Cours doctoral
Université d'Angers
Mai-Juin 2012
Tan Lei

II. Fractions rationnelles à valeurs critiques prescrites

Points critiques, valeurs critiques d'une fraction rationnelle. Multiplicité. Comptage

Lemme : Une fraction rationnelle de degré d
admet $2d-2$ points critiques compté avec multiplicité.

Preuve topologique : Soit Γ une courbe de Jordan passant par les valeurs critiques. Soit k le nombre de ces valeurs.
On peut considérer Γ comme un graphe ayant 2 faces, k sommets et arêtes.
On montre que $f^{-1}(\Gamma)$ est un graphe connexe, ayant $2d$ faces et kd arêtes.
De plus, $kd = \#\text{sommets} + \#_{mult}\text{points critiques}$. Donc
$2 = 2d - kd + (kd - \#_{mult}\text{points critiques}) =$
$2d - \#_{mult}\text{points critiques}$.

Question principale

Comment construire une fraction rationnelle avec les points critiques prescrits ? Avec les valeurs critiques prescrites ? Existence ? Unicité ?

Problème d'homographie.

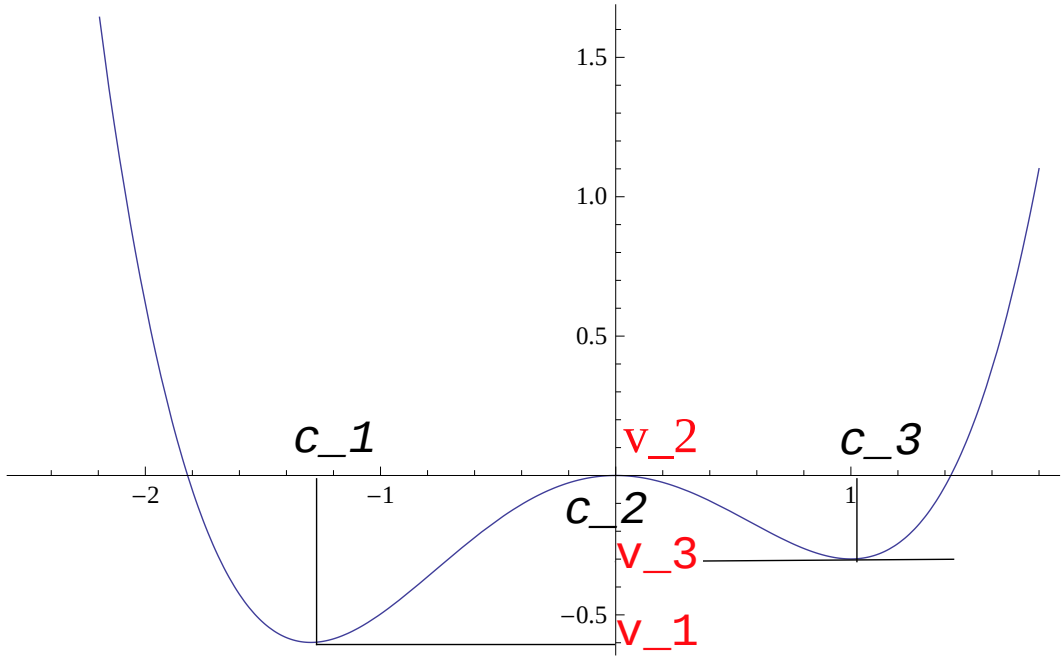
Étant donné un ensemble X de $d-1$ points (éventuellement confondus) dans $\mathbb{C}$, il y a un unique polynôme, à post-composition par une homographie près, dont l'ensemble des points critiques est X :

$$P'(z) = A \prod_{c \in X} (z-c)^{m(c)}, \; P(z) = \int P'(z) + B \; .$$

Cependant, il n'y a pas de formule algébrique d'exprimer un polynôme à partir de ses valeurs critiques, ou une fraction rationnelle à partir de ses points critiques ou valeurs critiques.

Exemple : polynôme quartic à points critiques réels

On cherche un polynôme f de points critiques $c_1 < c_2 < c_3$ et de valeurs critiques $v_i = f(c_i)$ tel que $\{v_1, v_2, v_3\}$ coïncide avec un ensemble de trois points réels prédéterminé. Génériquement il y a 4 possibilités : $v_1 < v_3 < v_2$ ou $v_3 < v_1 < v_2$, $v_2 < v_1 < v_3$ et $v_2 < v_3 < v_1$. Chaque ordre devrait déterminer un unique polynôme de points critiques réels, à pré-composition par une application affine près.



Les questions à valeurs critiques prescrites

Deux fractions rationnelles $f, g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ sont dites isomorphes s'il y a une transformation homographique M telle que $f \circ M = g$.

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \stackrel{M}{\to} & \overline{\mathbb{C}} \\ g \searrow & & \swarrow f \\ & \overline{\mathbb{C}} & \end{array}$$

Clairement f et g partagent le même degré et le même ensemble de valeurs critiques.

Questions. Étant donné un degré d et un ensemble $V \subset \overline{\mathbb{C}}$
1. Énumérer les classes d'isomorphisme de degré d ayant V comme l'ensemble des valeurs critiques.
2. Donner une description combinatoire de ces classes.
3. Calculer les coefficients des représentants.
4. Étudier les bifurcations en variant V.

Motivations

1. la théorie des cordes
2. factorisations dans les groupes symétriques
3. Théorie des graphes, combinatoire, empilement de cercles
4. géométrie algébrique, singularité, invariants de Gromov-Witten, les compléments de discriminants dans des espaces des modules divers
5. Branched covering between surfaces $\longrightarrow$ orbifold-covering between 2–orbifolds $\longleftrightarrow$ subgroups of orbifold fundamental groups $\longrightarrow$ a subgroup of a Fuchsian group with a prescribed signature $\longrightarrow$ decide whether an arbitrary generating set of a surface group is Nielsen-equivalent to the standard generating set.
6. A finite covering between Seifert 3–manifolds (circle fibrations over 2–orbifolds) $\longrightarrow$ a covering between the base 2–orbifolds $\longleftrightarrow$ a branched covering between surfaces.
7. construire des polynômes/fractions rationnelles à dynamique prescrite

Résultats d'énumérations

Lemme : l'énumération ne dépend pas de la position de V, mais seulement sur la liste non-ordonnée $\mathbf{X} = \{X(v), v \in V\}$ (le passeport) **des types de branchement** sur les points de V, où

$$X(v) = 1^{m_1(v)} 2^{m_2(v)} \dots d^{m_d(v)}$$

avec $m_i \in \mathbb{N}$ le nombre des points au dessus de v de degré local i. Clairement

$$m_1(v) + 2 \cdot m_2(v) + \dots + d \cdot m_d(v) = d \ .$$

Preuve. Un homéomorphisme préservant l'orientation $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ induit une bijection entre des classes d'isomorphisme sur V et sur $h(V)$ avec le même passeport.

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\exists H} & \overline{\mathbb{C}} \\ f \downarrow & & \downarrow \exists F \\ \overline{\mathbb{C}}, V & \underset{h}{\longrightarrow} & \overline{\mathbb{C}}, h(V) \end{array}$$

Énumération de degré d avec valeurs critiques simples

1. (Lyashko-Looijenga) Pour V un ensemble de $d-1$ points distincts dans $\mathbb{C}$, le nombre des classes d'isomorphisme des polynômes de degré d avec V comme ensemble des valeurs critiques est égal à d^{d-3} : $1, 1, 1, 4, 25, 216, 2401, \cdots$.
2. (Hurwitz) Pour V un ensemble de $2d-2$ points distincts dans $\overline{\mathbb{C}}$, le nombre des classes d'isomorphisme de des fractions rationnelles de degré d avec V comme ensemble des valeurs critiques est égal à $\frac{(2d-2)!}{d!} d^{d-3}$:

$$1, 1, 4, 120, 8400, 1088640, 228191040, \cdots .$$

3. polynômes réels de degré d avec points critiques réels et valeurs critiques simples : de fonction génératrice $\sec x + \tan x$: $1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, \cdots$.
4. les fractions rationnelles de degré d avec points critiques réels et valeurs critiques simples : $\leq 2d-2!$.

Énumérations

- Formule formelle de Mednykh, ne se concrétise que dans des cas simples
- Zvonkin & Lando : Une formule pour chaque passeport polynomial.
- Ekedahl, Lando, Shapiro Vainshtein : une formule pour $h_{g,\mathbf{X}}$, où g est le genre de la surface du revêtement, $\mathbf{X}$ est un passeport avec ≤ 1 valeur critique multiple.

Cas réel : On décrit d'abord la combinatoire, puis on énumère

Pour les polynômes à coefficients réels avec tous les points critiques réels et simples, $c_1 < c_2 < \cdots < c_{d-1}$, les valeurs critiques v_i sont rangés dans $\mathbb{R}$ en zigzagant : si v_i est à droite (gauche) de v_{i-1}, alors v_{i+1} doit être à gauche (droite) de v_i. Ainsi, étant donné un ensemble V de $d-1$ points distincts dans $\mathbb{R}$, il faut encore préciser une permutation en zigzag de l'ensemble des indices $\{1, \cdots, d-1\}$ pour pouvoir déterminer un polynôme réel.
Le nombre de permutations en zigzag croît rapidement avec d :
1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, 50521, 353792, 2702765, 22368256, 199360981 1903757312, 19391512145, 209865342976, 2404879675441...

Pour les fractions rationnelles à points critiques réels simples toutes les permutations sont autorisées. On obtient donc $(2d-2)!$ solutions.

Preuve du théorème Lyashko-Looijenga

$$\mathcal{LL} : f(z) \mapsto d(t) := \prod_{v \text{ valeur critique de } f} (t - v).$$

On a $\mathcal{LL}(f - v)(t) = \mathcal{LL}(f)(t + v)$. Soit $B(z) = (z^{d-2} \ \cdots \ z \ 1)$.

$$\begin{array}{ccc}
\{\text{Classes d'isomorphisme}\} & \xrightarrow{\text{vals. cr}} & \mathbb{C}^{d-1}/S_{d-1} \\
\uparrow \beta \ (d:1) & & \updownarrow \\
\{\text{monique centré deg} = d\} & \xrightarrow{\mathcal{LL}} & \{t^{d-1} + B(t)\cdot \mathbf{d}, \mathbf{d} \in \mathbb{C}^{d-1}\} \\
\cup \downarrow \text{fibre} = \mathbb{C} & & \cup \downarrow \text{fibre} = \mathbb{C} \\
\text{l'hypersurface de vcs centrés} & \xrightarrow{\mathcal{LL}} & \{t^{d-1} + B(t)\cdot \mathbf{d}, \text{centré}\} \\
\uparrow \alpha \ (d-1!:1) & & \uparrow \tau \ (d-1!:1) \\
\{\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{d-1}, \text{ordonné et centré}\} & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{LL}} \ (d^{d-2}:1)} & \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{d-1}, \text{ordonné et centré}\}
\end{array}$$

Théorème. *$\widehat{\mathcal{LL}}$ est polynomiale, homogène, propre, de degré d par coordonnée, en particulier ouverte et surjective.*

Degré 4

$$\widehat{\mathcal{LL}} : \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -c_1^4 + 2c_1^3(c_2+c_3) - 6c_1(c_1c_2c_3) \\ -c_2^4 + 2c_2^3(c_1+c_3) - 6c_2(c_1c_2c_3) \\ -c_3^4 + 2c_3^3(c_1+c_2) - 6c_3(c_1c_2c_3) \end{pmatrix} - \text{centre}$$

$$\underset{\sum c_i=0}{=} - \begin{pmatrix} c_1^4 + 2c_1(c_1c_2c_3) \\ c_2^4 + 2c_2(c_1c_2c_3) \\ c_3^4 + 2c_3(c_1c_2c_3) \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 \\ c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 \\ c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{LL}(z^4 + p_2z^2 + p_3z + p_4) =$

$\text{discriminant}(z^4 + p_2z^2 + p_3z + p_4 - t, z)/(-256) =$

$$t^3 + \frac{1}{2}(p_2^2 - 6p_4)t^2 + \frac{1}{16}(p_2^4 + 9p_2p_3^2 - 16p_2^2p_4 + 48p_4^2)t +$$
$$\frac{1}{4^4}(4p_2^3p_3^2 + 27p_3^4 - 16p_2^4p_4 - 144p_2p_3^2p_4 + 128p_2^2p_4^2 - 256p_4^3)$$

L'hypersurface des poly. à valeurs critiques centrées est le graphe d'une fonction $p_d(p_2, \cdots, p_{d-3})$.

Preuve (inspiré de LL et Douady-Sentenac).

Soit $c_i^* = \lambda c_i$. En degré 4, soit $g^*(x) = 4(x - c_1^*)(x - c_2^*)(x - c_3^*)$. Alors $g^*(\lambda x) = \lambda^3 4(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) = \lambda^3 g(x)$. Donc $g^*(\lambda x) = \lambda^{d-1} g(x)$ en général.

$$
\begin{aligned}
v_i^* &= \left(\int_0^{c_i^*} - \frac{1}{d-1} \Big[\sum_{j=1}^{d-1} \int_0^{c_j^*} \Big] \right) g^*(u) du \\
&= \left(\int_0^{\lambda c_i} - \frac{1}{d-1} \Big[\sum_{j=1}^{d-1} \int_0^{\lambda c_j} \Big] \right) g^*(u) du \\
&= \left(\int_0^{c_i} - \frac{1}{d-1} \Big[\sum_{j=1}^{d-1} \int_0^{c_j} \Big] \right) g^*(\lambda x)\, \lambda\, dx = \lambda^d v_i \ .
\end{aligned}
$$

$\widehat{\mathcal{LL}}^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$ (on compte le nombre de préimages de LA valeur critique). Donc $\widehat{\mathcal{LL}}$ est propre.

Par Bezout $\widehat{\mathcal{LL}}$ est de multiplicité d^{d-2}. q.e.d.

En particulier $\widehat{\mathcal{LL}}$ est ouvert, surjective, de lieu critique $\bigcup_{i\neq j}\{c_i = c_j\}$, de valeurs critiques $\bigcup_{i\neq j}\{v_i = v_j\}$. Donc un revêtement au dessus du lieu hors valeurs critiques (= passeport générique).
Le groupe fondamental de ce lieu est le groupe de tresse.
Le programme scilab utilise les relèvement de chemins pour trouver des polynôme à valeurs critiques prescrites, de points critiques simples.
L'étude de la monodromie va aider à trouver tout le fibre rapidement.
$\widehat{\mathcal{LL}}$ induit un endomorphisme sur $\mathbb{C}P^{d-3}$, qui contribuera à l'analyse des passeports non génériques.

Questions de corps des nombres : $\widehat{\mathcal{LL}} : \mathbf{c} \to \mathbf{v}$ et $\mathcal{LL} : \mathbf{p} \to \mathbf{d}$ sont à coefficients rationnels, donc un endomorphisme du corps.

Pour les polynômes de passeport non-générique :
1. S'il y a seulement une valeur critique multiple, on peut trouver une paramétrisation en un espace vectoriel et faire le même calcul ;
2. S'il y en a plus, on peut trouver une transversalité au niveau de $\widehat{\mathcal{LL}}$.

(Arnold) Les fractions rationnelles ayant au plus trois pôles peuvent être traitées de la même façon.

Autrement, l'espace de fonctions méromorphes avec n les pôles d'une courbe de genre g sur $\overline{\mathbb{C}}$ est un fibré sur l'espace des modules des courbes de genre g avec n points marqués.
La théorie d'intersection (au lieu du théorème de Bezout) dans l'espace des modules est nécessaire et avant cela l'espace des modules doit être compactifié et son espace fibré doit être complété.
La compactification de Deligne-Mumford donne l'énumération (avec le type de branchement aux pôles prescrit).

Encoder $\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{v})$, méthodes combinatoires

1. action par monodromie du groupe fondamental du lieu hors valeurs critiques
2. sous groupes des permutations
3. Tirer en arrière d'un polygone ou d'une étoile à sommets valeurs critiques.
4. un parcours dans le graphe complet à d sommets.
5. un modele Teichmuller
6. Empilement de cercles et triangulation
7. ...

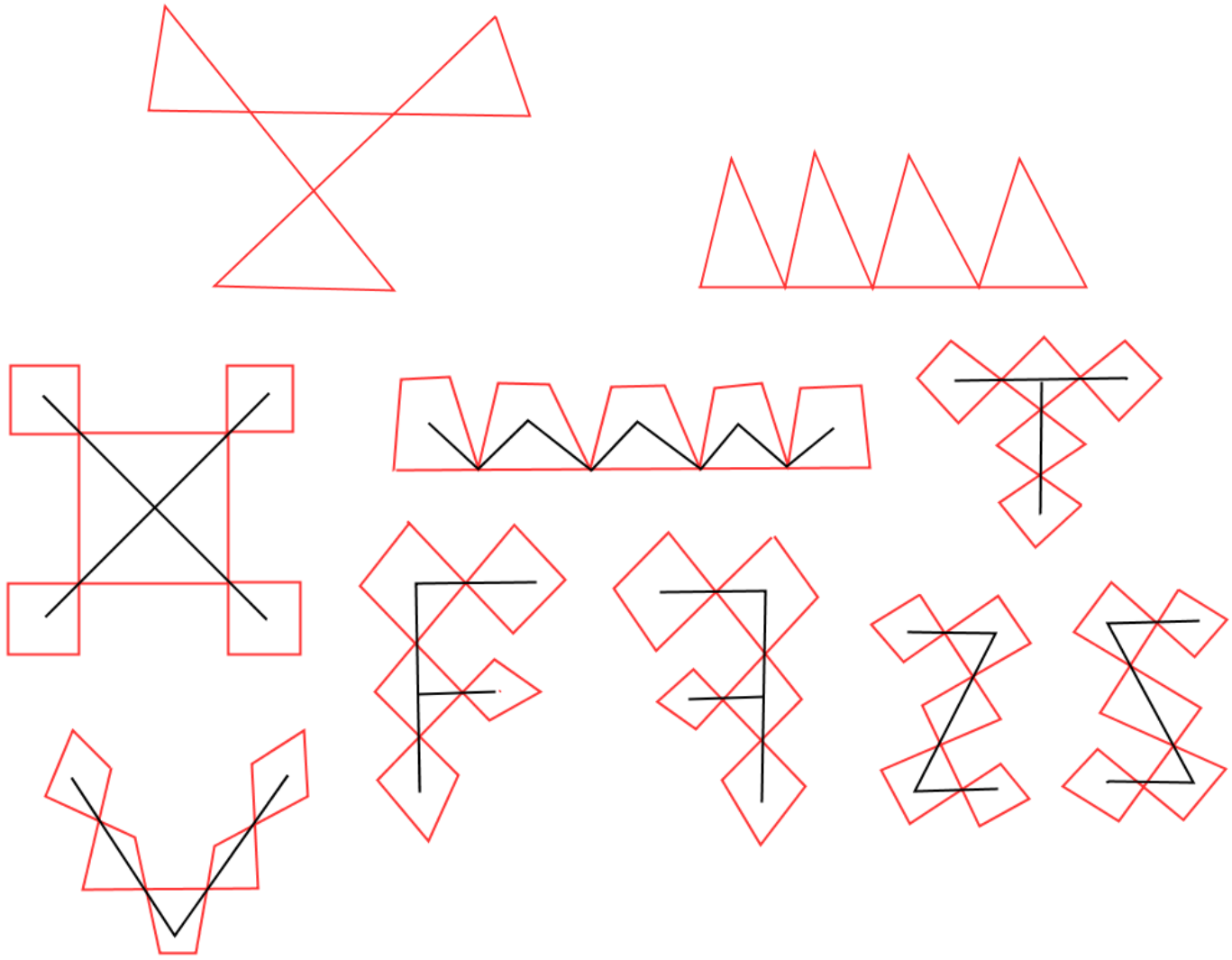


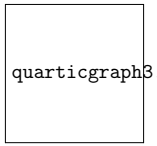
Figure : Degré 4 et 5, cas polynomial

degree4-tetrahedron.pdf

Portions des 120 6-tuple de permutations

$[(1,2),(2,3),(2,3),(3,4),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,3),(1,2),(2,3),(3,4),(3,4),(1,2)]$,
$[(2,3),(1,3),(2,3),(3,4),(3,4),(1,2)]$,
$[(2,3),(2,3),(1,2),(3,4),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,2),(2,4),(3,4),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,4),(1,2),(3,4),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(2,4),(1,4),(3,4),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,2),(3,4),(2,3),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(3,4),(1,2),(2,3),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,2),(2,3),(2,4),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,3),(1,2),(2,4),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(2,3),(1,3),(2,4),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,4),(3,4),(1,2),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(3,4),(1,3),(1,2),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,3),(1,4),(1,2),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(2,4),(3,4),(1,3),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(3,4),(2,3),(1,3),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(2,3),(2,4),(1,3),(2,3),(3,4),(1,2)]$
$\ldots\ \ldots$

Portions des 120 classes de degré 4



On peut encoder par la préimage de l'étoile noire ;
ou seulement les arêtes contenant les points critiques de ce graphe noir, c'est un graphe avec d sommets et $2d - 2$ arêtes ;
ou le graphe rouge avec seulement les sommets qui sont les points critiques (graphes équilibrés)...
Problèmes : Analyser la structure de ces graphes, obtenir une méthode automatique de convertir ces modèles en fractions rationnelles.

Prescrire la dynamique. Groupe de monodromie et groupe de monodromie itéré.

Dessins d'enfants de Grothendick.

Passeports non réalisable

Une condition nécessaire pour qu'un passeport soit réalisable et qu'il doit impliquer le bon nombre, i.e. $2d-2$ de points critiques : Un point au dessus de v de degré local k est compté comme $k-1$ points critiques, donc si $X(v) = 1^{m_1(v)}2^{m_2(v)}\dots d^{m_d(v)}$ alors il y a $(1-1)\cdot m_1(v) + (2-1)\cdot m_2(v) + \dots + (d-1)\cdot m_d(v)$ points critiques au dessus de v, donc on doit avoir (conditions de Hurwitz) :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{d} k \cdot m_k(v) = d, \quad \forall\, v \in V \\ \sum_{v\in V}\sum_{k=1}^{d}(k-1)\cdot m_k(v) = 2d-2 \end{cases}.$$

Dans le cas polynomial, c'est-à-dire $X(v) = (d^1)$ pour un certain $v \in V$, cette condition nécessaire est aussi suffisante.

La condition est non suffisante dans le cas non-polynomial. Voici un exemple : $d = 4$ et $\mathbf{X} = (1^1 3^1, 2^2, 2^2)$ (preuve par absurde : il faut tirer en arrière un arc passant par les 3 valeurs critiques ayant les deux extrémités de type 2^2, ou une étoile ayant les 3 valeurs critiques comme extrémités).

Existence ou non

Le problème de déterminer $\mathbf{X}$ tel que $\mathit{Hurwitz}(\mathbf{X})$ soit nul ou non est un problème ouvert. Voir :
Ekaterina Pervova et Carlo Petronio, On the existence of branched coverings between surfaces with prescribed branch data.
Par exemple, tout passeport polynomial est réalisable.

Prescrire les points critiques simples

Etant donné un ensemble X de $2d-2$ points distinct dans $\mathcal{P}$, il existe un nombre de Catalan $C(d-1)$ de fractions rationnelles de degré d réalisant X comme ensemble critique, modulo post-composition par les homographies.
Un invariant complet de la classe d'équivalence est la dérivée Schwarzienne, qui est une différentielle quadratique méromorphe sur $\mathcal{P}$.
On peut donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une différentielle quadratique méromorphe sur $\mathcal{P}$ soit la dérivée Schwarzienne d'une fraction rationnelle. La résolution provient de la résolution d'une équation différentielle de type $y'' + q(z)y = 0$.
Il manque encore une compréhension géométrique de cet invariant pour donner au sens du nombre de Catalan de solutions.