

Equations intégrales et équations différentielles

17 avril 2014

0. Motivation

Exemple .

On cherche une fonction inconnue $x(t)$ vérifiant l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a \cdot x(s) ds$$

Dans la suite on va travailler dans un cas concret (mais la méthode est la même dans le cas abstrait).

$$x(t) = \frac{1}{3} + \int_1^t 2x(s) ds$$

Approximations successives : $x_0(t) \equiv \frac{1}{3}$, $x_1(t) = \frac{1}{3}(1 + 2(t - 1))$, $x_2(t) = \frac{1}{3}(1 + 2(t - 1) + \frac{2^2(t - 1)^2}{2})$, $x_3(t) = \frac{1}{3}(1 + 2(t - 1) + \frac{2^2(t - 1)^2}{2} + \frac{2^3(t - 1)^3}{3!}) \dots$

Ou bien, on définit l'opérateur de Picard : $\Gamma : C_0[-2, 4] \rightarrow C_0[-2, 4]$ tel que

$$\Gamma(x)(t) = \frac{1}{3} + \int_1^t 2x(s) ds.$$

Notre problème devient sous cet angle le problème du point fixe de Γ (un point pour Γ est une fonction continue).

On remarque que pour $t \in [-2, 4]$,

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| = \frac{2^n |t - 1|^n}{n!} \leq \frac{6^n}{n!} \leq \frac{6^{12}}{12!} \frac{6^{n-12}}{13 \cdot 14 \dots n} \leq \frac{6^{12}}{12!} \frac{6^{n-12}}{12 \dots 12} = \frac{6^{12}}{12!} \frac{6^{n-12}}{2^{n-12} 6^{n-12}} = \frac{6^{12}}{12!} \frac{1}{2^{n-12}}$$

Ceci montre que la suite des $x_n(t)$ forme une suite de Cauchy pour la norme sup de $C_0[-2, 4]$ et donc converge uniformément vers une fonction limite $x(t)$.

On a la chance de connaître une expression explicite de $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{3} e^{2(t-1)} .$$

Vérifions que $x(t)$ est bien solution de notre équation intégrale.

Approximations successives : (avec $t_0 = 0$)

$$x_0(t) \equiv x_0$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + \int_0^t ax_0 ds \\ &= x_0 + ax_0 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_0 + \int_0^t a(x_0 + ax_0 s) ds \\ &= x_0 \left(1 + at + \frac{a^2 t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_0 \left(1 + at + \frac{a^2 t^2}{2} + \dots + \frac{a^n t^n}{n!}\right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{converge ponct.}} x_0 \exp(at) \end{aligned}$$

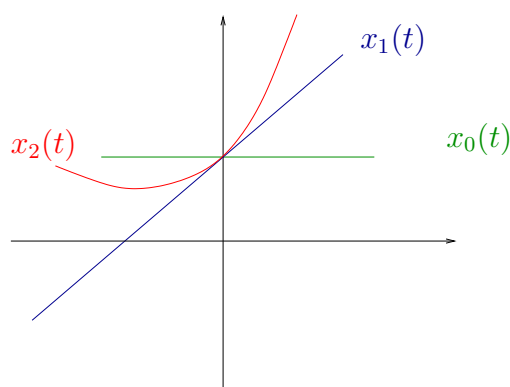


FIGURE 1 –

Problème de Cauchy : équation différentielle

$$(Cauchy) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} \dot{x} = v(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Problème de point fixe de Picard :

$$(Picard) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s, x(s)) ds$$

Proposition 0.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert, $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, $(t_0; x_0) \in \Omega$. Soit

$$\begin{cases} x : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ continue avec} \\ (t, x(t)) \in \Omega, \forall t \in I \end{cases}$$

Alors le couple (I, x) est solution de (Cauchy) (et donc C^1) si et seulement s'il est solution de (Picard).

Démonstration.

Cauchy " \Rightarrow " Picard

Si (I, x) est une solution C^1 au problème de Cauchy, alors

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dx}{ds}(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t v(s, x(s)) ds$$

Cauchy " \Leftarrow " Picard

Puisque $I \ni s \mapsto x(s)$ et $(s, x) \in \Omega \rightarrow v(s, x)$ sont continues, la composée $t \mapsto v(t, x(t))$ est continue. Par le Théorème fondamental d'intégration, $\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t v(s, x(s)) ds = v(t, x(t))$ existe et continue. Comme $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s, x(s)) ds$, la fonction $x(t)$ est bien C^1 et elle est solution du problème de Cauchy. \square

1 Equations et inéquations intégrales, Lemme de Gronwall

Problème 1. Cherchons les solutions continues de l'équation intégrale $u(t) = \int_0^t u(s) ds$. On voit que $u \equiv 0$ est bien une solution. Mais y a-t-il d'autres solutions? On a en effet un résultat d'unicité plus fort :

Lemme 1.1. Soit $L \geq 0$. Si $u \in \mathcal{C}([0, T])$ est une solution de l'inéquation intégrale

$$(**) \quad 0 \leq u(t) \leq L \int_0^t u(s) ds, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Alors $u(t) \equiv 0 \quad \forall 0 \leq t \leq T$.

Démonstration. Soit $M = \sup_{[0, T]} u = \max_{[0, T]} u$. Par continuité, on a $M < +\infty$. Alors

$$u(t) \leq M \longrightarrow u(s) \leq M \xrightarrow{\text{par } (**)} u(t) \leq LMt \longrightarrow u(s) \leq LM s \xrightarrow{\text{par } (**)} u(t) \leq \dots$$

$$u(t) \leq M \frac{L^2 t^2}{2}$$

$$\dots$$

$$u(t) \leq M \frac{L^n t^n}{n!} \rightarrow 0$$

Vrai $\forall n$ d'où $u(t) \equiv 0$.

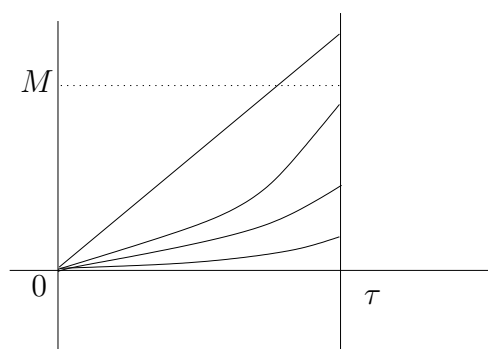


FIGURE 2 –

Problème 2. Cherchons les solutions continues de l'équation intégrale $u(t) = u_0 + L \int_0^t u(s) ds$. On voit que $u(t) = u_0 e^{Lt}$ est bien une solution. Mais y a-t-il d'autres solutions ? On a en effet mieux :

Lemme 1.2. Soit $u_0 > 0$. Si $u \in \mathcal{C}([0, T])$ est une solution de l'inéquation intégrale

$$0 \leq u(t) \leq u_0 + L \int_0^t u(s) ds, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Alors $u(t) \leq u_0 e^{Lt}$, $\forall 0 \leq t \leq T$.

Démonstration. Posons $u(t) = u_0 e^{Lt} y(t)$. Nous allons montrer $y(t) \leq 1$. Notons que $y(0) \leq 1$. Soit $M > 1$ et supposons par absurde que l'ensemble $I_M = \{0 < t \leq T : y(t) \geq M\}$ soit non-vidé. Posons t^* sa borne inférieure. Par continuité (car $y(0) \leq 1$) $y(t^*) = M$. On a

$$u_0 e^{Lt^*} M = u_0 e^{Lt^*} y(t^*) = u(t^*) \leq u_0 + L \int_0^{t^*} u(s) ds = u_0 + \int_0^{t^*} L u_0 e^{Ls} y(s) ds \leq u_0 + u_0 M e^{Lt^*} - u_0 M$$

D'où $0 \leq u_0(1 - M)$. Donc $M \leq 1$, contraire à l'hypothèse. L'ensemble I_M est donc vide et $y(t) \leq 1$, $\forall 0 \leq t \leq T$. \square

On pourrait aussi le démontrer par la méthode de l'opérateur de Picard.

2 Existence et unicité des problèmes de Cauchy et de Picard

Notations :

$I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $t_0 \in I$,

$B = B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ boule ouverte,

$$\underbrace{\mathcal{A} = \{x : \bar{I} \rightarrow \bar{B} \text{ continue}\}}_{\text{ensemble fermé dans } \mathcal{E}} \subset \underbrace{\mathcal{E} = C^0(\bar{I}; \mathbb{R}^n)}_{\text{espace de Banach pour } \|\cdot\|_\infty}$$

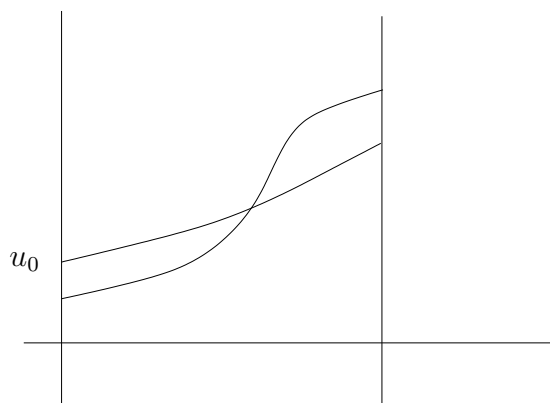


FIGURE 3 –

Définition 2.1. Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ contenant (t_0, x_0) .

$v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

Supposons $\bar{I} \times \bar{B} \subset \Omega$. On appelle opérateur de Picard l'application

$$\Gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$\Gamma(x) = \left[t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t v(s, x(s)) ds, t \in \bar{I} \right]$$

Remarque

Γ est bien définie, car $\bar{I} \times \bar{B} \subset \Omega$, donc $s \mapsto v(s, x(s))$ est continue pour $x \in \mathcal{A}$.

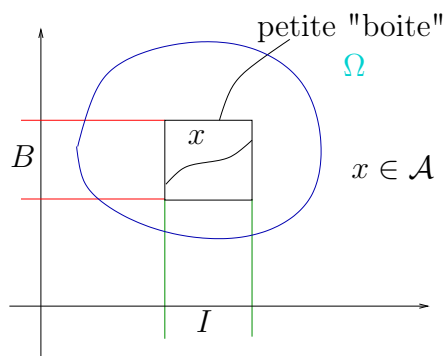


FIGURE 4 –

Théorème 2.2. (Cauchy-Lipschitz) Supposons $(t; x) \in \Omega \rightarrow v(t, x) \in \mathbb{R}^n$, continue en (t, x) et localement Lipschitzienne en x . Alors, $\exists !$ solution locale au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

C'est-à-dire : Pour $(t_0; x_0) \in \Omega$, $\exists \tau > 0$ et une unique application $x : I_\tau :=]t_0 - \tau, t_0 + \tau[\rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant ce système d'équations.

Remarque. C'est un résultat d'existence et unicité sans pour autant donner une formule pour la solution. Bien souvent la solution est implicite et ne s'exprime pas par des formules.

Exemple . v continue ne suffira pas :

$\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $v(t, x) = 2\sqrt{|x|}$ n'est pas Lipschitzienne. $x(0) = 0$,
 $x \equiv 0$ est une solution mais pas unique.

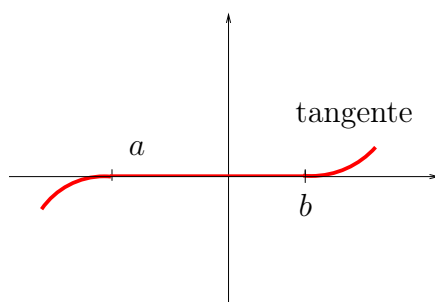


FIGURE 5 –

si $a < 0 < b$, on peut définir une solution C^1 :

$$x(t) = \begin{cases} (t - b)^2, & t > b \\ 0, & a \leq t \leq b \\ -(t - a)^2, & t < a \end{cases}$$

Commençons la preuve de notre théorème. Comme v est continue, elle est en particulier localement bornée. Notre théorème se déduit de la proposition plus précise suivante (on aura besoin de cette version plus tard) :

Proposition 2.3. (A) On peut choisir

(1) un voisinage ouvert \mathcal{U} de $(t_0; x_0)$ sur lequel v est bornée et lipschitzienne en x , on pose L une constante lipschitzienne pour v et M une borne sup pour la norme de v :

$$\sup_{(t;x) \in \mathcal{U}} \|v(t, x)\| \leq M < +\infty, \quad \|v(t, x) - v(t, x')\| \leq L \cdot \|x - x'\|, \quad \forall (t, x), (t, x') \in \mathcal{U} .$$

(2) un $\tau > 0$ assez petit tel que

$$\bar{I}_\tau \times \bar{B}_{M\tau} := [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \bar{B}(x_0; M\tau) \subset \mathcal{U} \quad \text{et} \quad L \cdot \tau < 1.$$

(B) Pour un tel couple (\mathcal{U}, τ) il existe une unique solution $x(t)$ du problème de Cauchy. Elle est définie au moins sur l'intervalle $\bar{I}_\tau := [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, et son graphe sur \bar{I}_τ est inclus dans $B_{M\tau} := \bar{B}(x_0; M\tau)$.

Démonstration.

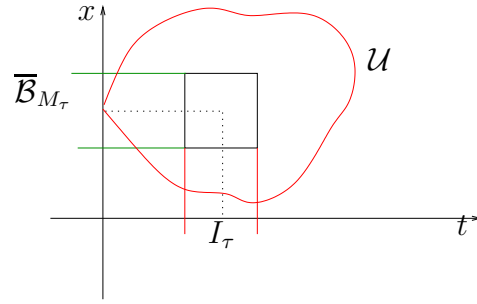


FIGURE 6 –

Avec ce choix on définit

$$\mathcal{A} = \{x : \bar{I}_\tau \rightarrow \bar{B}_{M_\tau} \text{ continue}\} \subset \mathcal{E} = C^0(\bar{I}_\tau; \mathbb{R}^n)$$

et on rappelle que \mathcal{A} , étant un fermé dans un espace de Banach, est un espace métrique complet avec $d_{\mathcal{A}}(x_1, x_2) = \sup_{t \in \bar{I}_\tau} \|x_1(t) - x_2(t)\|_{\mathbb{R}^n}$.

Lemme 2.4. $\Gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, c'est-à-dire $\Gamma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.

Démonstration. Puisque v est continue, Γx est une fonction continue en t . Reste à encadrer son graphe. Pour $t \in \bar{I}_\tau$

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t v(s, x(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|v(s, x(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| = M|t - t_0| \leq M\tau \end{aligned}$$

Donc $\Gamma x(\bar{I}_\tau) \subset \bar{B}_{M_\tau}$. □

Lemme 2.5. Γ est $L\tau$ -Lipschitzienne, c'est-à-dire $\|\Gamma x_1 - \Gamma x_2\|_\infty \leq L\tau \|x_1 - x_2\|_\infty$ pour tout $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \|\Gamma x_1 - \Gamma x_2\|_\infty &= \sup_{t \in \bar{I}_\tau} \|\Gamma x_1(t) - \Gamma x_2(t)\| \\ &\leq \sup_{t \in \bar{I}_\tau} \left| \int_{t_0}^t \|v(s, x_1(s)) - v(s, x_2(s))\| ds \right| \\ &\leq \sup_{t \in \bar{I}_\tau} \left| \int_{t_0}^t L \|x_1(s) - x_2(s)\| ds \right| \\ &\leq L \|x_1 - x_2\|_\infty \sup_{t \in \bar{I}_\tau} \left| \int_{t_0}^t 1 ds \right| \leq L\tau \|x_1 - x_2\|_\infty \end{aligned}$$

□

Par le théorème de Picard, $\exists ! x \in \mathcal{A}$ tel que $x = \Gamma(x)$. En plus, pour toute fonction x_0 dans \mathcal{A} , la suite des fonctions $x_n = \Gamma x_{n-1}$ converge uniformément vers la solution.

Par Proposition 2.1, x est une solution au problème de Cauchy sur l'intervalle I_τ avec condition initiale $x(t_0) = x_0$ et elle est l'unique solution dans \mathcal{A} . Mais on veut montrer une unicité plus forte : toute solution définie dans I_τ est forcément $x(t)$:

Lemme 2.6. *Supposons que $x : \bar{I}_\tau \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution locale au problème de Cauchy, avec $x(t_0) = x_0$. Alors, $x \in \mathcal{A}$.*

Démonstration. Sinon il y a par exemple $t_0 < t' < t_0 + \tau$ avec $x(t') \notin \bar{B}_{M\tau}$, Soit $t^* = \inf\{t > t_0, x(t) \notin \bar{B}_{M\tau}\}$ (temps de la 1ère sortie. Donc pour tout $s \in [t_0, t^*]$, on a $x(s) \in \bar{B}_{M\tau}$ et donc $\|v(s, x(s))\| \leq M$.

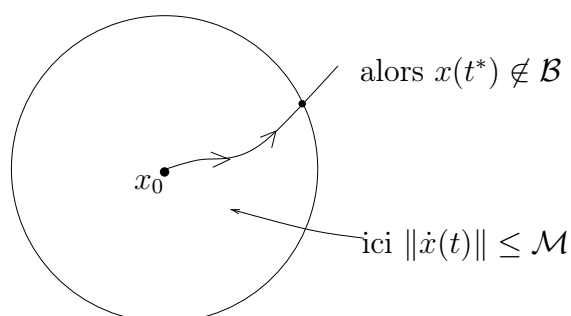


FIGURE 7 –

$M\tau \leq \|x(t^*) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t^*} v(s, x(s)) ds \right\| \leq M|t^* - t_0| < M\tau$ contradiction. Donc toute solution est nécessairement dans \mathcal{A} . Comme la solution dans \mathcal{A} est unique. Il existe une unique solution. \square

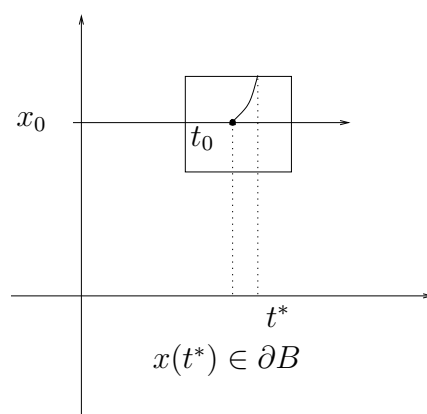


FIGURE 8 –

3 Géométrie des équations différentielles, champs de vecteurs

Rappel. si $\vec{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une courbe C^1 , alors $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \frac{d\vec{\gamma}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\gamma}(t + \Delta t) - \vec{\gamma}(t)}{\Delta t}$ est la limite de vecteurs directeurs des droites sécantes, et est donc tangent (si $\neq 0$) à la courbe en $\vec{\gamma}(t)$. Ainsi si on trace le vecteur $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ au point $\vec{\gamma}(t)$ pour tout t , on voit apparaître une famille de vecteurs tangents partout à la courbe.

Dans le cas particulier où $\vec{\gamma}$ prend la forme $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}$, elle est partout tangente aux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ x'(t) \end{pmatrix}$.

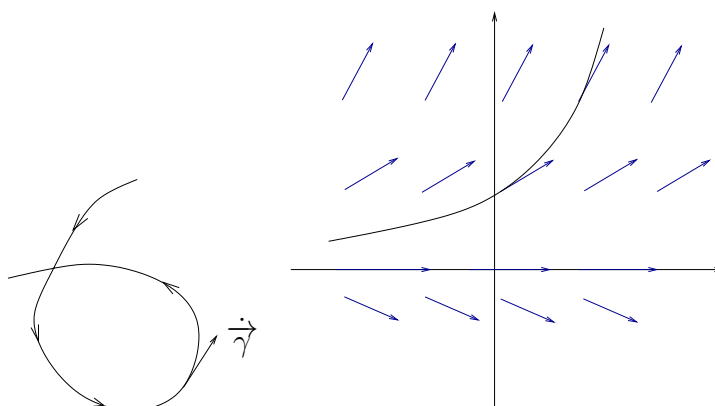


FIGURE 9 – solution et champ de vecteurs

Dans un problème de Cauchy $\begin{cases} (1) \frac{dx}{dt} = v(t, x(t)) \\ (2) x(t_0) = x_0 \end{cases}$

★ L'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est le "domaine de définition", ou l'espace+temps de notre champ de vecteurs.

★ La fonction $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ induit un "champ de vecteurs" $\begin{pmatrix} 1 \\ v(t, x) \end{pmatrix}$, on peut le représenter en traçant à chaque point $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \in \Omega$ le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ v(t, x) \end{pmatrix}$.

★ Le couple $(t_0; x_0) \in \Omega$ est la "condition initiale"

Le système (Cauchy) est dit 'autonome' si v ne dépend pas de t . Dans ce cas $v(x)$ est une fonction définie dans un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ appelé l'espace. Cette fonction induit un champ de vecteurs dans l'espace $x \mapsto v(x)$. On peut le représenter en traçant en chaque point $x \in \mathcal{U}$ le vecteur $v(x)$.

Un système autonome est bien sur un cas particulier du système général. Réciproquement, un système non-autonome peut se transformer en un système autonome en

rajouter une dimension. Il suffit de poser $X = \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix}$ et $V(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ v(s, x) \end{pmatrix}$ pour obtenir l'ed $\dot{X} = V(X)$.

Géométrie : Une solution $x(t)$ du problème de Cauchy vérifie que $x'(t) = v(t, x(t))$. Dans l'espace + temps, la dérivée de son graphe $\begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}$ est $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}$, qui est aussi le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ v(t, x(t)) \end{pmatrix}$ au point $\begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}$ du champ de vecteurs dans l'espace+temps induit par v .

Ainsi résoudre un problème de Cauchy revient à trouver une courbe paramétrée passant pas $\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$ et tangente partout au champ de vecteurs donné par $\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}$ (voir Figure 9).

Exemple 1) $\frac{dx}{dt} = x$, $x(t_0) = x_0$ (dans \mathbb{R})

solution $x(t) = x_0 e^{t-t_0}$, $t \in \mathbb{R}$

Représentation graphique

- en espace + temps

- en espace (sans temps) que lorsque l'équation ne dépend pas explicitement de t (autonome)

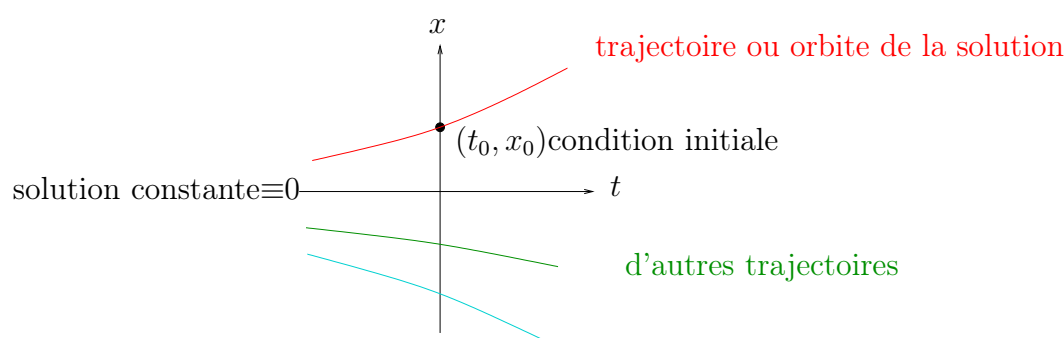


FIGURE 10 – Espace-temps

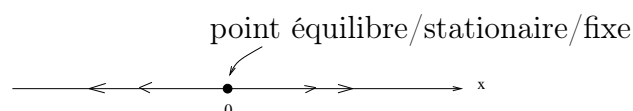


FIGURE 11 – portrait de "phase"

Exemple 2) $\frac{dx}{dt} = x(1-x)$. On dessine d'abord le champ de vecteurs : à chaque point x , on dessine le vecteur $v(x) = x(1-x)$.

si $x(t_0) = \frac{1}{2}$ on s'attend à ce que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$.

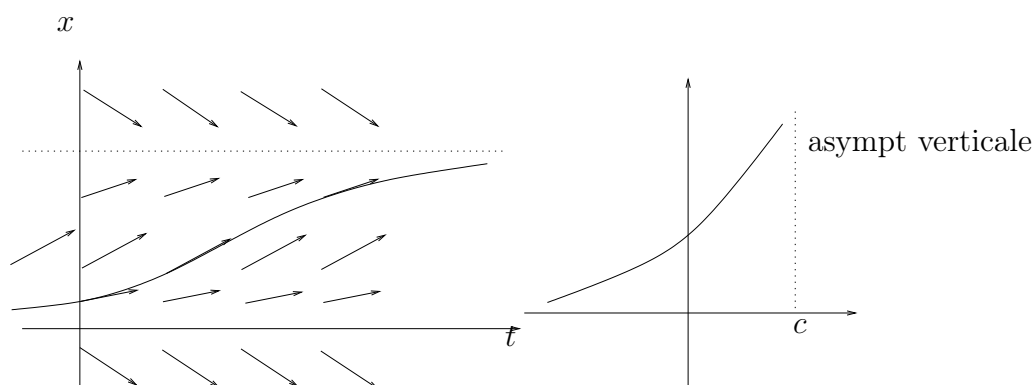


FIGURE 12 – Pour Exemples 2 et 3

Solution par séparation de variable : $x(t) = \frac{1}{(1 + e^{-t})}$. Donc l'observation est bien confirmée par la solution explicite.

Exemple 3) ("Explosions" en temps fini.) $\frac{dx}{dt} = x^2$, $\frac{dx}{x^2} = dt$, $\frac{1}{x} = c - t$, $x = \frac{1}{c - t}$.

Exemple 4) (Domaine de définition, Problème aux bords) $\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$, $(t; x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

$$x dx + t dt = 0, x^2 + t^2 = \text{constante}$$

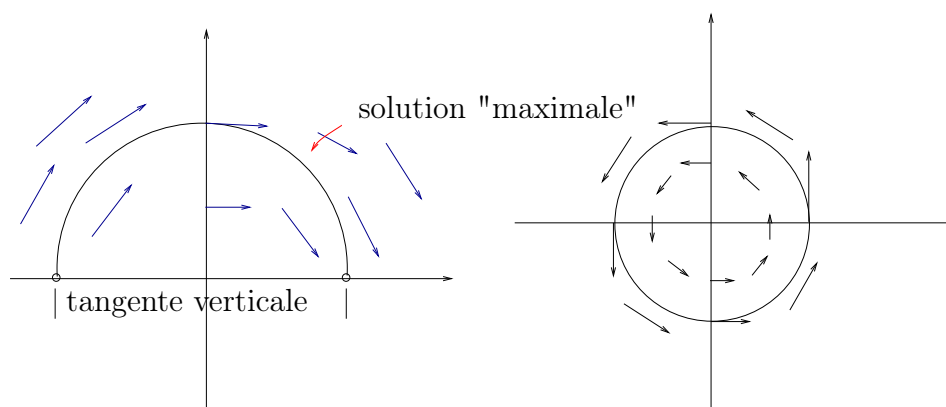


FIGURE 13 – Pour Exemples 4 et 5

Exemple 5) En dimension 2 autonome $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, avec
comme champ de vecteurs $v(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

orbite périodique période $T = 2\pi$

solution

$$\vec{x}(t) = r \begin{pmatrix} \cos(t - c) \\ \sin(t - c) \end{pmatrix}$$

4 Solution locale et maximale

Soient $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue en (t, x) et localement Lipschitzienne en x .

Définition 4.1. Soit l'équation différentielle $(*) \frac{dx}{dt} = v(t, x)$. On appelle **solution locale** à $(*)$ un couple (I, x) avec

- (1) $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert et non-vide.
- (2) $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 avec $(t, x(t)) \in \Omega$, $\forall t \in I$ qui vérifie $(*)$, $\forall t \in I$.

Attention. On ne parle plus de condition initiale ici.

Définition 4.2. Soit (I, x) une solution locale. Une autre solution locale (J, y) est un **prolongement** de (I, x) , si $I \subset J$ et $y|_I = x$. On dit que (I, x) est une **solution maximale**, si elle est une solution locale qui n'admet pas de prolongement.

Lemme 4.3. (recollement) Soit (I_1, x_1) et (I_2, x_2) deux solutions locales qui se croisent, c'est-à-dire qu'il existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tel que $x_1(t_0) = x_2(t_0)$. Alors :

- (1) $x_1|_{I_1 \cap I_2} = x_2|_{I_1 \cap I_2}$ et on obtient un prolongement avec (2) $x(t) = \begin{cases} x_1(t), t \in I_1 \setminus I_2 \\ x_1(t) \text{ ou } x_2(t), t \in I_1 \cap I_2 \\ x_2(t), t \in I_2 \setminus I_1 \end{cases}$

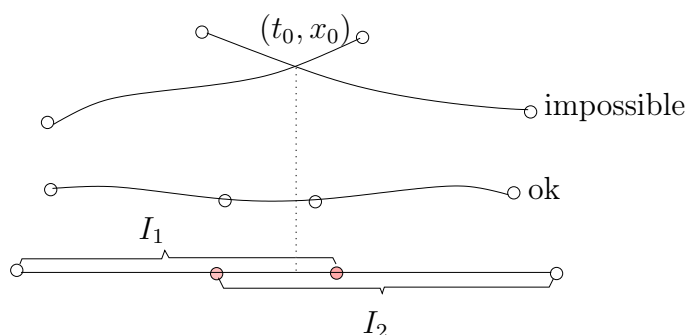


FIGURE 14 –

Démonstration. Si l'on démontre (1) on a clairement (2).

Preuve de (1). Soit $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, $t_0 \in I_1 \cap I_2$. Notons $E = \{t \in I_1 \cap I_2 : x_1(t) = x_2(t)\}$. Supposons que $E \neq I_1 \cap I_2$, par exemple qu'il y a $t^* = \inf\{t > t_0 : x_1(t) \neq x_2(t)\}$. Alors $x_1(t) = x_2(t)$, $t_0 < t < t^*$. Or x_1 et x_2 sont continues $\Rightarrow x_1(t^*) = x_2(t^*) = x^*$ et $(t^*, x^*) \in \Omega$.

Par le Théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué dans un voisinage de (t^*, x^*) , on sait qu'il existe une unique solution locale sur $]t^* - \tau, t^* + \tau[$. Donc $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in]t^* - \tau, t^* + \tau[$ ce qui contredit la définition de t^* .

On pourrait aussi montrer que $\{t \in I_1 \cap I_2, x_1(t) = x_2(t)\}$ est un ouvert (par Cauchy-Lipschitz) et un fermé (car continue). Et on utilise la connexité de $I_1 \cap I_2$ pour conclure. \square

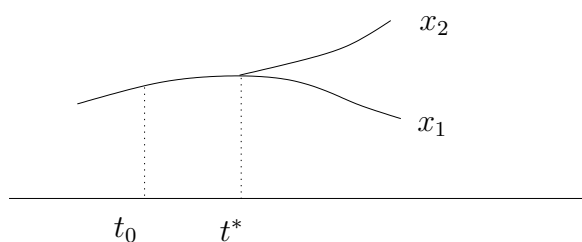


FIGURE 15 –

Théorème 4.4. (*Existence et unicité des solutions maximales*). Soient $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue en (t, x) et localement Lipschitzienne en x . Alors $\forall (t_0; x_0) \in \Omega, \exists!$ solution maximale au problème de Cauchy : $(*) \frac{dx}{dt} = v(t, x), x(t_0) = x_0$. Autrement dit à tout point (t_0, x_0) il existe une unique solution maximale passant par (t_0, x_0) .

Démonstration.

Soit $\{(I_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ l'ensemble des solutions locales (I_α, y_α) de l'équation $\frac{dx}{dt} = v(t, x)$ telle que $t_0 \in I_\alpha$ et $y_\alpha(t_0) = x_0$. Soit $I = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$ (intervalle ouvert).

Alors $\forall t \in I, \exists I_\alpha$ tel que $t \in I_\alpha$. On définit $x(t) \equiv y_\alpha(t)$. Le lemme du recollement assure que la fonction $x(t)$ est bien définie (i.e. elle ne dépend pas du choix de α). Alors (I, x) est une solution locale qui contient toute autre solution locale du problème de Cauchy, donc non-prolongeable, donc maximale. \square

Forcément $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < t_0 < b \leq +\infty$. Cet ensemble est appelé **l'intervalle de temps de vie** du problème de Cauchy.

Remarque. Ce résultat est abstrait. Il ne donne pas de recette pour trouver l'intervalle de temps de vie avec une condition initiale donnée.

Exemple. Pour $dx/dt = x^2, x(0) = \pm 1$. Quel est l'intervalle de temps de vie pour chacune des solutions?

Etudier $dx/dt = x^2 + 1, x(0) = 0$.

Montrer que tous les cas d'intervalles sont possibles.

Théorème 4.5. (*non accumulation interne*) Soient $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue en (t, x) et localement Lipschitzienne en x . Soit I l'intervalle de temps de vie d'une solution maximale $x(t)$. Alors la courbe $(t, x(t))$ n'a pas de points d'accumulation dans Ω lorsque t tend vers un bord de I .

Démonstration. Soit $I =]a, b[$. On suppose que $(t_n, x(t_n))$ tend vers un point limite dans Ω lorsque t tend vers b^- .

Alors nécessairement ce point limite est de la forme (b, x^*) et $b < +\infty$.

On peut appliquer la Proposition 2.3 (A) au point (b, x^*) pour trouver $\mathcal{U} \subset \Omega$ un

voisinage de (b, x^*) et $\|v|_{\mathcal{U}}\| \leq M < +\infty$ et $\|v(t, x) - v(t, x')\| \leq L\|x - x'\|$ pour tout $(t, x), (t, x') \in \mathcal{U}$, et un $\tau > 0$ tel que $L\tau < 1$ et $]b - 2\tau, b + 2\tau[\times B(x^*, M\tau + \tau) \subset \mathcal{U}$.

Pour toute condition initiale (t_0, x_0) se trouvant dans $]b - \tau, b + \tau[\times B(x^*, \tau)$, on a

$$[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \overline{B}(x_0, M\tau) \subset]b - 2\tau, b + 2\tau[\times \overline{B}(x^*, M\tau + \tau) \subset \mathcal{U}.$$

Proposition 2.3 (B), appliqué au triplet $((t_0, x_0), \mathcal{U}, \tau)$, assure alors l'existence d'une solution locale de condition initiale (t_0, x_0) définie (au moins) sur $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

Or pour n assez grand $(t_n, x(t_n)) \in]b - \tau, b[\times B(x^*, \tau)$. Recoller avec la solution locale de cette condition initiale on voit que $x(t)$ est prolongeable au temps $t_n + \tau > b$, ce qui contredit l'hypothèse que la solution maximale n'était pas définie au delà de b . \square

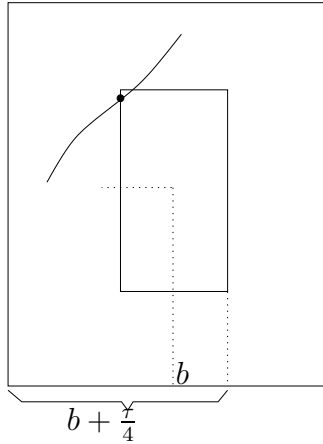


FIGURE 16 –

5 Semi-continuité supérieure de temps de vie des solutions

Théorème 5.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe. Soit $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que v et $\partial v / \partial x$ sont continues en (t, x) . Soit (I, y) une solution maximale passant par $(t_0, x_0) \in \Omega$. Soit $K \subset I$ un sous-intervalle compact. Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si $\|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$ alors la solution maximale (\tilde{I}, \tilde{y}) qui passe par (t_0, \tilde{x}_0) vérifie $K \subset \tilde{I}$ et $\sup_{t \in K} \|y(t) - \tilde{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$.*

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Notons $G = \{(t, y(t)) : t \in \mathcal{K}\}$ graphe de y (sur \mathcal{K}) l'image continue d'un compact.

$\Rightarrow G$ compact. Or, Ω ouvert, donc $\exists r > 0$ au voisinage de G dans Ω .

Quitte à remplacer ε par $\min(\varepsilon, r) > 0$, on peut supposer que le voisinage "tubulaire"

$$\mathbb{W} = \{(t, x) : t \in \mathcal{K}, \|x - y(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon\} \text{ est inclus dans } \Omega.$$

Par compacité $L = \sup_{(t,x) \in \mathbb{W}} \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\| < +\infty$.

Soient $\delta < \varepsilon$ et $\tilde{x}_0 \in B(x_0, \delta)$. On note (\tilde{I}, \tilde{y}) la solution maximale qui passe par (t_0, \tilde{x}_0) .

Pour simplifier, prenons $t_0 = 0, T > 0, \mathcal{K} = [0, T]$. Soit $u(t) \equiv \|y(t) - \tilde{y}(t)\|$ pour $t \in I \cap \tilde{I} (\ni 0)$. Pour $t > 0, t \in I \cap \tilde{I}$:

$$u(t) = \|x_0 - \tilde{x}_0 + \int_0^t v(s, y(s)) - v(s, \tilde{y}(s)) ds\| \leq \delta + \int_0^t \|v(s, y(s)) - v(s, \tilde{y}(s))\| ds.$$

Si $u(s) \leq \varepsilon, \forall 0 \leq s \leq t$ on a $\|v(s, y(s)) - v(s, \tilde{y}(s))\| \leq L \cdot \|y(s) - \tilde{y}(s)\| \forall 0 \leq s \leq t$ (par l'inégalité d'accroissements finis, car $B(y(s), \varepsilon)$ est un convexe) et

$$u(t) \leq \delta + \int_0^t Lu(s) ds \quad \xRightarrow{\text{Lemme de Gronwall}} \quad u(t) \leq \delta \exp(Lt).$$

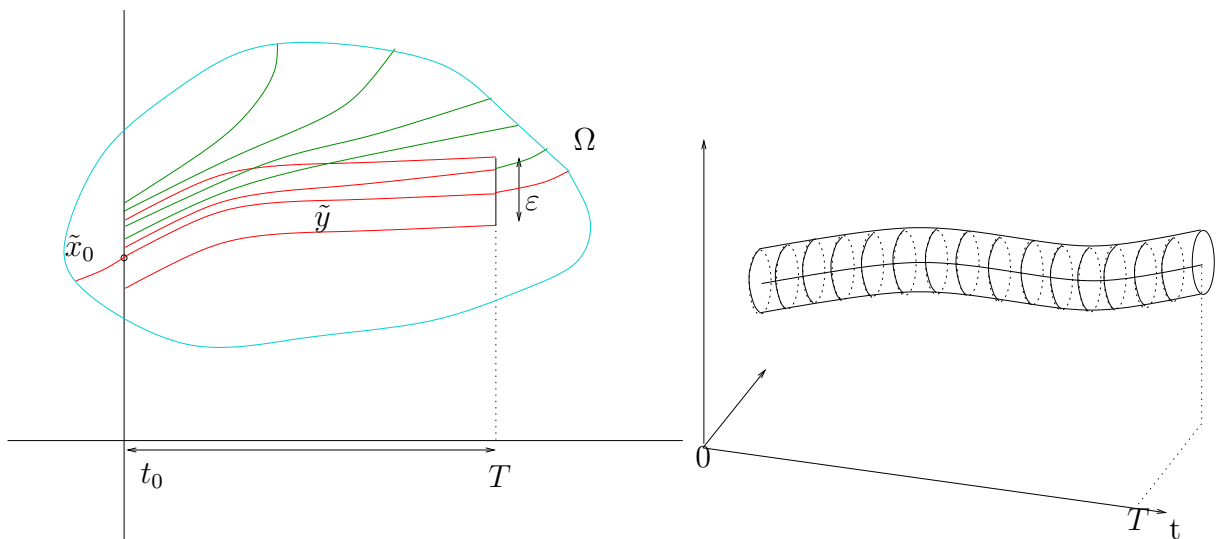


FIGURE 17 –

Prenons $\delta < \varepsilon \exp(-LT)$. Alors la solution \tilde{y} reste dans le voisinage tubulaire $\mathbb{W} \forall 0 \leq t \leq T$. Sinon soit $t^* < T$ l'inf des temps de sortie. On a par continuité $\|\tilde{y}(t^*) - y(t^*)\| = \varepsilon$ et $\varepsilon = \sup_{t \in [0, t^*]} \|y(t) - \tilde{y}(t)\| = \sup_{t \in [0, t^*]} u(t) \leq \delta \exp(Lt^*) < \delta \exp(LT) < \varepsilon$. Une contradiction. Ainsi

$$\sup_{t \in [0, T]} \|y(t) - \tilde{y}(t)\| = \sup_{t \in [0, T]} u(t) \leq \delta \exp(LT) < \varepsilon.$$

□

6 Comparaison

Théorème 6.1. Soient $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}_+$ et $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^n$ tels que $\|v(t, x)\| \leq A(t, \|x\|)$, et que $R \mapsto A(t, R)$ soit croissante.

Soient α et β solutions respectives aux problèmes :

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = A(t, \alpha(t)), & t_0 \leq t < t_+ \\ \alpha(t_0) = R_0 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{d\beta}{dt} = -A(t, \beta(t)), & t_- < t \leq t_0 \\ \beta(t_0) = R_0 > 0 \end{cases}$$

Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \text{ avec } \|x_0\| \leq R_0 \end{cases}$$

admet une solution maximale définie au moins sur $]t_-, t_+[$ et avec

$$(**) \quad \begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \alpha(t) & t_0 \leq t < t_+ \\ \|x(t)\| &\leq \beta(t) & t_- < t \leq t_0 \end{aligned}$$

Exemple . $n = 1$, $\frac{dx}{dt} = x^2 \cos(\log(1 + x^2))$, $x(0) = 1$.

$$|v(t, x)| = |x^2 \cos(\log(1 + x^2))| \leq x^2 \equiv_{def} A(t, x)$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{1-t} \quad (0 \leq t < 1 \equiv t_+), \quad \beta(t) = \frac{1}{1+t} \quad (t_- \equiv -1 < t \leq 0).$$

are solutions of $\dot{\alpha} = A(t, \alpha)$ and $\dot{\beta} = -A(t, \beta)$ with $A(t, u) = u^2$ and $\alpha(0) = \beta(0) = 1$.

La fonction $A(t, u) = u^2$ étant croissante pour $u > 0$, on a

$$-\alpha(t) \leq x(t) \leq \alpha(t), \quad 0 \leq t < 1; \quad -\beta(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad -1 < t \leq 0.$$

Démonstration. Soit $]a, b[$ l'intervalle de temps de vie de $x(t)$. Mettons $t_0 = 0$. On traite d'abord le cas $\|x_0\| < R_0$.

Supposons qu'il existe

$$t^* = \inf\{0 < t < \min\{b, t_+\} : \|x(t)\| > \alpha(t)\}$$

Alors par continuité $\|x(t^*)\| = \alpha(t^*)$ et

$$\begin{aligned} \alpha(t^*) = \|x(t^*)\| &= \|x_0 + \int_0^{t^*} v(s, x(s)) ds\| \leq \|x_0\| + \int_0^{t^*} A(s, \|x(s)\|) ds \\ &< R_0 + \int_0^{t^*} A(s, \alpha(s)) ds = \alpha(t^*) \end{aligned}$$

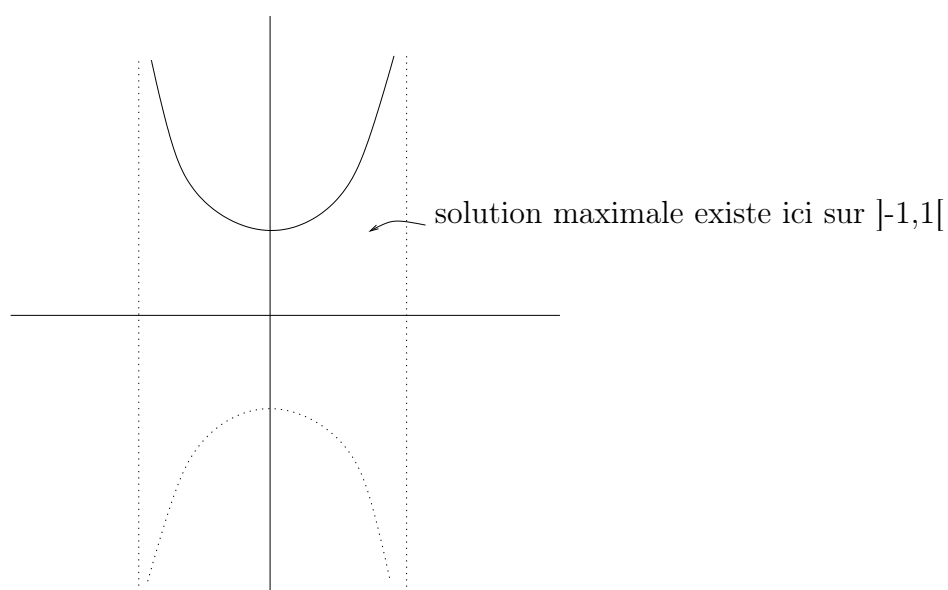


FIGURE 18 – comment

car $\|x(s)\| < \alpha(s)$ sur $]0, t^*[$ et A est croissante. Ceci conduit à une contradiction. Donc sur $]a, \min\{b, t_+\}[$ on a $\|x(t)\| \leq \alpha(t)$. Si $b < t_+$ il y aurait une accumulation interne. On peut donc conclure que $b \geq t_+$ et que la première inégalité de (**) est vérifiée.

Traisons à présent le cas $\|x_0\| = R_0$ par approximations. En remplaçant R_0 par $R_0 + \delta$, $\delta > 0$ on obtient des solutions α^δ et β^δ qui convergent vers α et β , respectivement. Cette convergence est uniforme sur tout compact, par la semi-continuité supérieure de temps de vie. D'où $\forall t_0 \leq t < t_+$, $\|x(t)\| \leq \liminf \alpha^\delta(t) = \alpha(t)$ et (*idem pour* β). \square

D'abord un exemple en dimension 1

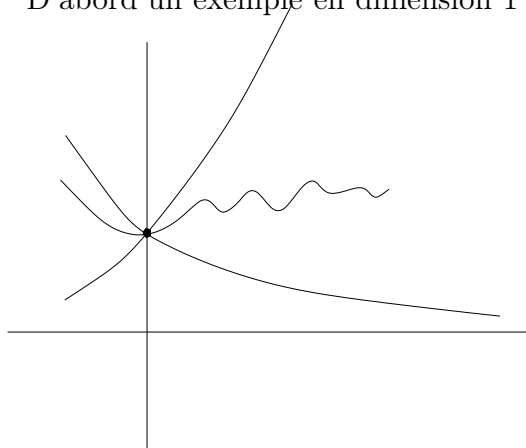


FIGURE 19 – Voici un exemple en dimension 1

7 Convergence dans le cas autonome

Définition Soit $v(x)$ un champs de vecteurs autonome lipschitzien. On dit que x_0 est un **point équilibre** si $v(x_0) = 0$.

Lemme Si une solution $x(t)$ vérifie que $x'(t_0) = 0$ pour un certain t_0 , alors $x(t) \equiv x(t_0)$ et c'est un point équilibre.

Preuve. La fonction $y(t) \equiv x(t_0)$ est une solution de l'équation différentielle $\dot{y} = v(y)$. On conclut par l'unicité du Théorème de Cauchy-Lipschitz. \square

On remarque que l'escalier du diable ne peut jamais être solution d'une équation différentielle lipschitzienne.

Théorème 7.1. Soient $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $v : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs C^1 autonome. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale de l'équation $\dot{y} = v(y)$ telle que

$$I =]a, +\infty[\quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0 \in \mathcal{U}.$$

Alors $v(y_0) = 0$.

Démonstration. On fixe un voisinage W de y_0 dans lequel v est L -Lipschitzienne pour un certain L .

Nous allons utiliser $|\cdot|$ pour noter la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

Alors il existe $t^* > a$ tel que le bout de trajectoire $\{y(t), t \in [t^*, +\infty[\} \subset W$.

Soit $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer que $|v(y_0)| < \varepsilon$. Pour tout $t \geq t^*$,

$$\begin{aligned} |y(t) - y(t^*) - v(y_0) \cdot (t - t^*)| &\stackrel{\text{T.A.F.}}{\leq} \sup_{t \geq t^*} |y'(t) - v(y_0)| \cdot (t - t^*) \\ &= \sup_{t \geq t^*} |v(y(t)) - v(y_0)| \cdot (t - t^*) \\ &\leq L \sup_{t \geq t^*} |y(t) - y_0| \cdot (t - t^*) \end{aligned}$$

Ce calcul nous force de réduire W . Il existe $W_\varepsilon \subset W$ tel que pour tout $y \in W_\varepsilon$, $L|y - y_0| < \varepsilon$. Il existe alors T_ε tel que pour tout $t \geq T_\varepsilon$, $y(t) \in W_\varepsilon$. D'où $\forall t \geq T_\varepsilon$, en suivant le même calcul que ci-dessus, on a

$$\left| \frac{y(t) - y(t^*)}{t - t^*} - v(y_0) \right| \leq \varepsilon, \quad \text{et donc} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{y(t) - y(t^*)}{t - t^*} - v(y_0) \right| \leq \varepsilon.$$

$$\text{Or, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t) - y(t^*)}{t - t^*} = \frac{y_0 - y(t^*)}{\infty - t^*} = 0 \text{ car } y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} y_0$$

Donc $|v(y_0)| \leq \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a $v(y_0) = 0$. \square

Exemple . $\dot{x} = x(1 - x)$, $x(0) = 1/2$. Notons la solution maximale par (\mathcal{J}, x) .

Remarquons que $y_0(t) \equiv 0$ est solution maximale, et $y_1(t) \equiv 1$ en est une autre (quelles sont les conditions initiales?).

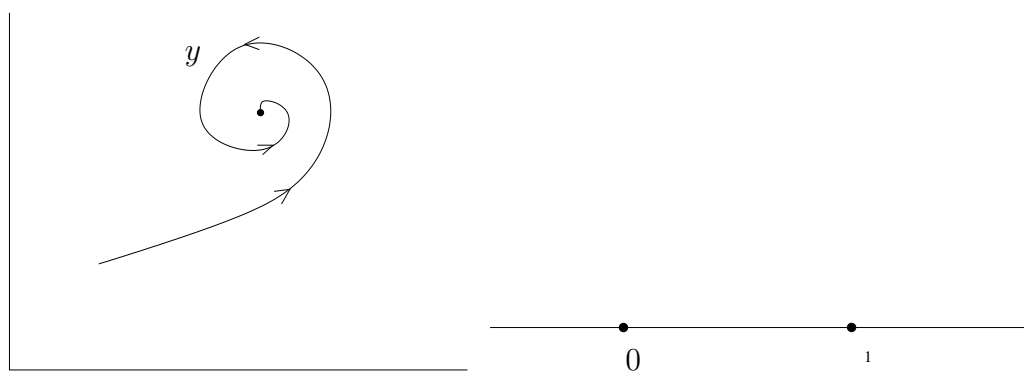


FIGURE 20 –

La fonction $x(t)$, dont l'existence est garantie par le théorème de solution maximale, ne peut pas sortir de l'intervalle $]0, 1[$, par le Théorème 7.1.

Montrons que son intervalle de temps de vie \mathcal{J} est $] - \infty, \infty[$. Supposons le contraire, par exemple c'est $] *, b[$ avec $b < +\infty$. Alors lorsque $t \nearrow b$, $x(t)$ restera borné dans $]0, 1[$. Il existerait donc une suite $t_n \nearrow b$ tel que $\begin{pmatrix} t_n \\ x(t_n) \end{pmatrix}$ converge vers $\begin{pmatrix} b \\ x^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Ceci contredirait le théorème de non-accumulation interne.

Ainsi, $b = +\infty$. De manière similaire, $\mathcal{J} = \mathbb{R}$.

$\dot{x}(t) = x(t)(1 - x(t)) > 0 \forall t \in \mathcal{J}$. La fonction x étant bornée croissante, elle admet des limites :

$$x_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) > 1/2, \quad x_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) < 1/2.$$

Puisque $v(x_+) = 0$ et $v(x_-) = 0$ (Théorème 7.1) $x_+ = 1$ et $x_- = 0$.

8 Barrière dans \mathbb{R}^2

Théorème 8.1. Soit $v : \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{c^0} \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne en x . Soit $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^1(I)$ tel que :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} \geq v(t, \alpha(t)) \\ \dot{\beta} \leq v(t, \beta(t)) \end{cases}, t \in I$$

On considère l'ensemble $J = \{t \in I : \alpha(t) = \beta(t)\}$. Si J est non-vide, alors : J est un segment et $\forall t \in I$, $\begin{cases} t > J & \alpha(t) > \beta(t) \\ t < J & \alpha(t) < \beta(t). \end{cases}$

S'il y a inégalité stricte pour au moins l'une des $\dot{\alpha}$ ou $\dot{\beta}$, alors J contient au plus un point.

Démonstration. Supposons d'abord que par exemple $\dot{\alpha} > v(t, \alpha(t))$, $t \in I$. Soit t_0 tel que $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$. On a envie de montrer que $\alpha(t) > \beta(t)$ pour $t > t_0$.

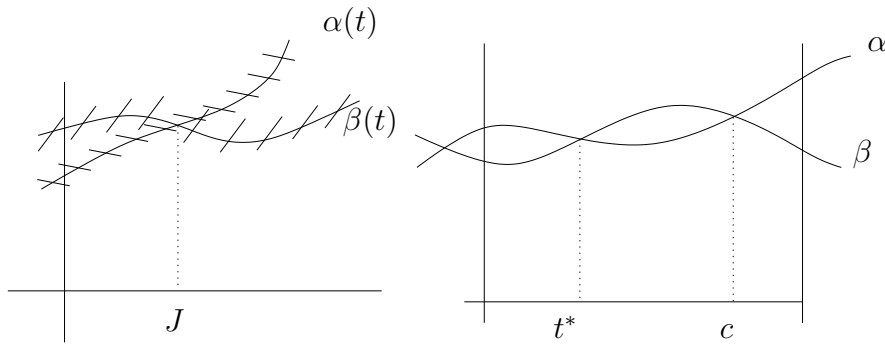


FIGURE 21 –

Soit par absurde que J contient au moins un autre point $c > t_0$.

On distingue deux cas.

Cas 1. Sur un petit intervalle $]c - \delta, c[$ on a $\alpha(t) < \beta(t)$.

Soit $t^* = \sup\{t < c : \alpha(t) \geq \beta(t)\}$. On a alors $t_0 \leq t^* < c$ et $\alpha(t) < \beta(t)$ sur $]t^*, c[$. Par continuité $x^* = \alpha(t^*) = \beta(t^*)$. Donc

$$\frac{\alpha(t) - \alpha(t^*)}{t - t^*} = \frac{\alpha(t) - x^*}{t - t^*} < \frac{\beta(t) - x^*}{t - t^*} = \frac{\beta(t) - \beta(t^*)}{t - t^*} \text{ pour } t \in]t^*, c[.$$

On peut alors prendre la limite vers t^* et nous aurons

$$v(t^*, x^*) < \alpha'(t^*) \leq \beta'(t^*) \leq v(t^*, x^*)$$

une contradiction.

Cas 2. L'intervalle $]c - \delta, c[$ n'existe pas. Il existe donc une suite non stationnaire $t_n \nearrow c$ tel que $\alpha(t_n) \geq \beta(t_n)$. Alors

$$\frac{\alpha(c) - \alpha(t_n)}{c - t_n} \leq \frac{\beta(c) - \beta(t_n)}{c - t_n}.$$

On retrouve une contradiction en laissant t_n tendant vers c

$$v(c, \alpha(c)) < \alpha'(c) \leq \beta'(c) \leq v(c, \beta(c)) = v(c, \alpha(c)).$$

Pour cette première partie, il suffit que v soit continue en t et x .

Traisons à présent le cas où les deux inégalités sont non-strictes. Dans ce cas la condition Lipschitz sur v est nécessaire.

Considérons la fonction : $u(t) = \beta(t) - \alpha(t)$. On suppose que $u(t^*) = 0$ et on prend $t > t^*$ proche de t^* . Alors $\beta(t) = \beta(t^*) + \int_{t^*}^t \beta'(s) ds \leq \beta(t^*) + \int_{t^*}^t v(s, \beta(s)) ds$ et $\alpha(t) = \alpha(t^*) + \int_{t^*}^t \alpha'(s) ds \geq \alpha(t^*) + \int_{t^*}^t v(s, \alpha(s)) ds$. On a $\alpha(t^*) = \beta(t^*)$. Donc

$$u(t) - u(t^*) = u(t) \leq \int_{t^*}^t v(s, \beta(s)) - v(s, \alpha(s)) ds \leq \int_{t^*}^t L|\beta(s) - \alpha(s)| ds \leq \int_{t^*}^t L|u(s)| ds.$$

Si $u(t') > 0$ pour un certain $t' > J$, prenons $t^* = \sup\{t < t' : u(t) \leq 0\}$. Alors $u(t^*) = 0$ par continuité et $0 \leq u(t) \leq \int_{t^*}^t Lu(s)ds \forall t^* < t < t'$. Ceci implique $u(t) \equiv 0 \forall t^* < t < t'$ par le Lemme de Gronwall. Par continuité $u(t') = 0$, impossible. Donc $u(t) \leq 0$ pour tout $t > J$, ainsi $\alpha(t) \geq \beta(t)$ pour tout $t > J$.

Si $u(t') < 0$ pour un certain $t' < J$ on procède de la même manière avec $-u(t)$.

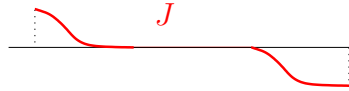


FIGURE 22 –

9 Equations différentielles linéaires

9.1 Cas diagonal et cas diagonalisable

Exemple .

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution admet une formule :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^t \\ e^{3t} - e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{2} \left[e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

On peut aussi calculer les couples (valeur propre, vecteur propre) de la matrice A : $(\lambda_1, \mathbf{v}_1) = (3, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ et $(\lambda_2, \mathbf{v}_2) = (1, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$, et les coefficients dans la solution ci-dessus proviennent des coordonnées de la condition initiale dans la base des vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Définition 9.1. On appelle *équation différentielle linéaire le problème de Cauchy* :

$$(*) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, A \in M_n(\mathbb{R}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Lemme 9.2. Si $\mathbf{x}_1(t)$ et $\mathbf{x}_2(t)$ sont deux solutions de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, alors une combinaison linéaire $a\mathbf{x}_1(t) + b\mathbf{x}_2(t)$ est aussi une solution.

Question. Sachant que $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{v}_1$ et $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{v}_2$. Quelle est la solution du problème de Cauchy de condition initiale $3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$?

Théorème 9.3. Supposons $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Alors la solution à $(*)$ sera : $\mathbf{x}(t) =$

$$\sum_1^n c_k \left[e^{\lambda_k t} \mathbf{e}_k \right], t \in \mathbb{R} \text{ où } \{\mathbf{e}_k\}_k \text{ est la base canonique, et } c_k \text{ est la } k\text{-ième coordonnée de } \mathbf{x}_0.$$

Supposons que A est diagonalisable sur \mathbb{C} , avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ comme valeurs propres, et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^n$ comme vecteurs propres indépendants. Alors pour toute condition initiale $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, la solution à $(*)$ sera :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_1^n c_k \left[e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k \right], t \in \mathbb{R}$$

où les c_k sont déterminées par : $\mathbf{x}_0 = \sum c_k \mathbf{v}_k$, ou encore les coordonnées de \mathbf{x}_0 dans la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Démonstration. La fonction $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k$ vérifie

$$\dot{\mathbf{y}}_k = \lambda_k e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k = e^{\lambda_k t} A \mathbf{v}_k = A(e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k) = A \mathbf{y}_k, \quad \mathbf{y}_k(0) = \mathbf{v}_k.$$

Comme $\mathbf{x}_0 = \sum c_k \mathbf{v}_k = \sum c_k \mathbf{y}_k(0)$, la fonction $\mathbf{x}(t) = \sum c_k \mathbf{y}_k(t)$ est bien solution de $d^*(*)$ par linéarité. Une autre preuve plus instructive est d'effectuer un changement de variable : Soit $P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$ la matrice de passage et D la matrice diagonale des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Posons $\mathbf{x} = P\mathbf{z}$. Notre problème de Cauchy devient $P\dot{\mathbf{z}} = AP\mathbf{z}$,

ou bien $\dot{\mathbf{z}} = P^{-1}AP\mathbf{z} = D\mathbf{z}$, et $\mathbf{z}(0) = P^{-1}\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Donc $\mathbf{x}_0 = P \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum c_k \mathbf{v}_k$,

et $\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$ et

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{z}(t) = (\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} = \sum_1^n c_k [e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k].$$

Remarque

On peut voir par le Théorème de comparaison que $(*)$ admet une solution à tout temps $t \in \mathbb{R}$: On a $\|v(t, \mathbf{x})\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\| =: a\|\mathbf{x}\|$. Comme la fonction $R \mapsto aR$ est croissante, on peut appliquer le théorème 6.1 pour obtenir l'encadrement $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| \exp(\|A\||t|)$ (exo.)

9.2 Cas général

Opérateur de Picard pour le problème de Cauchy $(*)$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(t) &\equiv \mathbf{x}_0, & \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t A \mathbf{x}_0 ds = (1 + tA) \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t A(1 + sA) \mathbf{x}_0 ds = (1 + tA + \frac{t^2 A^2}{2}) \mathbf{x}_0 \\ & & & \dots \\ \mathbf{x}_n(t) &= \dots = (1 + tA + \frac{t^2 A^2}{2} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!}) \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Cette suite converge normalement et uniformément sur tout compact.

$$t \in [-\tau, \tau], \quad \sum_{n \geq 0} \left| \frac{t^n A^n}{n!} \mathbf{x}_0 \right| \leq \sum \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} |\mathbf{x}_0| = \exp(|t| \|A\|) |\mathbf{x}_0|$$

Soit $\mathbf{x}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n(t)$. Alors $\mathbf{x}'_n(t) = A \mathbf{x}_{n-1}(t) \rightarrow A \mathbf{x}(t)$ uniformément normalement sur tout compact, d'où $\mathbf{x}(t)$ est différentiable avec $\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A \mathbf{x}(t)$.

Ceci donne l'idée de la formule de solution en cas général, diagonalisable ou pas.

Définition 9.4. On appelle la matrice

$$\exp(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$$

l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Elle est toujours bien définie car la série converge normalement.

Théorème 9.5. La solution maximale au (*) est donnée par :

$$\mathbf{x}(t) = \exp(tA)\mathbf{x}_0$$

Remarque.

On a même que $t \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(tA) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de class \mathcal{C}^∞ avec dérivée $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$.

Exemple .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}, \dots$$

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= 1 + tA + \frac{t^2 A^2}{2} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) \mathbb{1} + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) A \\ &= (\cos t) \mathbb{1} + (\sin t) A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \text{Rot}_t \end{aligned}$$

de valeurs propres $+i, -i$ et vecteurs propres $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$.

Théorème 9.6. La solution de (*) dans le cas général est de la forme

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \left[e^{\lambda_k t} \mathbf{P}_k(t) \right]$$

où $\{\lambda_k, k = 1, \dots, n\}$ sont les valeurs propres de A , \mathbf{P}_k sont des polynômes en t à valeurs dans \mathbb{C}^n , les n vecteurs $\mathbf{P}_k(0)$, $k = 1, \dots, n$ sont indépendant et les coefficients c_k sont déterminé par

$$\mathbf{x}_0 = \sum c_k \mathbf{P}_k(0).$$

Exemple .

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La solution est

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2 + 3t \\ 3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{donc } \mathbf{P}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut voir dans cet exemple que lorsque $A = Id + N$ avec $N^2 = 0$,

$$e^{tA} = \sum_n \frac{t^n (Id + N)^n}{n!} = \sum_n \frac{t^n (Id + nN)}{n!} = e^t Id + te^t N = e^t (Id + tN).$$

Démonstration du théorème.

Lorsque A est sous forme "bloc" :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \text{ on a } \exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{tA_1} & & \\ & e^{tA_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

En particulier lorsque A est un "bloc" de Jordan, on a :

$$\begin{aligned} \exp\left(t \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & \lambda \end{pmatrix}\right) &= e^{t\lambda} \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= e^{t\lambda} \left(\mathbb{1} + tN + \frac{t^2 N^2}{2} + \dots + \frac{t^m N^m}{m!} \right) \end{aligned}$$

développement fini car N est nilpotent.

Traisons le cas où A de forme quelconque. Soit P la matrice de passage tel que $P^{-1}AP = A_{bloc}$ forme normale de Jordan.

Alors $P^{-1}A^n P = (P^{-1}AP)^n \Rightarrow P^{-1}\exp(tA)P = \exp(t(P^{-1}AP)) = \exp(tA_{bloc}) = \sum e^{t\lambda_k} \mathbf{P}_k(t)$ (où $\mathbf{P}_k(t)$ est un polynôme en t à valeurs matricielles).

D'où $\exp(tA) = \sum e^{t\lambda_k} P \mathbf{P}_k(t) P^{-1}$. □

9.3 Géométrie des solutions

Corollaire 9.7. *Re $\lambda_k < 0$ (resp. > 0) \forall valeur propre λ_k ssi $\forall \mathbf{x}_0$ condition initiale de (*), on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ (resp. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$). On appelle le premier cas **un puits** et le deuxième **une source**. Le cas où $Re\lambda \neq 0$ mais avec changement de signe sera un **col**.*

Démonstration.

Car \forall polynôme $\mathbf{P}(t)$, on a $e^{t\lambda_k} \mathbf{P}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathbf{0}$ lorsque $Re\lambda_k < 0$, et si $Re\lambda_i \geq 0$ il y a des conditions initiales tel que $\mathbf{x}(t) \not\rightarrow \mathbf{0}$.

Remarque.

On a même : Si $Re\lambda_k < -\mu < 0$, $\forall k$, alors $\exists C < +\infty$ tel que $\|\mathbf{x}(t)\| \leq C e^{-\mu t} \|\mathbf{x}_0\|$, $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et $t \geq 0$.

Exemple . Puits (point fixe attractif) : $\forall \lambda$ valeur propre de A : $Re\lambda < 0$

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

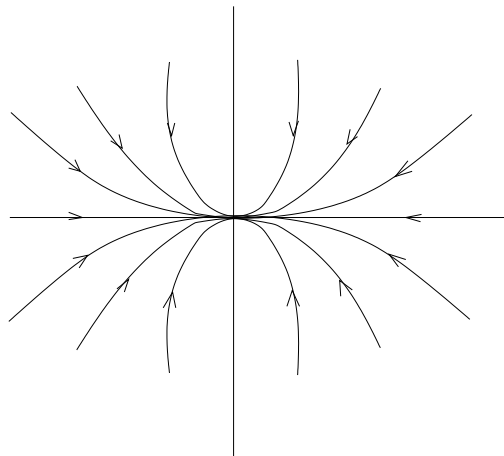


FIGURE 23 – Puits

Source (point fixe répulsif)

$\forall \lambda$ valeur propre de A : $Re\lambda > 0$

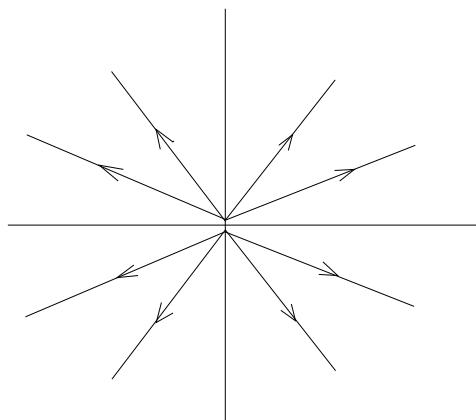


FIGURE 24 – Source

Selle (dimension 2)

Une valeur propre avec $Re\lambda > 0$ l'autre avec $Re\lambda < 0$

Exemple .

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

trajectoire ici : $x_1(t)x_2(t) = \text{constante}$, hyperboles

Définition (point fixe hyperbolique) :

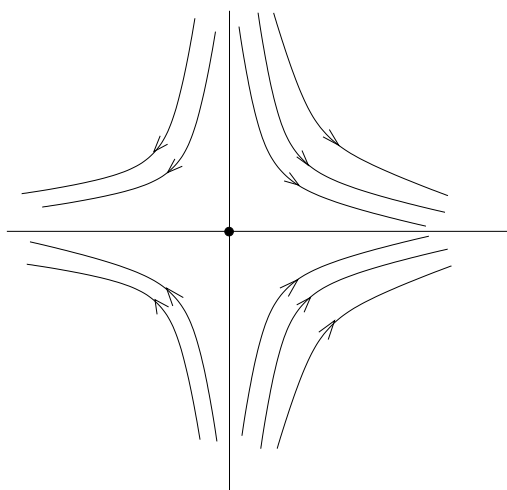


FIGURE 25 – Selle

$\forall \lambda$ valeur propre de $A : \operatorname{Re} \lambda \neq 0$.

Exemple .

$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ n'est pas hyperbolique.

9.4 Wronskien

9.5 Norme majorée par une forme quadratique

Théorème 9.8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{Re} \lambda_k < -\mu < 0$ pour toute valeur propre λ_k de A . Alors, il existe une forme quadratique $q(\mathbf{x}) = {}^t \mathbf{x} B \mathbf{x}$ définie positive tel que $\forall t \geq 0 : q(\mathbf{x}(t)) \leq e^{-2\mu t} q(\mathbf{x}(0))$ pour toute solution maximale de (*).

1ère Démonstration.

$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ admet comme solution $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0$. Notons $U(t) = e^{tA}$. On a $\frac{d}{dt} U(t) = UA$
 $\frac{d}{dt} {}^t U = {}^t A U$ et $\exists \varepsilon > 0, C < +\infty$ tel que : $\|U(t)\| \leq C e^{-(\mu+\varepsilon)t}, t \geq 0$. Soit

$$B = \int_0^\infty e^{2\mu s} \underbrace{{}^t U(s) U(s)}_{\text{définie positive}} ds$$

d'où B définie positive. Cette intégrale est convergente car

$$\|e^{2\mu s} {}^t U(s) U(s)\| \leq C^2 e^{-2\varepsilon s}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{d}{ds} [e^{2\mu s} {}^tU(s)U(s)] ds &= [e^{2\mu s} {}^tU(s)U(s)]_0^\infty = -\mathbb{1} \\
&= \int_0^\infty e^{2\mu s} (2\mu {}^tUU + {}^tA {}^tUU + {}^tUUA) ds \\
&= 2\mu B + {}^tAB + BA
\end{aligned}$$

d'où ${}^tAB + BA = -\mathbb{1} - 2\mu B$.

Soit $q(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}B\mathbf{x}$. Alors

$$\frac{d}{dt}q(\mathbf{x}(t)) = {}^t\mathbf{x} {}^tAB\mathbf{x} + \mathbf{x}BA\mathbf{x} = -{}^t\mathbf{x}(\mathbb{1} + 2\mu B)\mathbf{x} \leq -2\mu {}^t\mathbf{x}B\mathbf{x} = -2\mu q(\mathbf{x}(t))$$

d'où $q(\mathbf{x}(t)) \leq e^{-2\mu t}q(\mathbf{x}(0))$.

2ème Démonstration (algébrique). (Supposons A diagonalisable) Écrivons $\mathbf{x} = \sum \mathbf{u}_k c_k$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{C}^n$, $c_k \in \mathbb{C}$ (avec $A\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$, $k = 1, \dots, n$), ou bien $\mathbf{x} = P\mathbf{c}$, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$ (notons que P n'est rien d'autre que la matrice de passage, et \mathbf{c} les coordonnées de \mathbf{x} dans la base des vecteurs propres).

$$q(\mathbf{x}) \equiv_{def} \sum \bar{c}_k c_k = \mathbf{c}^* \mathbf{c} = \mathbf{x}^* (P^{-1})^* P \mathbf{x} = \mathbf{x}^* B \mathbf{x}$$

B est une matrice réelle définie positive.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) \Leftrightarrow \sum \mathbf{u}_k \dot{c}_k(t) = \sum \lambda_k \mathbf{u}_k c_k(t) \Leftrightarrow \dot{c}_k = \lambda_k c_k$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}q(\mathbf{x}(t)) &= \sum \bar{c}_k(t) \dot{c}_k + \dot{\bar{c}}_k c_k = \sum \bar{c}_k (\lambda_k + \bar{\lambda}_k) c_k \\
&\leq -2\mu \sum \bar{c}_k c_k = -2\mu q(\mathbf{x}(t))
\end{aligned}$$

Posons $J(t) = q(\mathbf{x}(t))e^{2\mu t}$. Alors $\frac{dJ}{dt} = (\dot{q} + 2\mu q)e^{2\mu t} \leq 0$. Donc J est décroissante. Ainsi $0 \leq J(t) \leq J(0) \Rightarrow q(\mathbf{x}(t)) \leq q(\mathbf{x}(0))e^{-2\mu t}$. \square

On remarque que

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \left\| \sum e^{t\lambda_k} P\mathbf{P}_k(t)P^{-1}\mathbf{x}_0 \right\| \leq \sum e^{\Re(t\lambda_k)} P\mathbf{P}_k(t)P^{-1}\mathbf{x}_0$$

(Si $\Re\lambda_k \leq -\mu - 2\varepsilon$) $\leq e^{-(\mu+\varepsilon)t} \sum e^{-\varepsilon t} \|P\mathbf{P}_k(t)P^{-1}\| \|\mathbf{x}_0\| \leq ce^{-(\mu+\varepsilon)t}$ car $e^{-\varepsilon t} poly(t)$ est uniformément borné pour tout t . \square

Notons que q n'est rien d'autre que la tirée en arrière par P de la forme quadratique euclidienne.

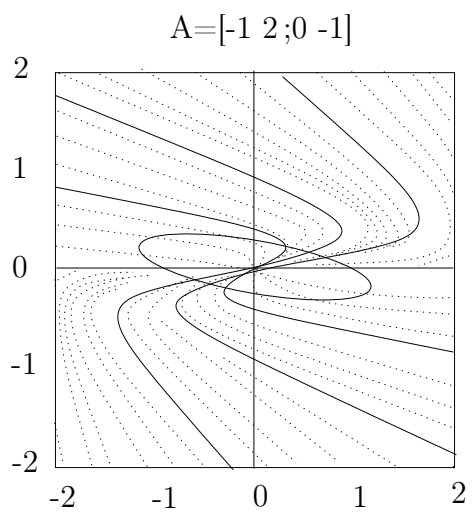


FIGURE 26 –

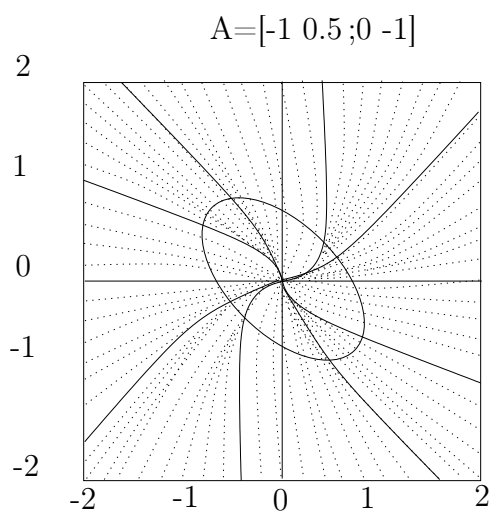


FIGURE 27 –

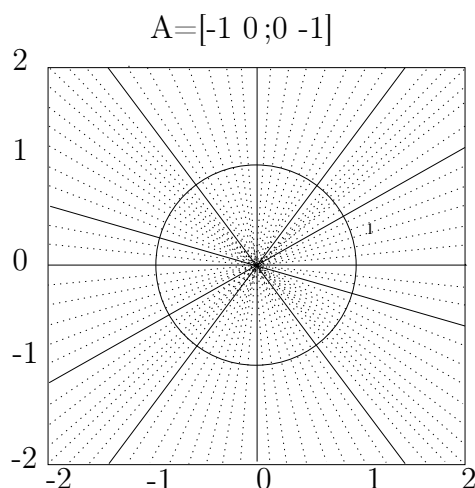


FIGURE 28 –

10 Intégrales premières et fonctions de Lyapunov

Exemple .

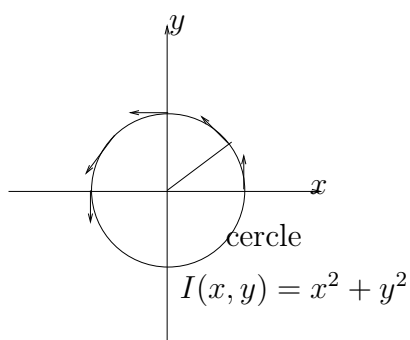


FIGURE 29 –

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} I(x(t), y(t)) &= (x_0 \cos t - y_0 \sin t)^2 + (x_0 \sin t + y_0 \cos t)^2 \\ &= \dots \\ &= x_0^2 + y_0^2 \\ &= I(x_0, y_0) \text{ (constante)} \end{aligned}$$

I est continue et différentiable :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(x(t), y(t)) &= \frac{\partial I}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2x(t)(-y(t)) + 2y(t)x(t) = 0\end{aligned}$$

I est donc constante (sans que l'on sache la solution)

Exemple .

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - y^3x^2 \\ \dot{y} = x + y^2x^3 \end{cases} \quad \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$$

$$I(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(x, y) &= 2x\left(\frac{dx}{dt}\right) + 2y\left(\frac{dy}{dt}\right) \\ &= 2x(-y - y^3x^2) + 2y(x + y^2x^3) = 0\end{aligned}$$

$$I(x(t), y(t)) = I(x_0, y_0) \text{ (constante)}$$

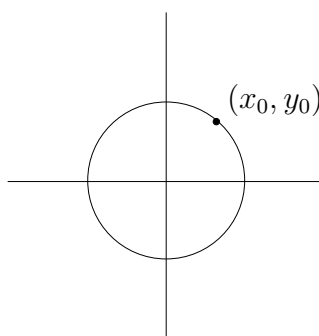


FIGURE 30 –

Une solution maximale $I \in]a, b[$

$(I, (x(t), y(t)))$ reste sur le cercle $\forall t \in I$

Or le cercle est compact, si $b < \infty$: $\exists t_n : (x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (x^*, y^*) \in \text{cercle}$, impossible.
donc $I \in]-\infty, \infty[$

Dans la suivante :

$\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert,

$v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ classe C^1 ,

$I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ classe C^1 .

Notons aussi (J, x) , $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution maximale au problème de Cauchy sur $\Omega : \dot{x} = v(t, x)$.

On s'intéresse à la dérivée de I le long du flot (la solution maximale) :

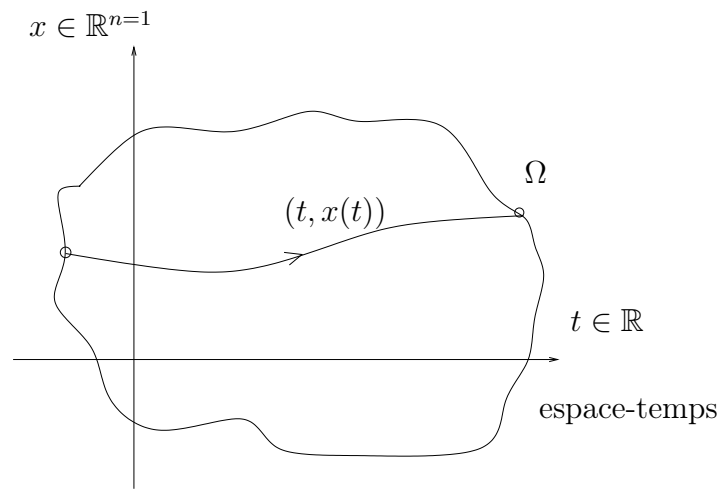


FIGURE 31 –

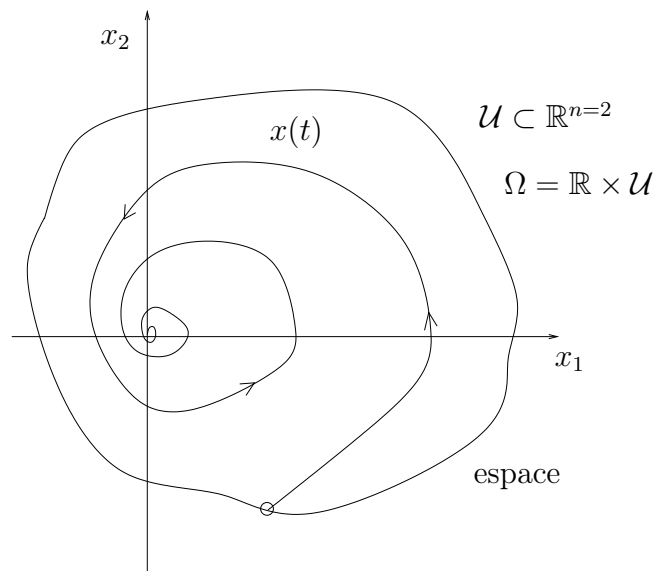


FIGURE 32 –

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(t, x(t)) &= \frac{\partial I}{\partial t} + I'_x(t, x(t))(\dot{x}(t)) = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x^n}(t, x(t))(v(t, x)) \\ &= \frac{\partial I}{\partial t} + (v, \frac{\partial}{\partial x})I(t, x(t)) = \frac{\partial I}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} I(t, x(t)) \end{aligned}$$

Exemple .

$$\dot{x} = x, x(0) = x_0, I(t, x) = \exp(-t)x, \frac{dI}{dt} = -e^{-t}x + e^{-t}\dot{x} = 0 \Rightarrow I = \text{constante}$$

Définition 10.1. On appelle dérivée totale de I le long v :

$$D_v I = \frac{\partial I}{\partial t} + (\vec{v}, \frac{\partial}{\partial \vec{x}})I$$

et on a :

$$\frac{d}{dt}I(t, x(t)) = D_v I(t, x(t))$$

Définition 10.2. On appelle I

-intégrale première si et seulement si $D_v I \equiv 0$ sur Ω .

-fonction de Lyapunov si et seulement si $D_v I \leq 0$ sur Ω .

Remarque. Souvent on considère aussi $D_v I \geq 0$ sur Ω comme fonction Lyapunov.

Remarque. (cas autonome) Souvent on considère v et I indépendents de temps, on a :

$$D_v I = v \frac{\partial}{\partial x} I = dI(v)$$

Proposition 10.3. -Si I est une intégrale première, alors I est constante le long de toute solution maximale.

-Si I est une fonction de Lyapunov, alors I est non croissante en temps le long de toute solution maximale.

Démonstration.

$x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ solution maximale

$$- \frac{d}{dt}I(t, x(t)) = D_v I = 0, \forall t \in J \text{ d'où } I = \text{constante (TAF)}$$

$$- \frac{d}{dt}I(t, x(t)) = D_v I \leq 0, \forall t \in J, t_1 < t_2 \Rightarrow I(t_1) \geq I(t_2) \text{ (TAF)}$$

Exemple . 1)

$$I(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$v(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 dI(v) &= \left(\bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right) I \\
 &= -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} I + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} I \\
 &= -x_2 2x_1 + x_1 2x_2 \equiv 0
 \end{aligned}$$

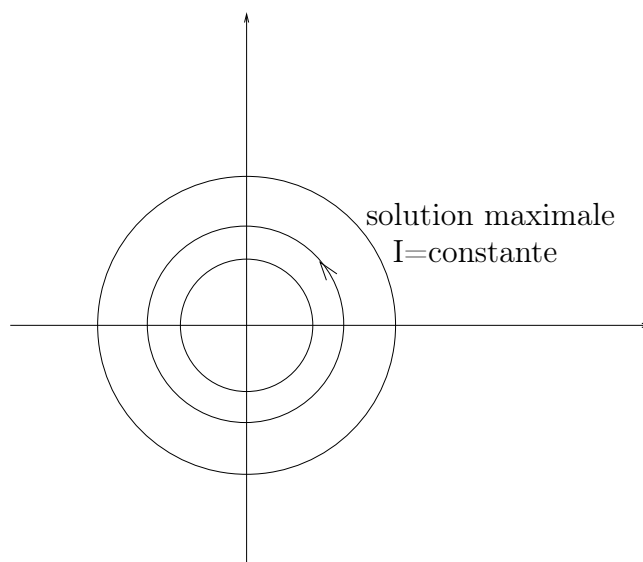


FIGURE 33 –

Exemple . 2)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dH}{dt} &= y\dot{y} + (\sin x)\dot{x} \\
 &= y(-\sin x) + (\sin x)y = 0
 \end{aligned}$$

Pendule mathématique

Exemple . 3)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 = -(x_1^2 + x_2^2)x_2 \end{cases}$$

$$I(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dI}{dt} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\
 &= -2(x_1^2 + x_2^2)^2 \leq 0
 \end{aligned}$$

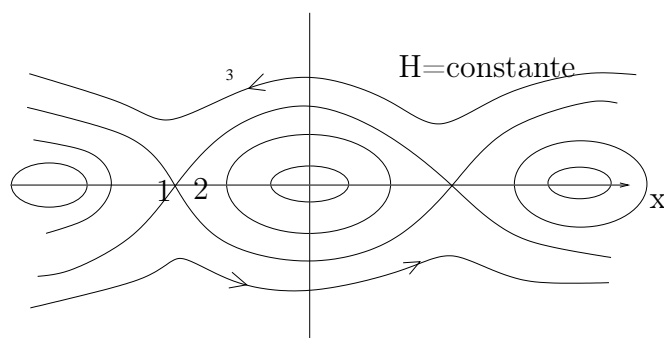


FIGURE 34 –

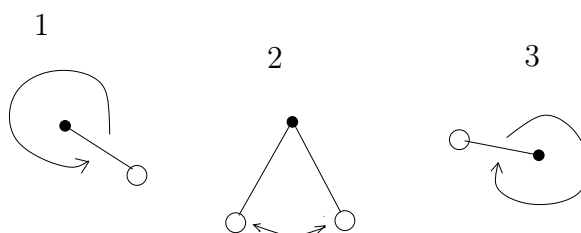


FIGURE 35 – Pendule

fonction de Lyapunov

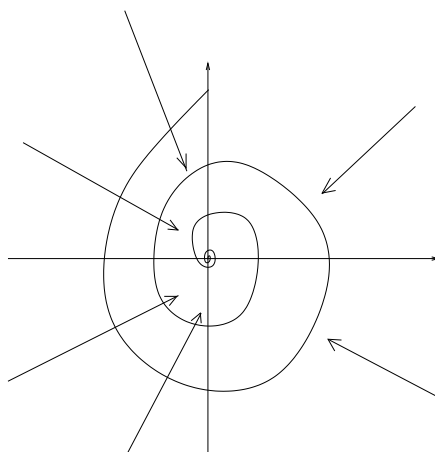


FIGURE 36 –

Remarque.

Solution maximale existe à tout temps positive pour toute condition initiale $t=0$, mais pas à temps négative (exo) si $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

Cas autonome

(lorsque v et I ne dépendent pas du temps). $\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

Théorème 10.4. Soit I une intégrale première de v . Considère le problème de Cauchy.

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = v(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Si la composante connexe (par arc) de $\mathcal{A}_{x_0} = \{x \in \mathcal{U} : I(x) = I(x_0)\}$ contenant x_0 est compact et dans \mathcal{U} , alors la solution maximale de (*) existe à tout temps $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

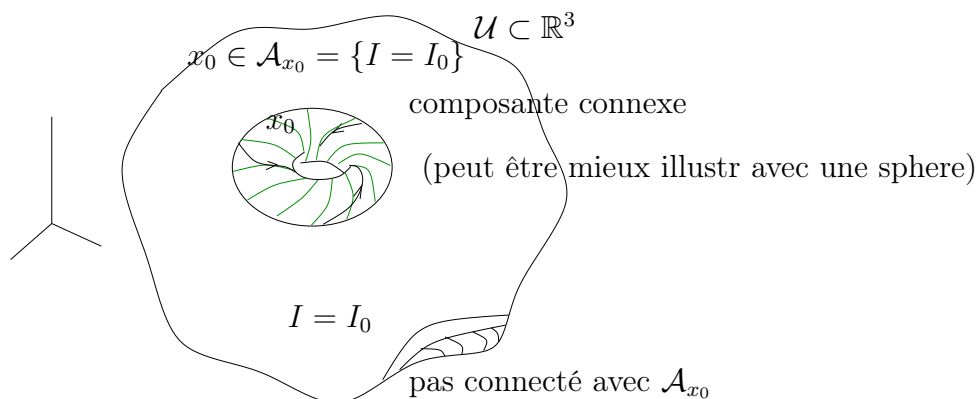


FIGURE 37 –

Soit $\mathcal{J} =]t_-, t_+[\rightarrow \mathcal{U}$ la solution maximale du problème (*) $-\infty \leq t_{-min} < 0 < t_{+max} \leq +\infty$. Puisque $\frac{dI}{dt} \equiv 0$ sur \mathcal{J} , on a : $x(t) \in \{I \equiv I(x_0)\}, \forall t \in \mathcal{J}$. Or, $x_0 \in \mathcal{A}_{x_0}$ et pour $t_1 \in \mathcal{J}$, $x(t) : t \in [0, t_1]$ (ou $[t_1, 0]$) est un arc qui connecte x_0 avec $x(t_1)$ d'où $x(t_1) \in \mathcal{A}_{x_0}$.

Supposons $t_{max} < +\infty$, alors $x(t_{max} - \frac{1}{n}) \in \mathcal{A}_{x_0}$, $n \rightarrow \infty$ est une suite dans un compact \Rightarrow sous suite convergente d'où $(t_+ - \frac{1}{n}, x(t_+ - \frac{1}{n}))$ admet un point d'accumulation dans $\mathbb{R} \times \mathcal{A}_{x_0} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{U} = \Omega$. Impossible par le Théorème de la solution maximale (Théorème 3.5.). D'où $t_{max} = +\infty$ (et $t_{min} = -\infty$)

Théorème 10.5. Soit I une fonction de Lyapunov pour v . Supposons que la composante connexe (par arc) de $\mathcal{B}_{x_0} = \{x \in \mathcal{U} : I(x) \leq I(x_0)\}$ contenant x_0 est compact dans \mathcal{U} , alors la solution maximale de problème de Cauchy $\dot{x} = v(x(t)), x(0) = x_0$ existe à tout temps positive ($t \in \mathbb{R}_+$) (on ne sait rien sur temps $\rightarrow -\infty$).

Démonstration. même.

Exemple . 4) (où ça ne marche pas)

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 y \\ \dot{y} = -y^2 x^2 \end{cases}$$

$I(x, y) = xy$ est une intégrale première

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \dot{x}y + x\dot{y} \\ &= x^3y^2 - xy^2x^2 = 0\end{aligned}$$

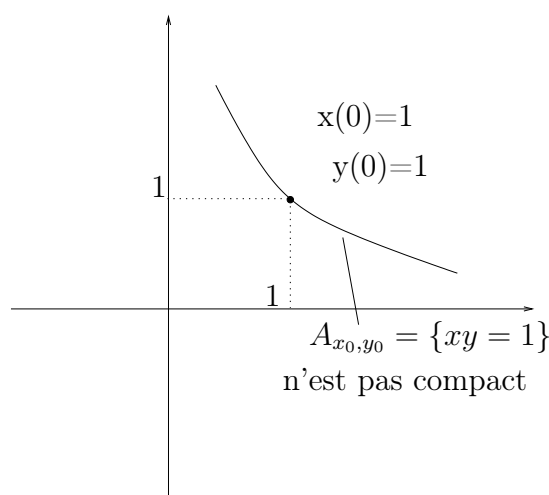


FIGURE 38 –

effectivement

$$I(x, y) = x_0y_0 = 1 \Rightarrow$$

$$\dot{x} = x^2(xy) = x^2$$

$$\dot{y} = -(yx)^2 = -1$$

$$x(t) = \frac{1}{1-t} \text{ s'explode à temp } t, t = 1.$$

Exemple . 1)(bis) : $I \equiv \text{constante} = \text{cercle compact}$

Exemple . 3)(bis) : $I \leq \text{constante} = \text{disque fermé (compact)}$ $t_{max} = +\infty$ (par contre $t_{max} \neq +\infty$)

Théorème 10.6. (Théorème de "Piège")

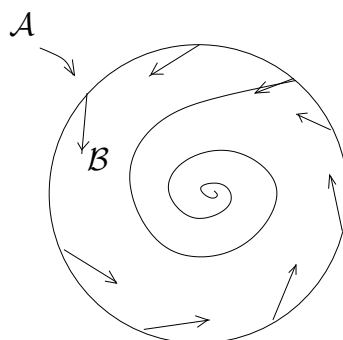
Soit $I_0 \in \mathbb{R}$, \mathcal{B} une composante connexe (par arc) de $\{x \in \mathcal{U} : I(x) \leq I_0\}$. Soit $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{B} : I(x) = I_0\}$. Supposons que \mathcal{B} et \mathcal{A} sont compacts et que $\forall x \in \mathcal{A} : dI_x(v_x) < 0$. Alors la solution maximale du problème de Cauchy.

$$\begin{cases} \dot{x} = v(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathcal{B} \end{cases}$$

existe à tout temps positive.

Démonstration.

$x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ solution maximale.



v "pointe" vers l'intérieur de \mathcal{B}
 \mathcal{B} est un piège pour le flôt

FIGURE 39 –

$$I(x, y) = x^2 + y^2$$

\mathcal{B} = disque,

\mathcal{A} = cercle.

Si $t_1 > 0, t_1 \in J$ avec $I(x(t)) = I_0$ alors : $\frac{d}{dt}I(x(t)) = dI_{x(t_1)}(v(x(t_1))) < 0$ car $x(t_1) \in \mathcal{A}$.

TAF $\Rightarrow \forall \delta > 0 \exists t' \in [t_1 - \delta, t_1]$ avec $I(x(t')) > I_0$.

$I(x(t)), t \in J$ est une fonction continue.

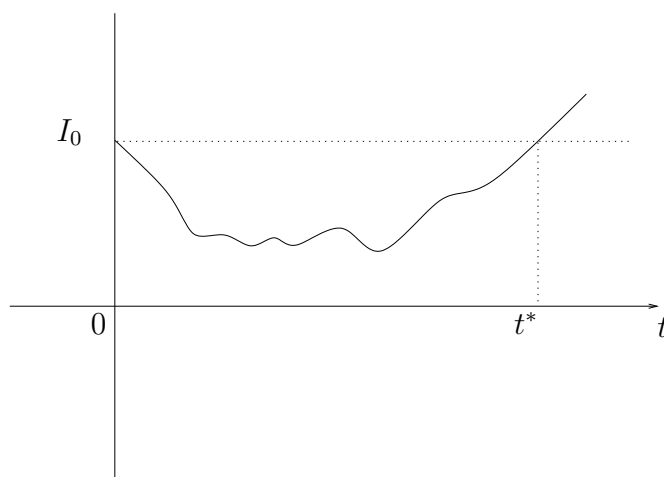


FIGURE 40 –

Supposons qu'il y a $t^* = \inf\{t > 0 : I(x(t)) > I_0\} < +\infty$

Par continuité : $I(x(t^*)) = I_0, \exists t_n \searrow t^* : I(x(t_n)) \geq I_0 \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}I(x(t))|_{t=t^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(x(t_n)) - I_0}{t_n - t^*} \geq 0$$

impossible car $= dI_x(v_x) < 0, x \in \mathcal{A}$.

Soit $J \cap \mathbb{R}_+ = [0, t_{max}[$, si $t_{max} < +\infty$. $x(t)$ aura un point d'accumulation dans \mathcal{B} lorsque $t \rightarrow t_{max}^-$ impossible!

11 Stabilité des points fixes au cas autonome

$\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{U}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, connexe.

$v : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ champ de vecteurs \mathcal{C}^1

Exemple .

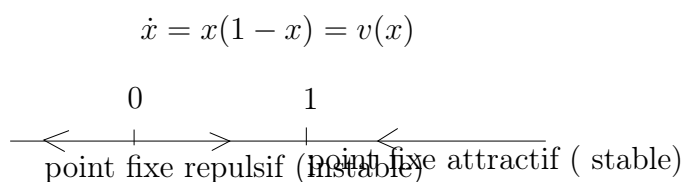


FIGURE 41 -

-Linéarisation autour d'un point fixe : $x_0 = 1$

$$x(t) = x_0 + z(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} = (1+z)(-z) = -z(t) - z(t)^2$$

-Garder les termes linéaires :

$$\frac{dz}{dt} = -z(t)$$

solution $z(t) = z_0 e^{-t}$

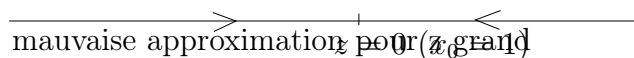


FIGURE 42 -

Définition 11.1. Soit $x_0 \in \mathcal{U}$ un point fixe de $v(x)$. On appelle équation différentielle linéarisée de $\dot{x} = v(x)$ en $x = x_0$: $\frac{dz}{dt} = Az$ avec $A = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Théorème 11.2. Supposons que $\text{Re} \lambda_k < -\mu < 0$, \forall valeur propre λ_k de $A = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0)$, $v(x_0) = 0$. Alors \exists un voisinage V de x_0 tel que pour toute condition initiale $x_1 \in V$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(x_1) = x_0$$

Démonstration.

L'équation différentielle pour z :

$$x = x_0 + z(t)$$

$$\dot{x} = \dot{z} = v(x_0 + z(t)) = 0 + Az + o(z(t))$$

Soit $q(z) = {}^t z B z$ la forme quadratique (définie positive) associée à la matrice A (Corollaire 6.7.). Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q(z(t)) &= {}^t z ({}^t A B + B A) z + |z| o(z) \\ &\leq -2\mu {}^t z B z + o(|z|^2) \\ &\leq -\mu {}^t z B z \end{aligned}$$

Pour $|z| < \delta$ avec $\delta > 0$ assez petit et $\forall x_1 \in V, z(t) = \phi^t(x_1) - x_0$ vérifie : $\forall t \geq 0 : q(z(t)) \leq e^{-\mu t} q(z(0))$, $V = \{x_1 : q(x_1 - x_0) < \delta\}$ forme un voisinage de x_0 . Et q est une fonction de Lyapunov pour v dans ce voisinage.

q est définie positive $\Leftrightarrow \exists 0 < m \leq M < +\infty$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$m\|x\|_2^2 \leq q(z) \leq M\|z\|_2^2$$

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_2^2 &\leq \frac{1}{m}q(z(t)) \\ &\leq \frac{1}{m}e^{-2\mu t}q(z(0)) \\ &\leq \frac{M}{m}e^{-2\mu t}\|z(0)\|_2^2 \end{aligned}$$

D'où $z(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ (à vitesse exponentielle) et $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} x_0$