Strasbourg, 31 mai 2011

Endomorphismes polynômiaux harmoniques du plan

M. El Amrani, J.-J. Loeb et T.L.

Université d'Angers

Un endomorphisme polynomial harmonique du plan prend la forme réelle

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{pmatrix}, \quad U, V \text{ harmoniques}$$

ou complexe

$$f(z) = p(z) - \overline{q(z)}, \quad p, q \text{ holomorphes} .$$

$$\deg f := \max\{\deg p, \deg q\} .$$

Questions

- $\#\{$zéros communs de U et $V\} = ?$ $\#\{$racines de $f\} = ?$
- $\#f^{-1}(c) = ?$ Où se situe ce fibre? Dépendance en c?

Un endomorphisme polynomial harmonique du plan prend la forme réelle

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{pmatrix}, \quad U, V \text{ harmoniques}$$

ou complexe

$$f(z) = p(z) - \overline{q(z)}, \quad p, q \text{ holomorphes} .$$

$$\deg f := \max\{\deg p, \deg q\} .$$

Questions

- $\#\{$zéros communs de U et $V\} =?$ $\#\{$racines de $f\}=?$
- $\#f^{-1}(c) =?$ Où se situe ce fibre? Dépendance en c?
- Comment f envoie $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$?
- f ouverte? propre? surjective? $f(\mathbb{C}) \ni$ interior?
- Variation avec f?

Exemples. $z - \bar{z}$, $z^2 - \bar{z}$

Motivation?

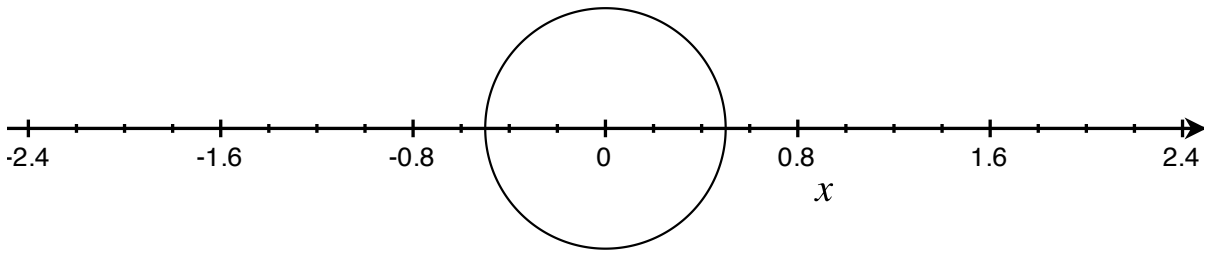
- géométrie algébrique réelle
- singularités globales d'endomorphismes du plan
  (Arnold: déformation de z^2)
- dynamiques holomorphes
- lentilles gravitationnelles (astrophysique)

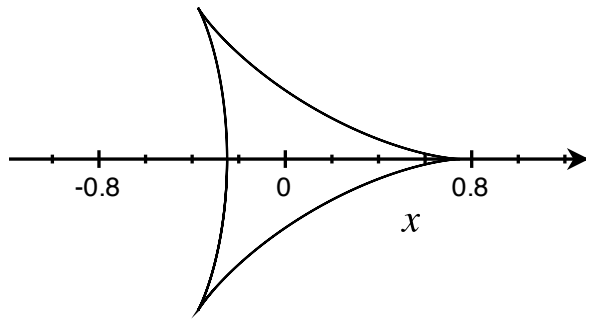
Lieu critique pour $f = p - \overline{q}$

$\mathcal{C}_f =$ lieu critique $= \{z \mid Jac(f) = 0\} = \{z,\ |p'|^2 - |q'|^2 = 0\}$

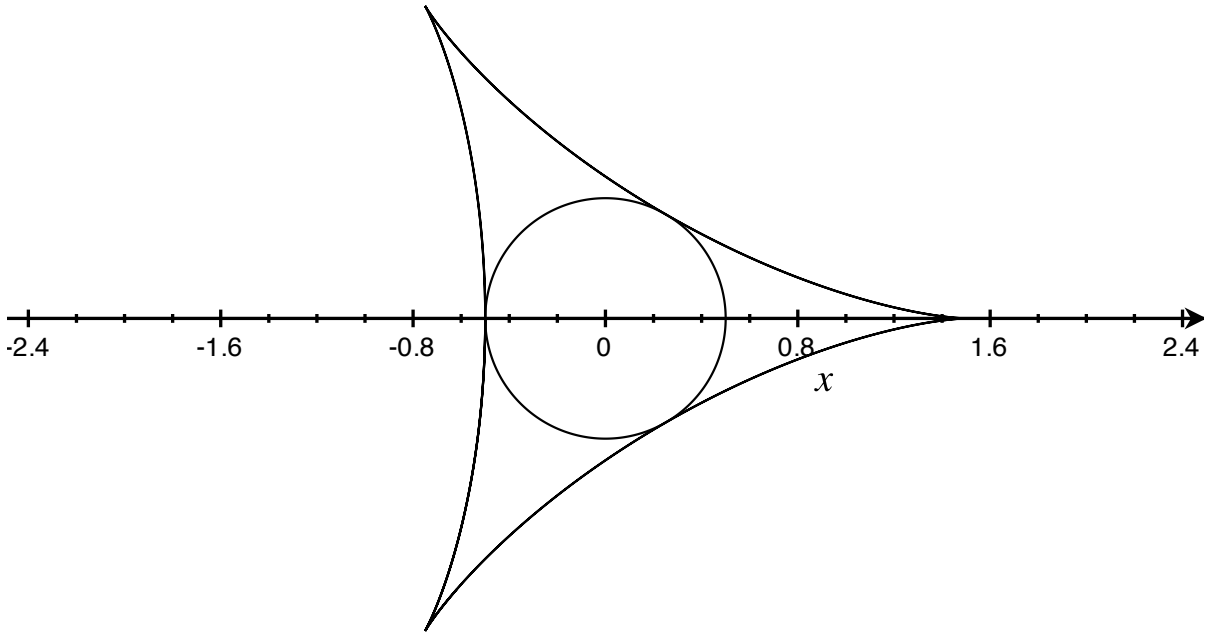
$\mathcal{V}_f = \{$valeurs critiques$\} = f(C_f)$.

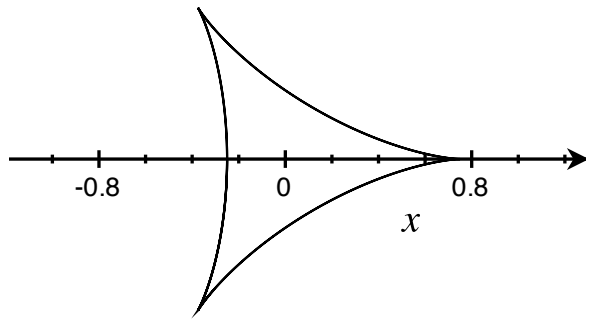
Cas $z^2 - \overline{z}$





Cas $z^2 - \overline{z}$, lieu co-critique





Majoration du nombre des racines

Wilmshurst (1998) $\boxed{\forall\, d,\ \max_{d=\deg p>\deg q} \#\{p(z)-\overline{q(z)}=0\} \leq d^2}$.

Khavinson-Swiatek (2003)

$$\boxed{\forall\, d>1,\ \max_{d=\deg p} \#\{p(z)-\overline{z}=0\} \leq 3d-2}$$

En plus, $=$ pour $d=2,3$.

Bshouty-Lyzzaik (2004) optimalité pour $d=4,5,6,8$.

Geyer (2008) optimalité pour $\forall\, d$ (utilise un théorème de Thurston, voir aussi Buff-Epstein-Koch).

Khavinson-Swiatek : $\#\{\overline{p(z)} - z = 0\} \leq 3d - 2$

Soit $K(z) = \overline{p(z)}$, $f(z) = K(z) - z$.

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & \{K(z) = z, |K'| > 1\} & & \{K(z) = z, |K'| < 1\} \\
 & & \| & & \| \\
\#\{f(z) = 0\} = & \#\{f(z) = 0, \deg_z = -1\} & & + & \#\{f(z) = 0, \deg_z = 1\} \\
 & & \| & & \\
 & d + \#\{\deg_z = 1\} & & & \\
= & d + 2 \cdot \#\{\text{points fixes attractifs de } K\} & & &
\end{array}
$$

Khavinson-Swiatek : $\#\{\overline{p(z)} - z = 0\} \leq 3d - 2$

Soit $K(z) = \overline{p(z)}$, $f(z) = K(z) - z$.

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{cc} \{K(z) = z, |K'| > 1\} & \{K(z) = z, |K'| < 1\} \\ \| & \| \end{array} \\
\#\{f(z) = 0\} = & \#\{f(z) = 0, \deg_z = -1\} + \#\{f(z) = 0, \deg_z = 1\} \\
 & \| \\
 & d + \#\{\deg_z = 1\} \\
= & d + 2 \cdot \#\{\text{points fixes attractifs de } K\} \\
\overset{\text{Fatou}}{\leq} & d + 2(d-1) = 3d - 2
\end{array}
$$

Proof of Geyer's theorem

Find $p \in \mathbb{R}[z]$ of degree d such that

$$p'(c) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} p''(c) \neq 0 \\ c \neq \overline{c} \text{ (except possibly one)} \\ p(c) = \overline{c} \end{cases}$$

Proof of Geyer's theorem

Find $p \in \mathbb{R}[z]$ of degree d such that

$$p'(c) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} p''(c) \neq 0 \\ c \neq \overline{c} \text{ (except possibly one)} \\ p(c) = \overline{c} \end{cases}$$

Important Notice : Every critical point is 2-periodic.

Proof of Geyer's theorem

Find $p \in \mathbb{R}[z]$ of degree d such that

$$p'(c) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} p''(c) \neq 0 \\ c \neq \overline{c} \text{ (except possibly one)} \\ p(c) = \overline{c} \end{cases}$$

Important Notice : $\boxed{\text{Every critical point is 2-periodic.}}$

Apply Thurston's theorem :

1. Create a topological (C^∞, quasi-regular) polynomial G.

Proof of Geyer's theorem

Find $p \in \mathbb{R}[z]$ of degree d such that

$$p'(c) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} p''(c) \neq 0 \\ c \neq \overline{c} \text{ (except possibly one)} \\ p(c) = \overline{c} \end{cases}$$

Important Notice : $\boxed{\text{Every critical point is 2-periodic.}}$

Apply Thurston's theorem :

1. Create a topological (C^∞, quasi-regular) polynomial G.
2. Prove that $\not\exists$ obstructions (Levy).

Proof of Geyer's theorem

Find $p \in \mathbb{R}[z]$ of degree d such that

$$p'(c) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} p''(c) \neq 0 \\ c \neq \overline{c} \text{ (except possibly one)} \\ p(c) = \overline{c} \end{cases}$$

Important Notice : $\boxed{\text{Every critical point is 2-periodic.}}$

Apply Thurston's theorem :

1. Create a topological (C^∞, quasi-regular) polynomial G.
2. Prove that $\not\exists$ obstructions (Levy).
3. Apply Thurston's theorem to obtain a polynomial P.

Proof of Geyer's theorem

Find $p \in \mathbb{R}[z]$ of degree d such that

$$p'(c) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} p''(c) \neq 0 \\ c \neq \overline{c} \text{ (except possibly one)} \\ p(c) = \overline{c} \end{cases}$$

Important Notice : Every critical point is 2-periodic.

Apply Thurston's theorem :

1. Create a topological (C^∞, quasi-regular) polynomial G.
2. Prove that $\not\exists$ obstructions (Levy).
3. Apply Thurston's theorem to obtain a polynomial P.
4. P is real.

Geometry and counting of Geyer polynomials

Geyer:

$\#\{\text{degree } d \text{ Geyer polynomials}\}/(\text{real conj.})$

$$= m - \text{th Catalan number} = \frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix} \text{ if } \begin{cases} d = 2(m+1) \\ d = 2m+1 \end{cases}$$

Thurston's theorem $\longrightarrow$ Classification results.

Geyer (de nouveau) $\forall\, d \geq 2$, $\exists\ p(z) \in \mathbb{R}[z]$ avec ≤ 1 point critique réel tel que

$$\exists\, c \in \mathbb{C} \quad \#\{p(z) - \overline{z} = c\} = 3d - 2\ .$$

Théorème. $\forall\, d \geq 2$, $\forall\ p(z) \in \mathbb{R}[z]$ tel que $\{p' = 0\} \subset \mathbb{R}$,

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad \#\{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \pm \overline{z} = c\} \leq \left\{ \begin{array}{l|l} 2d & d \text{ pair} \\ 2d+1 & d \text{ impair} \end{array} \right. .$$

La borne est optimale pour tout d.

Théorème (degré 3).

- $\boxed{f(z) = q(z) - \overline{z},\ \deg q = 3} \sim \boxed{\frac{z^3}{3} + pz - \overline{z}}$.
- $\mathcal{C}_f = \begin{cases} \text{une courbe de Jordan} & \Big|\ |p| < 1 \\ \text{une lemniscate} & \Big|\ |p| = 1 \\ \partial(\Omega^1 \sqcup \Omega^2 \text{domaines de Jordans}) & \Big|\ |p| > 1 \end{cases}$
- $|p| > 1 \Longrightarrow f|_{\overline{\Omega^k}}$ injective (comme $z^2 - \overline{z}$), et
- pour $c \notin \mathcal{V}_f$, $\quad \#f^{-1}(c) = \begin{cases} 7 & \Big|\ c \in f(\Omega^1) \cap f(\Omega^2) \\ 5 & \Big|\ c \in f(\Omega^1) \triangle f(\Omega^2) \\ 3 & \Big|\ c \in \overline{\mathbb{C}} \smallsetminus f(\Omega^1) \cup f(\Omega^2) \end{cases}$
- $\#\{\text{fronces de Whitney}\}$=8,4,6

Invariant topologique

Théorème (vers l'universalité de $z^2 - \bar{z}$) Pour $f(z) = p(z) - \bar{z}$, si toutes les valeurs critiques de $\psi = p'$ sont hors $\overline{D(0,1)}$ alors $\mathcal{C}_f$ a $deg(p) - 1$ courbes non emboitées chacune contenant au moins 3 fronces.

Notion de topologiquement harmonique. Invariant global. Invariant local de Lyzzaik...

Relation d'équivalence

$$f \sim \boxed{\underset{\text{bi-holomorphe}}{\xrightarrow{\psi}} \quad \xrightarrow{f} \quad \underset{az+b\overline{z},\ |a|\neq|b|}{\xrightarrow{\Phi}}}$$

laissent ces propriétés invariants.

Lemme (formes normales en degré 1) : $z, \quad z - \overline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix}$.

Théorème (forme normale en degré 2 + propriétés)

	ouvert	propre	surjective	$\mathrm{int}(f(\mathbb{C})) \neq \emptyset$
holomorphe z^2	oui	oui	oui	oui
$(z - \overline{z}) \circ (z^2)$	non	non	non	non
cône $\begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$	non	non	non	oui
pli $\approx \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix}$	non	oui	non	oui
hypocycloïd $z^2 - \overline{z}$	non	oui	oui	oui

	ouvert	propre	surjective	$f(\mathbb{C}) \ni$ interieur
holomorhpic z^2	oui	oui	oui	oui
$(z-\overline{z})\circ(z^2)$	non	non	non	non
cône $\begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$	non	non	non	oui
pli $\approx \begin{pmatrix} x+y \\ xy \end{pmatrix}$	non	oui	non	oui
hypocycloïd $z^2-\overline{z}$	non	oui	oui	oui

Théorème Sauf $f \sim$ hol. ou $(z-\overline{z})\circ$ hol.
(colonnes extrémales vraies) f non ouvert et $f(\mathbb{C}) \ni$ interieur.

Théorème La dernière ligne est vraie pour
$f \sim p - \overline{q}$, $\deg(p) \neq \deg(q)$.

Lemme. propre $\not\Longrightarrow$ surjective, propre $\Longrightarrow$ $int(f(\mathbb{C})) \neq \emptyset$.

Lieu critique pour $f = p - \overline{q} \not\sim$ hol.

$\mathcal{C}_f =$ lieu critique $= \{z \mid Jac(f) = 0\} = \{z \mid |p'|^2 - |q'|^2 = 0\}$

$\mathcal{V}_f = \{$valeurs critiques$\} = f(\mathcal{C}_f)$.

	$\mathcal{C}_f$	$\mathcal{V}_f$
z^2	$\{0\}$	$\{0\}$
$(z - \overline{z}) \circ z^2$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$
$\begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$	$i\mathbb{R}$	$\{0\}$
pli $\approx \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix}$	une ligne	une parabole

Lemme. $f \sim$ hol. ou $(z - \overline{z})\circ$ hol.

$\iff \mathcal{C}_f$ est soit fini soit $= \mathbb{C}$

$\iff \dfrac{p'(z)}{q'(z)} \equiv$ constant.

Lieu critique pour $f = p - \overline{q} \not\sim$ hol. , $\not\sim (z - \overline{z}) \circ$ hol.

Théorème

1. (topologie) $\mathcal{C}_f = \psi^{-1}(S^1) \bigcup \{\text{un nombre fini de pts}\}$

pour $\psi = p'/q'$ une fraction rationnelle. Et réciproquement.

2. $\mathcal{C}_f$ est un graphe (disconnexe) fini.

- le long d'une arête L,
  soit f réalise un pli de Whitney
  soit f la contracte en un point.

$\Longrightarrow$ f n'est pas ouverte.

Théorème .

$\mathcal{C}_f$ borné	$\Longrightarrow$	propre et surjective
	$\not\Longleftarrow$	fibres finis
$f\|_{\mathcal{C}_f}$ nul part loc. constant		
$\Updownarrow$	$\Longleftarrow$	f propre
f de fibres finis.		

Théorème . Convexité ...