et $h_t|_J = id$ par la deuxième étape. On a aussi $h_t(D_0) = D_0$ car $h_t$ est homotope à l'identité. Ainsi $h_t$ induit un homéomorphisme $\widehat{h}_t : \widehat{D}_0 \to \widehat{D}_0$ (par le théorème de Carathéodory). On prétend que $\widehat{h}_t$ est l'identité sur les bouts premiers de $D_0$. Preuve: $t \mapsto \widehat{h}_t(\xi)$ est continue pour $\xi$ un bout preimier. D'autre part $h_t : \overline{D}_0 \to \overline{D}_0$ vérifie que $h_t$(points principaux de $\xi$) est à la fois les points principaux de $\xi$ (car $h_t|_{\partial D_0} = id$) et les points principaux de $\widehat{h}_t(\xi)$ (par définition de $\widehat{h}_t$). Ainsi $\widehat{h}_t(\xi)$ est une famille continue de bouts premiers ayant les mêmes points principaux, avec $\widehat{h}_{t_0} = id$. D'après la troisième étape, $\widehat{h}_t(\xi) = \xi$ pour tout $t \in \gamma$.

**b).** Posons $H_t : D \to D$ par $H_t = g^{-1} \circ h_t \circ g$. Alors $H_t$ s'étend en un homéomorphisme de $\overline{D}$ avec $H|_{\partial D} = id$. De plus, $(\psi_{t_0} \circ H_t \circ \psi_t^{-1})^*(\sigma_0) = \sigma_0$. Par le lemme de Weyl, $\psi_{t_0} \circ H_t \circ \psi_t^{-1}$ est conforme en $D$. Son prolongement continue $\psi_{t_0} \circ \psi_t^{-1}$ sur $\partial D$ est donc sous la forme $\lambda(z-a)/(1-\bar{a}z)$. Ceci contredit le choix des $\psi_t$. ■

**Théorème 4.4** *(Shishikura) Le nombre des cycles périodiques de composantes connexes de $\mathcal{F}$ plus le nombre des cycles périodiques d'anneaux d'Herman plus le nombre des orbites périodiques indifférents irrationnels dans $J$ est borné par $2d-2$. La borne est optimale.*

Voir [Sh1] ou [Do1] pour une démonstration.

# 5 Topologie de l'ensemble de Julia

La topologie de l'ensemble de Julia dépend beaucoup de la fonction. L'ensemble de Julia peut être un ensemble de Cantor, un ensemble non connexe mais non Cantor, connexe mais non localement connexe, localement connexe sans être la sphère toute entière, ou $\overline{\mathbb{C}}$.

## 5.1 Cas où $J$ est disconnexe

On voit facilement que $J$ a un nombre non dénombrable de composantes connexes . Chaque $J$-composante est compact.

Pour $J_0$ une composante connexe de $J$, on a $f(J_0)$ est aussi une composante connexe de $J$.

## 5.2 Julia vu par Fatou, acces et rayons

Quand $J \neq \overline{\mathbb{C}}$, on peut souvent obtenir des informations de la dynamique d'un point $z \in J \cap \partial U$, pour $U$ une composante de Fatou, à partir de la dynamique de Fatou et la position du $z$ dans $\partial U$. Par exemple, $f$ est un polynôme ou de la forme $1/z^d$ ssi il existe $U$ tel que $\partial U = J$. Ou, si $\partial U$ est localement connexe, tout point $z \in \partial U$ est $U$-accessible, et la dynamique de $z$ (prépériodique, errant, etc.) coincide avec la dynamique de l'acces.

Soit $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ un ouvert. On dit que $z \in \partial U$ est $U$-accessible s'il existe un arc $\gamma : [0, +\infty[ \to U$ continu injective avec $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = z$. On dit que l'acces est périodique pour $f$ s'il existe $q$ entier et $\infty > t', t'' \geq 0$ tels que $f^q : \gamma([t', \infty[) \to \gamma([t'', \infty[)$ soit un homéomorphisme.

Soit $z$ un point périodique indifférent irrationnel pour $f$. On dit que $z$ est un point de Cremer si $z \in J$ et est point de Siegel sinon. D'après le théorème 3.10, le point $z$ est de Siegel ssi il est le centre d'un disque de Siegel.

**Lemme 5.1** *(Snail-lemma de Douady-Sullivan) Un point de Cremer $z$ n'admet pas d'acces périodique dans $\overline{\mathbb{C}} - \{z\}$, et ne se trouve pas sur la frontière d'une composante de Fatou périodique avec frontière localement connexe.*

**Preuve**. Notons $s(t) = \gamma^{-1} f^q \gamma(t)$, $t \geq t'$. Alors $s(t)$ est strictement croissant. Comme les points fixes de $s$ correspondent aux points fixes de $f^q$, il existe $t_0 \geq t'$ tel que $sign(s(t) - t)$ soit constante pour $t \geq t_0$. Quitte à augmenter $t_0$, et reparamètrer, on peut supposer que $f^q$ n'a pas de point critique en $\gamma([t_0, \infty[)$ et $f^q(\gamma(t)) = \gamma(t+1)$ pour $t \geq t_0$, ou $f^q(\gamma(t)) = \gamma(t-1)$ pour $t \geq t_0 + 1$. On peut donc appliquer le standard snail-lemma pour conclure que soit $(f^q)'(z) = 1$, soit $|(f^q)'(z)| \neq 1$. ■

**Théorème 5.2** *(Petersen) Soit $\alpha$ un point périodique répulsif ou parabolique de période $k$, $U$ une composante de Fatou finiement connexe et $\alpha \in \partial U$. Alors $\alpha$ est périodiquement $U$-accessible ssi $\alpha \notin \partial V$ pour toute $V$ composante non périodique de $f^{-m}(U)$ $(m > 0)$.*

*Dans ce cas le nombre de rotation combinatoire $p/q$ en $\alpha$ est bien défini, et il existe une inégalité (cf. lemme 5.4 ci-dessous) reliant $(f^k)'(\alpha)$, $p/q$ est la dynamique à conjugaison conforme près de $f^n|_U$, où $n$ est la période de $U$.*

(Ce résultat a été généralisé dans le cas où $U$ est infiniment connexe par Przytycki [Pr]).

Soit $\alpha$ un point périodique de période $k$, de multiplicateur $\lambda$, $|\lambda| > 1$. On peut alors appliquer la première partie de la preuve du lemme 3.6 à l'inverse locale de $f^k$ pour conclure qu'il existe une fonction entière $\psi : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}} - E(f)$, injective au voisinage de 0, $\psi(0) = \alpha$, telle que $\psi(\lambda z) = f^k(\psi(z))$. Toutes les autres solutions de cette équation fonctionnelle sont de la forme $\psi(az)$, $a \in \mathbb{C}^*$. Et $\psi'(\lambda z) = 0$ ssi soit $\psi'(z) = 0$, soit $(f^k)'(\psi(z)) = 0$. L'ensemble $\psi^{-1}(J)$ est un fermé sans intérieure, sans point isolé, et invariant par $z \mapsto \lambda z$.

Les composantes connexes de $\psi^{-1}(\mathcal{F})$ sont permutées par $z \to \lambda z$. Sur une composante connexe $W$ de $\psi^{-1}(U)$, où $U$ est une composante de Fatou, $\psi : W \to U$ n'est pas surjective ssi $U$ est périodique, $\alpha \in \partial U$ et $f^p : U \to U$ est conjuguée à $z \mapsto z^k$. Dans ce cas $\psi : W \to U - \{$ un point $)$ est un revêtement universel. $W$ est non bornée, périodique pour $z \mapsto \lambda z$. Si $U$ a plusieurs acces périodiques à $\alpha$, deux access distincts correspondent à deux $W$ différentes.

**Lemme 5.3** *Soit $U$ une composante de Fatou simplement connexe de période $n$. Notons $R|_D$ un produit de Blaschke conformément conjugué à $f^n|_U$. Alors tout $U$-acces correspond à un $D$-acces. Et il existe une bijection entre les $U$-acces prépériodiques et les $D$-acces prépériodiques, compatible avec les dynamiques.*

**Preuve**. Trois démonstrations: Métrique de Poincaré, Principe de Koebe, Lemme de Yin. ■

Ceci permet de définir un nombre de rotation combinatoire $p/q$. Supposons que toute composante de Fatou périodique $U$ avec $\alpha \in \partial U$ est simplement connexe. Pour chaque orbite d'acces en $\alpha$, prenons une composante $U$ contenant un acces dans l'orbite. Notons $\lambda'$ le multiplicateur (positif) de l'acces correspondant d'un produit de Blaschke conjugué à $f^n|_U$. Pour tout $L \in \log\lambda$, notons $r(L, p/q)$ est le rayon du disque passant par $L-(p/q)2i\pi$, tangent à $i\mathbb{R}$ au point 0, et $r(\lambda, p/q) = \inf\{r(L, p/q), L \in \log\lambda\}$. Notons $T_\lambda$ le tore $\mathbb{C}/\{\mathbb{Z}\cdot L + \mathbb{Z}\cdot 2i\pi\}$, qui est isomorphe à $\mathbb{C}^*/z \sim \lambda z$, et $\pi : \mathbb{C} \to T_\lambda$ la projection. Notons $m(T_\lambda, (L, p/q))$ le module de $T_\lambda$ par rapport à la classe des courbes isotopes à $\pi([0, qL - p\cdot 2\pi i])$. Notons enfin $m(T_\lambda, p/q)$ le sup des modules relatifs à une courbe de nombre de rotation $p/q$. Alors

**Lemme 5.4** $\sum_{\lambda'} \frac{\pi}{\log\lambda'} < m(T_\lambda, p/q) = \sup_L\ \{m(T_\lambda, (L, p/q))\} = \sup_L\ \{\frac{2\pi}{q^2\cdot 2r(L,p/q)}\} = \frac{\pi}{q^2 r(\lambda,p/q)}$ *. Ainsi* $q^2 r(\lambda, p/q) < 1/\sum_{\lambda'} \frac{1}{\log\lambda'} \le \log\lambda'$ *pour tout* $\lambda'$.

**Corollaire 5.5** *Soit $f$ un polynôme avec son Julia connexe. Alors tout point périodique répulsif ou parabolique admet un nombre fini d'acces externes. Chaque acces est périodique.*

**Lemme 5.6** *Soit $\alpha$ un point de Cremer et $U$ une composante de Fatou. Les deux choses suivantes ne sont pas compatibles: $\alpha \in \partial U$ et $\partial U$ est localement connexe. Soit $S$ un disque de Siegel et $U$ une composante de Fatou différente de $S$. Les trois choses ne sont pas compatibles: $\partial S \subset \partial U$; $\partial U$ est localement connexe; $\partial S$ ne contient pas de point critique.*

Un cas particulier: on dit que $f$ est géométriquement fini si $\#(P_f \cap J) < \infty$. Dans ce cas-là chaque composante connexe prépériodique de $J$ est localement connexe (cf. [TY]). Chaque composante périodique de Fatou est d'adhérence localement connexe. Un point périodique dans $J$ est périodiquement $\mathcal{F}$-accessible ssi le point est au bord d'une composante de Fatou périodique.

Exemples où il existe des points périodiques non $\mathcal{F}$-accessibles: le cas $S^1\times$Cantor, ou le cas de tapie de Sierpinski ([MT],[Pi]).

### 5.3 Problème de connexité locale

Supposons que $J$ est connexe. Alors $J$ est localement connexe ssi a) chaque composante de Fatou est d'adhérence localement connexe, et b) de diamètre tendant vers 0.

Questions ouvertes: Y a-t-il un $J$ vérifiant a) mais non b)? Y a-t-il un $J_f$ localement connexe avec un point de Cremer ou un disque de Siegel sans point critique au bord? (un tel $f$ n'est sûrement pas un polynôme) (oui d'après Pascale Roesch, voir [Ro]). Y a-t-il un point périodique $U$-accessible mais non périodiquement $U$-accessible? Soient $A, B$ deux domaines de rotations distincts. Est-ce possible $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$?

Pour $f$ un polynôme est-ce possible qu'un point de Cremer se trouve au bord d'un bassin attractif ou parabolique borné? En cas fraction rationnelle est-ce possible qu'un point de Cremer se trouve au bord d'un domaine de rotation? Est-ce que $\overline{\mathbb{C}} - P_f$ est connexe ssi il n'y a pas de domaine de rotation? La réponse de ces deux questions est négative pour $f$ un polynôme, voir [GM], Goldberg-Milnor.

## 6 Familles de fractions rationnelles, hyperbolicité

**Lemme 6.1** *Soit $f$ un polynôme monique de degré $d$. Notons $A(\infty)$ le bassin d'attraction du point $\infty$, et $K_f = \mathbb{C} - A(\infty)$. Alors $J_f = \partial K_f$; $A(\infty)$ admet une fonction de Green; $J_f$ est connexe ssi tout point critique fini de $f$ est dans $K$; si tout point critique de $f$ est dans $A(\infty)$ alors $J$ est un ensemble de Cantor.*

Pour la famille $f_c : z \mapsto z^2 + c$, on définit l'ensemble de Mandelbrot

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid 0 \in K_c\} = \{c \in \mathbb{C} \mid K_c \text{ est connexe }\} .$$

On montre par le principe de maximum que c'est un compact plein, inclus dans le disque fermé de rayon 2. Nous voulons étudier les composantes connexes de l'intérieur de $M$.

**Définition**. Une fraction rationnelle $f$ est *hyperbolique* s'il existe une métrique conforme $\sigma(z)|dz|$ avec $\sigma(z)$ continue positive au voisinage de $J$ telle que pour tout $z \in J$, $\|Df_z\| \geq \lambda > 1$, où $\lambda$ est indépendant du choix de $z$.

**Proposition 6.2** *$f$ est hyperbolique ssi $P_f \cap J = \emptyset$ ssi tout point critique de $f$ est attiré par un cycle attractif. Si $f$ est hyperbolique et $J_f$ est connexe alors $J_f$ est localement connexe.*

**Preuve**. Utiliser la métrique de Poincaré au voisinage de $J$. ∎

**Lemme 6.3** *Notons $P_k = \{c \in M, \text{ il existe } z \in \mathbb{C}, f_c^k(z) = z, (f_c^k)'(z) = 1\}$. Alors $P_k$ est fini. Soit $c_0 \notin P_k$. Soit $\alpha_0$ un point périodique de période $k$ pour $f_{c_0}$. Alors sur $U$ un voisinage de $c_0$, il existe une fonction holomorphe $\alpha(c) : U \to \mathbb{C}$ avec $\alpha(c_0) = \alpha_0$ et $f_c^k(\alpha(c)) = \alpha(c)$. La fonction $\rho(c) = (f_c^k)'(\alpha(c))$ est aussi holomorphe sur $U$. De plus la fonction $\alpha(c)$ et $\rho(c)$ admettent un prolongement analytique le long de tout chemin de $\mathbb{C} - P_k$.*

**Preuve**. Le fait que $P_k$ est fini est du à la propriété des zéros isolés d'une application holomorphe restreinte sur un ensemble analytique de dimension 1. Le reste est fait par le théorème de Rouché ou le théorème des fonctions implicites. ∎

**Proposition 6.4** *Soit $W$ une composante connexe de $int(M)$ contenant un point hyperbolique $c_0$ (c'est-à-dire $f_{c_0}$ est hyperbolique). Alors tout point de $W$ est hyperbolique. De plus l'application $\rho(c)$ du lemme précédent pour l'orbite attractive de $f_c$ est une représentation conforme de $W$ sur $D$.*

**Preuve**. Soit $\alpha_0$ un point attractive de période $k$ pour $f_{c_0}$. Alors $f_{c_0}^{mk}(0) \to \alpha_0$ lorsque $m \to \infty$. La famille $\{g_m(c) = f_c^{mk}(0) : W \to \mathbb{C}\}$ est bornée donc normale (on a $|M| \leq 2$, $|K_c| \leq 4$ pour $c \in M$ et $g_m(c) \in K_c$). Toute fonction limite coincide localement avec $\alpha(c)$, la solution locale du lemme 6.3. Donc $\alpha(c)$ se prolonge en $W$ et $\lim_{m\to\infty} g_m(c) = \alpha(c)$ uniformément sur tout compact de $W$. De plus $f_c^k(\alpha(c)) - \alpha(c) = 0$ sur $W$ (car c'est vrai sur un voisinage de $c_0$). S'il existe $c' \in W$ tel que $\alpha(c')$ soit répulsif pour $f_{c'}$, alors c'est le cas dans un voisinage de $c'$. De plus $g_m(c) = f_c^{mk}(0) = \alpha(c)$ pour tout $m \geq m'$ et tout $c$ au voisinage de $c'$. Ainsi $g_{m+1}(c) - g_m(c) = 0$ localement et donc globalement. Ceci est impossible car c'est un polynôme de degré $2^{(m+1)k}$. Ainsi pour $\rho(c) = (f_c^k)'(\alpha(c))$, on a $|\rho(c)| \leq 1$ en $W$. Comme une fonction holomorphe non constante est ouverte, on a $|\rho(c)| < 1$ et $\alpha(c)$ est en effet attractif pour tout $c \in W$.

L'application $\rho : W \to D$ est aussi propre: soit $c_n \in W$, $c_n \to c$, $c \in \partial W$ et $\rho(c_n) \to x \in D$. Alors $c$ admet un cycle attractif, ainsi que les points voisin de $c$. Donc $c \in int(M)$. Contradiction avec $c \in \partial W \subset \partial M$.

Il faut encore un effort pour montrer que $\rho$ est de degré 1. Voir [DH2]. ∎

Pour étudier la stabilité structurelle de la famille, nous avons besoin de:

**Théorème 6.5** *(Mañé-Sad-Sullivan, Sullivan-Thurston et Słødkowski) Un mouvement holomorphe sur $D$ d'un ensemble $X \in \overline{\mathbb{C}}$ se prolonge de manière unique à un mouvement holomorphe continu sur $D$ de $\overline{X}$, et se prolonge à un mouvement holomorphe continu quasi-conforme sur $D$ de $\overline{\mathbb{C}}$.*

**Définition**. Une application $\Phi : (\lambda, z) \to \Phi(\lambda, z)$, $D \to \overline{\mathbb{C}}$ est un *mouvement holomorphe* sur $D$ de $X$ si $\Phi(0, \cdot) = id$, $\Phi^\lambda : X \to \overline{\mathbb{C}}$ est injective et $\Phi_z : D \to \overline{\mathbb{C}}$ est holomorphe. On dit que $\Phi$ est quasi-conforme si $\Phi^\lambda$ est quasi-conforme, ce qui a un sens si $X = \overline{\mathbb{C}}$.

**Preuve**. On ne montre ici que le prolongement au $\overline{X}$. Pour le cas général, voir par exemple [Do2]. Quitte à normaliser on peut supposer $0, 1, \infty \in X$ et $\Phi^\lambda|_{\{0,1,\infty\}} = id$. Posons $X' = X - \{0, 1, \infty\}$. La famille $\mathcal{A} = \{\Phi_z : D \to \overline{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\},\ z \in X'\}$ est donc normale. Nous allons appliquer le résultat suivant à plusieur reprises: la limite uniforme sur compact d'une suite de fonctions holomorphes ne s'annulant pas est soit la fonction nulle soit une fonction holomorphe qui ne s'annule pas.

Soit $x_n \in X'$, $x_n \to x \in \{0, 1, \infty\}$ et $\lim_{n\to\infty} \Phi_{x_n} = f$. Alors $f(0) = \lim \Phi(0, x_n) = x$. Donc $f(\lambda) \equiv x$ et $f = \Phi_x$. Soient $f = \lim_{x_n \to x} \Phi_{x_n}$ et $g = \lim_{y_n \to y} \Phi_{y_n}$, avec $x_n, y_n \in X'$, $x_n \neq y_n$ et $x, y \in \overline{X'} - \{0, 1, \infty\}$. Comme $\Phi_{x_n}(\lambda) - \Phi_{y_n}(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in D$, et $f(0) - g(0) = x - y$ on a $f \equiv g$ si $x = y$ et $f(\lambda) \neq g(\lambda)$ pour tout $\lambda \in D$ sinon. Le premier cas nous permet de définir $\Phi_x = f$ de manière unique, pour tout $x \in \overline{X'}$. Le deuxième cas nous montre que $\Phi(\lambda, x) \neq \Phi(\lambda, y)$, pour tout $\lambda \in D$, $x, y \in \overline{X}$, et $x \neq y$. D'où l'injectivité de $\Phi^\lambda$. Ceci prolonge $\Phi$ en un mouvement holomorphe sur $D$ de $\overline{X}$.

La continuité de $\Phi$ se démontre par $\|\Phi(\lambda_n, x_n) - \Phi(\lambda, x)\| \leq \|\Phi(\lambda_n, x_n) - \Phi(\lambda_n, x)\| + \|\Phi(\lambda_n, x) - \Phi(\lambda, x)\|$ et la convergence uniforme sur compact de la limite $\Phi^{x_n} \to \Phi^x$. ■

Pour $W$ une composante connexe hyperbolique, l'application $\rho : W \to D$ se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de $\overline{W} - \{\rho^{-1}(1)\}$. En particulier $\partial W$ est $\mathbb{R}$-analytique sauf en un point. Notons $c_W = \rho^{-1}(0)$ le *centre* de $W$.

**Théorème 6.6** *Soit $c \in \mathbb{C}$. L'ensemble $Q(c) = \{c' \in \mathbb{C}, f_c, f_{c'}$ sont quasi-conformément conjugués$\}$ coincide avec $\{c\}$ si $c \in \partial M$ ou bien $c = c_W$ est le centre d'une composante hyperbolique, et coincide avec $\mathbb{C} - M$ si $c \notin M$ et avec $W - \{c_W\}$ si $c \in W - \{c_W\}$ , où $W$ est une composante connexe de int$(M)$ (notons qu'une composante connexe non hyperbolique n'a pas de centre).*

**Preuve**. Pour montrer une version faible du théorème dans le cas $c \in W$ ou $c \in W' = \mathbb{C} - M$, il suffit d'appliquer le $\Lambda$-lemma. On montre d'abord facilement que $P_k \subset \partial M$ pour tout $k$. En suite on remarque pour $c \in W$ on possède un mouvement holomorphe sur $W$ de l'ensemble des points périodiques répulsifs $X_c$ de $f_c$ (lemme 6.3). On obtient ainsi un mouvement holomorphe continue de $\overline{X_c} = J_c$. Ceci nous donne une conjugaison topologique entre $f_c|_{J_c}$ et $f_{c'}|_{J_{c'}}$ pour tout $c' \in W$. Une étude sur le comportement des composantes de Fatou par raport au paramètre nous fournit une conjugaison quasi-conforme entre $f_c, f_{c'}$ pour $c, c' \in W$ non centre de $W$ (voir [MSS]).

Le cas $c \in \partial M$ est fait par des chirurgies holomorphes. Voir [DH1].

Réciproquement, si $f_c$ et $f_{c'}$ sont qc-conjugués, alors il existe un chemin de $c$ à $c'$ avec des polynômes qc-conjugués à $f_c$. Ceci montre que $Q(c)$ est connexe. ■

On conjecture que toute composante connexe de $int(M)$ est hyperbolique. On sait que $M$ est connexe (Douady-Hubbard, Sibony). On conjecture que $M$ est localement connexe (MLC). Celle-ci va impliquer la première conjecture (Douady-Hubbard). Plus précisément, décomposons $M$ en

$$M = A \sqcup P \sqcup S \sqcup C \sqcup M' \sqcup Y \sqcup R_\infty$$

où $A$ (resp. $P, S, C$) est l'ensemble des $c$ tels que $f_c$ ait une orbite (super)attractive (resp. parabolique, Siegel, Cremer), $M'$ est l'ensemble des polynômes Misiurewicz ($c$ tel que 0 soit strictment prépériodique), $R_\infty$ est l'ensemble des polynômes infiniment renormalisables et $Y$ est le reste, appelé les polynômes de Yoccoz. On a:

$$PSCM'Y\partial R_\infty \subset \partial M \subset PSCM'YR_\infty \ .$$

Conjecture 1. $\partial R_\infty = R_\infty$ et $int(M) = A$ .

Conjecture 2. $\partial M$ est localement connexe en $\partial R_\infty$.

D'après Yoccoz, conjecture 2 implique MLC qui implique à son tour conjecture 1. Quant au problème de connexité locale de $J_c$, la réponse est oui si $c \in APM'Y$, est non si $c \in C$, et est que les deux cas se présentent si $c \in S$ et si $c \in R_\infty$.

**Théorème 6.7** *(Tan Lei) $J_c$ et $M$ sont ressemblant pour $c$ un point de Misiurewicz.*

**Théorème 6.8** *(Shishikura)([Sh2]) $H - dim(J_c) = 2$ pour tout $c$ dans un ensemble résiduel de $\partial M$. $H - dim(\partial M) = 2$.*

# 7 Revêtements ramifiés, Applications des graphes

Soient $R, f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ deux revêtements ramifiés. On dit que $R, f$ sont équivalents si une conjugaison topologique de $R$ est égale à $h \circ f$, avec $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ un homéomorphisme, identité sur $P_f$, et est isotope à l'identité parmi les homéomorphismes fixant $P_f$. Remarquons que $P_R = P_f$, et que c'est bien une relation d'équivalence. Lorsque $f$ est une fraction rationnelle, $h$ doit laisser invariant chaque domaine de rotation et chaque point périodique non répulsif.

Soit $\gamma$ une courbe de Jordan dans $\overline{\mathbb{C}} - P_f$. On dit que $\gamma$ est périphérique si $\gamma$ est homotope dans $\overline{\mathbb{C}} - P_f$ à une courbe de longueur (sphérique) arbitrairement petite.

**Lemme 7.1** *Soit $R = h \circ f$, $f$ une fration rationnelle. Supposons que $\gamma_0 \subset \overline{\mathbb{C}} - P_f$ est une courbe non périphérique, telle que, pour chaque $n \geq 1$, il existe par récurrence une composante $\gamma_n$ de $R^{-1}(\gamma_{n-1})$ non périphérique avec* $\deg(R : \gamma_n \to \gamma_{n-1}) = 1$. *Alors toutes les $\gamma_n$ sont incluses dans l'union des domaines de rotations de $f$.*

Si de plus $\gamma_n$ est homotope à $\gamma_0$, on dit que $\{\gamma_0, \cdots, \gamma_{n-1}\}$ est un cycle de Levy généralisé.

**Corollaire 7.2** *Soit $R = h \circ f$, $f$ une fraction rationnelle. Tout cycle de Levy généralisé de $R$ est inclus dans l'union des domaines de rotations.*

Un revêtement ramifié $R$ est dit à ensemble postcritique fini si $\#P_R < \infty$.

**Théorème 7.3** *(Thurston) Soit $R$ est à ensemble postcritique fini. Supposons que la signature de son orbifold est différente que $(2,2,2,2)$ (voir définition ci-dessous). Alors $R$ n'est pas équivalent à une fraction rationnelle ss'il existe $\Gamma$ une collection finie de courbes formant une obstruction de Thurston (voir définition ci-dessous).*

**Définition**. La *signature* de l'orbifold de $R$ est définie par $\nu(P_R)$, où $\nu : S^2 \to \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ est la fonction minimale telle que $\nu(x) = 1$ pour $x \notin P_R$, et que $\nu(y)$ soit un multiple de $\nu(x) \cdot \deg_x R$ pour tout $x \in R^{-1}(y)$.

**Définition**. Soit $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ une collection finie de courbes de Jordan non périphérique dans $S^2 - P_R$. On définit $R_\Gamma : \mathbb{R}^\Gamma \to \mathbb{R}^\Gamma$ par

$$R_\Gamma(\gamma_j) = \sum_{\gamma' \text{ une courbe dans } R^{-1}(\gamma_j)} \frac{1}{\deg(R : \gamma' \to \gamma_j)} [\gamma']_\Gamma \ ,$$

où $[\gamma']_\Gamma = \gamma_i$ s'il existe $\gamma_i$ homotope à $\gamma'$, et $[\gamma']_\Gamma = 0$ sinon. On dit que $\gamma_i$ est un *enfant* (resp. *arrière enfant*) de $\gamma_j$ si une composante connexe de $R^{-1}(\gamma_j)$ (resp. $R^{-n}(\gamma_j)$ pour un certain $n \geq 1$) est homotope à $\gamma_i$. On dit que $\Gamma$ est *irréductible* si chaque $\gamma_i$ est à la fois parent et enfant, et si pour tout $(i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$, $\gamma_i$ est un arrière enfant de $\gamma_j$. On dit que $\Gamma$ est *$R$-invariant* si les composantes de $R^{-1}(\Gamma)$ sont soit périphériques, soit homotopes à une courbe dans $\Gamma$. On dit que $\Gamma$ est une *obstruction de Thurston* si $\Gamma$ est irréductible (ou $R$-invariant) et $\lambda(R_\Gamma) \geq 1$, où $\lambda(R_\Gamma)$ est la valeur propre positive dominante de Perron-Frobenius pour $R_\Gamma$ (on peut montrer que les deux définitions sont équivalentes).

**Lemme 7.4** *Tout cycle de Levy (avec des courbes disjointes) est une obstruction de Thurston.*

**Preuve**. $R_\Gamma = (a_{ij})$. On a $a_{ij} \geq b_{ij}$, où $b_{ij} = 1$ si $j = i+1$ ou si $i = n$ et $j = 1$; et $b_{ij} = 0$ ailleurs. Alors $\lambda(R_\Gamma) \geq \lambda((b_{ij})) = 1$. ■

Technique sur les disque-composantes: Soit $\Gamma$ une multicourbe irréductible. Supposons que $R^{-k}(D)$ sont des disques pour une certaine disque composante $D$ de $S^2 - \Gamma$ et pour tout $k \geq 1$. Alors $S^2 - \Gamma$ a exactement $n$ disque-composantes $D_1, \cdots, D_n$ (où $n = \max(\#\Gamma, 2)$). Et, quitte à renuméroter, une unique composante $D'$ de $R^{-1}(D_{i+1})$ est homotope à $D_i$ ($D_{n+1} = D_1$). Et $R_\Gamma = (a_{ij})$ vérifie que $a_{i(i+1)} = 1/deg(R : D' \to D_{i+1})$ ($a_{n1} = a_{n(n+1)}$) et $a_{ij} = 0$ ailleurs. Ceci résulte du fait que deux disques disjoints n'ont pas de préimages homotopes, et la préimage d'un disque n'a pas de deux composantes homotopes. Si l'on savait de plus que $\lambda(R_\Gamma) \geq 1$, alors $a_{i(i+1)} = 1$, et $\lambda(R_\Gamma) = 1$. Dans ce cas on dit que $\Gamma$ est un *cycle de Levy dégénéré*. De plus, $R_1 = h \circ R$ n'a plus $\Gamma$ comme obstruction, pour $h$ un homéomorphisme, identité en dehors des $\bigcup_{k,i} R^{-k}(D_i)$, homotope à l'identité relatif au bord à l'intérieure des $R^{-k}(D_i)$, et $\#(P_{R_1} \cap R^{-k}(D_i)) \leq 1$.

**Corollaire 7.5** *Tout revêtement ramifié préservant un point par préimage ($F^{-1}(x_0) = \{x_0\}$) est équivalent à un polynôme, à contraction des cycles de Levy dégénéré près.*

**Théorème 7.6** *Soit $F$ un revêtement ramifié. Supposons $F$ a un graph $Q$ connexe topologiquement fini contenant $P_F$, avec $F(Q) \subset Q$. Notons $Q' = F^{-1}(Q)$. Alors pour toute application continue $g : Q' \to Q'$ isotope à $F|_{Q'}$ rel. $P_F$, on peut étendre $g$ en un revêtement ramifié $G$. Et $G$ et $F$ sont équivalents.*

Technique sur les arcs périodiques. Soit $\alpha$ un arc simple dans $S^2 - P_R$ avec les deux extrémités dans $P_R$. On suppose que $\alpha$ est périodique de degré 1. Alors toute obstruction irréductible de Thurston rencontrant $\alpha$ de manière essentielle est un cycle de Levy, et ne rencontre pas les préimages non périodiques de $\alpha$.

Les deux techniques ci-dessus suffit pour donner une classification des polynômes:

**Théorème 7.7** *(Bielefeld-Fisher-Hubbard, Poirier) Tout polynôme à ensemble postcritique fini possède un arbre de Hubbard (resp. un graphe critique) invariant. A partir d'un arbre de Hubbard sans sous arbre périodique non critique (resp. un graphe critique admissible) on peut construire un unique polynôme.*

Pour une démonstration, voir [BFH] et [Po1], [Po2].

# Références

[Be] Beardon, Iteration of rational functions, Springer Verlag, 1991

[Bl] Blanchard,

[Br] Brolin, Invariant sets under iteration of rational functions, Arkiv för matematik, Band 6 nr 6, 1965

[BFH] Bielefeld, Fisher et Hubbard: prépublication SUNY Stony Brook, Mars 1991, published

[CG] Carslson et Gamelin, Complex cynamics, Springer Verlag, 1994

[DH1] Douady-Hubbard, On polynomial-like mappings, ENS

[DH2] Douady-Hubbard, Publication d'Orsay, 1985-86

[Do1] A. Douady, Séminaire Bourbaki,1986

[Do2] A. Douady, Séminaire Bourbaki,1993

[GM] Goldberg-Milnor, Fixed point portrait

[Ly] Lyubich, The dynamics of rational transforms: the topological picture, Russian Math. Surveys. 41, 1986, 43-117

[Ma] R. Mañé, Non recurrence

[Mc] C. McMullen, Complex dynamics and renormalization

[Mi] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures, Vieweg, 1999

[MS] C. McMullen-Sullivan: QC III

[MSS] Mañé-Sad-Sullivan

[MT] Milnor et Tan Lei: Appendice dans ...

[Pe1] Petersen, PLY

[Pe2] Petersen, Non elliptic

[Pi] Pilgrim. Thesis

[Po1] Poirier, Critical Portraits, prépublication SUNY Stony Brook, Juin 1993

[Po2] Poirier, Hubbard Trees, prépublication SUNY Stony Brook, Juin 1993

[Pr] Przytycki, prépublication SUNY Stony Brook, juin 1993.

[Ro] P. Roesch, thèse de l'ENS Lyon, 1997

[Ru] Rudin, Real and complex analysis

[Sh1] M. Shishikura, Surgery, Journal de l'Ecole Normale Supérieure

[Sh2] M. Shishikura, Hausdorff dimension, Ann. of Math. 1998

[St] Steinmetz, Rational Iteration, complex analytic dynamical systems, Walter de Gruyter, 93

[Ta1] Tan Lei, Matings of quadratic polynomials

[Ta2] Tan Lei, Branched coverings and cubic Newton maps

[TY] Tan Lei et Yin Yongcheng, Local connectivity of the Julia set for geometrically finite rational maps, Science in China