Groupe de travail ergodique et dynamique
11 juin 2012, Orsay

Fractions rationnelles à valeurs critiques prescrites et à dynamique critique prescrite

Tan Lei (Université d'Angers)

Points critiques, valeurs critiques d'une fraction rationnelle. Multiplicité. Comptage

Lemme : Une fraction rationnelle de degré d
admet $2d-2$ points critiques compté avec multiplicité.

Preuve topologique : Soit Γ une courbe de Jordan passant par les valeurs critiques. Soit k le nombre de ces valeurs.

On peut considérer Γ comme un graphe ayant 2 faces, k sommets et arêtes.

On montre que $f^{-1}(\Gamma)$ est un graphe connexe, ayant $2d$ faces et kd arêtes.

De plus, $kd = \#\text{sommets} + \#_{mult}\text{points critiques}$. Donc
$2 = 2d - kd + (kd - \#_{mult}\text{points critiques}) =$
$2d - \#_{mult}\text{points critiques}$.

Problème 1, prescrire les valeurs critiques

Déterminer les fractions rationnelles/un polynôme à valeurs critiques prescrites. Existence ? Unicité ?

Étant donné une liste X de $d-1$ points (éventuellement confondus) dans $\mathbb{C}$ comme points critiques d'un polynome P, on a

$$P(z) = A \int \prod_{c \in X} (z - c)\, dz + B \ .$$

Cependant, il n'y a pas de formule algébrique pour exprimer un polynôme à partir de ses valeurs critiques, ou une fraction rationnelle à partir de ses points critiques ou valeurs critiques.

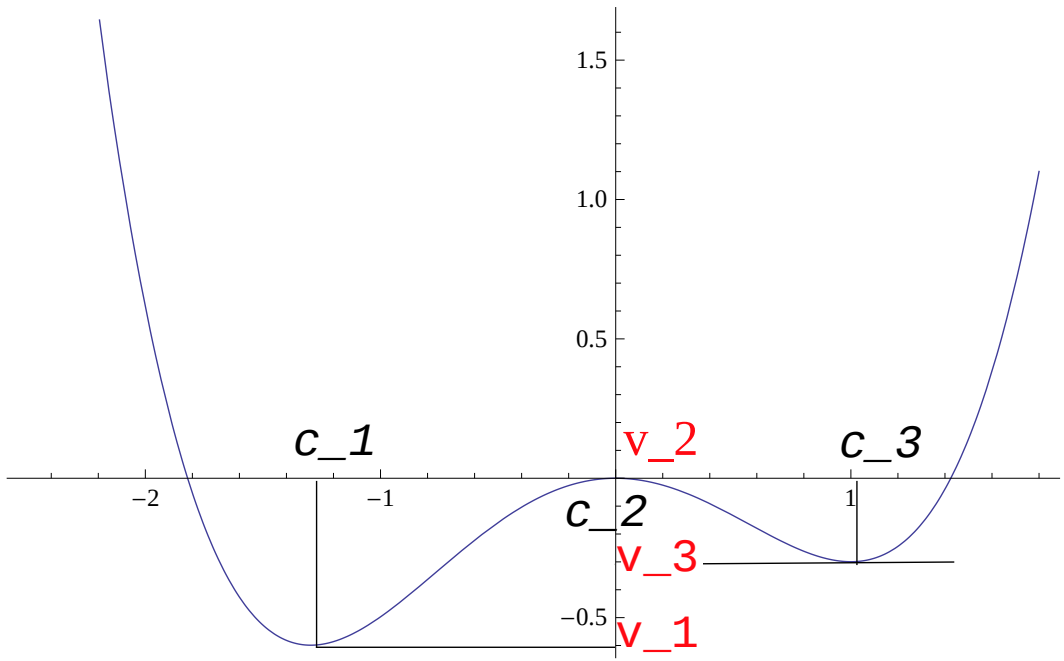
Problème de précomposition par une homographie : disparait sous normalisation

Problème combinatoire : ne disparait pas.

Exemple : polynôme quartic à points critiques réels

On cherche un polynôme f de points critiques $c_1 < c_2 < c_3$ et de valeurs critiques $v_i = f(c_i)$ tel que $\{v_1, v_2, v_3\}$ coïncide avec un ensemble V de trois points réels prédéterminé. Il y a deux ordres possibles : $v_1 < v_3 < v_2$ et $v_3 < v_1 < v_2$, encodés par $(1, 3, 2)$ et $(3, 1, 2)$ respectivement.

Lemme. Le coupe (V, ordre) $\longrightarrow$ un unique polynôme monique centré, de points critiques réels.



Problème 2 : Prescrire la dynamique critique

Un exemple facile : Déterminer un polynôme P quartique réel monique et centré, de points critiques réels $c_1 < c_2 < c_3$ tel que $P(c_1) = c_1$, $P(c_2) = c_3$ et $P(c_3) = c_2$.

Algorithme itératif de Thurston : Commencer par un $V = \{a < b < c\}$ quelconque, calculer (si l'on peut) l'unique P monique centré d'ensemble valeurs critiques V avec ordre (1,3,2) ainsi que ses points critiques $c_1 < c_2 < c_3$. Re-initialiser V en $\{c_1, c_2, c_3\}$ et recommencer.

Théorème (Thurston) Cet algorithme converge vers le polynôme recherché.

Un peu plus difficile : cherche P monique centré tel que pour $c_1 < v_1 < c_2 < c_3$ on a $P(c_1) = v_1$, $P(v_1) = P(c_3) = c_2$ et $P(c_2) = c_3$. Soit $V' = \{a < b < c < d\}$ quelconque, et $V = \{b < c < d\}$, calculer l'unique P réalisant $(V, (1, 3, 2))$, ses points critiques $c_1 < c_2 < c_3$ ainsi que x l'unique préimage de c dans $]c_1, c_2[$. Re-initialiser V' en $\{c_1, x, c_2, c_3\}$ et recommencer.

Cas général

1. Prescrire la dynamique critique avec sa combinatoire.
2. Initialisation quelconque de l'orbite critique V'.
3. Soustraire l'information (V, combinatoire)
4. Réaliser la fraction rationnelle f (existence et unicité ?).
5. A l'aide de $f^{-1}(V')$ pour re-initialiser V' et recommencer.
6. L'algorithme peut diverger due à la présence éventuelle des obstructions...

Retour au problème de valeurs critiques prescrites

Deux fractions rationnelles $f, g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ sont dites isomorphes s'il y a une transformation homographique M telle que $f \circ M = g$.

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{M} & \overline{\mathbb{C}} \\ & {\scriptstyle g}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & \overline{\mathbb{C}} & \end{array}$$

Clairement f et g partagent le même degré et le même ensemble de valeurs critiques.

Questions. Étant donné un degré d et un ensemble $V \subset \overline{\mathbb{C}}$

1. Énumérer les classes d'isomorphisme de degré d ayant V comme l'ensemble des valeurs critiques.
2. Donner une description combinatoire de ces classes.
3. Calculer les coefficients des représentants.

Motivations

1. la théorie des cordes
2. factorisations dans le groupe symétrique à d éléments.
3. Théorie des graphes, combinatoire, empilement de cercles
4. géométrie algébrique, singularité, invariants de Gromov-Witten, les compléments de discriminants dans des espaces des modules divers
5. Branched covering between surfaces $\longrightarrow$ orbifold-covering between 2–orbifolds $\longleftrightarrow$ subgroups of orbifold fundamental groups $\longrightarrow$ a subgroup of a Fuchsian group with a prescribed signature $\longrightarrow$ decide whether an arbitrary generating set of a surface group is Nielsen-equivalent to the standard generating set.
6. A finite covering between Seifert 3–manifolds (circle fibrations over 2–orbifolds) $\longrightarrow$ a covering between the base 2–orbifolds $\longleftrightarrow$ a branched covering between surfaces.
7. construire des polynômes/fractions rationnelles à dynamique prescrite

Prescrire valeurs critiques, Résultats d'énumérations

Lemme : l'énumération ne dépend pas de la position de V, mais seulement sur la liste non-ordonnée $\mathbf{X} = \{X(v), v \in V\}$ (le passeport) **des types de branchement** sur les points de V, où

$$X(v) = 1^{m_1(v)} 2^{m_2(v)} \dots d^{m_d(v)}$$

avec $m_i(v) \geq 0$ le nombre des points au dessus de v de degré local i. Clairement

$$m_1(v) + 2 \cdot m_2(v) + \dots + d \cdot m_d(v) = d \ .$$

Preuve. Un homéomorphisme préservant l'orientation $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ induit une bijection entre des classes d'isomorphisme sur V et sur $h(V)$ avec le même passeport.

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\exists H} & \overline{\mathbb{C}} \\ f \downarrow & & \downarrow \exists F \\ \overline{\mathbb{C}}, V & \underset{h}{\longrightarrow} & \overline{\mathbb{C}}, h(V) \end{array}$$

Énumération de degré d avec valeurs critiques simples

1. (Looijenga(1974)-Lyashko(1983)) Pour V un ensemble de $d-1$ points distincts dans $\mathbb{C}$, le nombre des classes d'isomorphisme des polynômes de degré d avec V comme ensemble des valeurs critiques est égal à d^{d-3} : $1, 1, 1, 4, 25, 216, 2401, \cdots$.
2. (Hurwitz, 1891) Pour V un ensemble de $2d-2$ points distincts dans $\overline{\mathbb{C}}$, le nombre des classes d'isomorphisme de des fractions rationnelles de degré d avec V comme ensemble des valeurs critiques est égal à $\frac{(2d-2)!}{d!}d^{d-3}$:

$$1, 1, 4, 120, 8400, 1088640, 228191040, \cdots .$$

3. polynômes réels de degré d avec points critiques réels et valeurs critiques simples : de fonction génératrice $\sec x + \tan x$: $1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, \cdots$.
4. les fractions rationnelles de degré d avec points critiques réels et valeurs critiques simples : $\leq 2d-2!$.

Énumérations

• Formule formelle de Mednykh, ne se concrétise que dans des cas simples

• Zvonkin & Lando : Une formule pour chaque passeport polynomial.

• Ekedahl, Lando, Shapiro Vainshtein : une formule pour $h_{g,\mathbf{X}}$, où g est le genre de la surface du revêtement, $\mathbf{X}$ est un passeport avec ≤ 1 valeur critique multiple.

Cas réel : On décrit d'abord la combinatoire, puis on énumère

Pour les polynômes à coefficients réels avec tous les points critiques réels et simples, $c_1 < c_2 < \cdots < c_{d-1}$, les valeurs critiques v_i sont rangés dans $\mathbb{R}$ en zigzagant : si v_i est à droite (gauche) de v_{i-1}, alors v_{i+1} doit être à gauche (droite) de v_i. Ainsi, étant donné un ensemble V de $d-1$ points distincts dans $\mathbb{R}$, il faut encore préciser une permutation en zigzag de l'ensemble des indices $\{1, \cdots, d-1\}$ pour pouvoir déterminer un polynôme réel.

Le nombre de permutations en zigzag croît rapidement avec d :

1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, 50521, 353792, 2702765, 22368256, 199360981 1903757312, 19391512145, 209865342976, 2404879675441...

Pour les fractions rationnelles à points critiques réels simples toutes les permutations sont autorisées. On obtient donc $(2d-2)!$ solutions.

Preuve du théorème Looijenga-Lyashko

$$\mathcal{LL} : f(z) \mapsto d(t) := \prod_{v \text{ valeur critique de } f} (t - v).$$

On a $\mathcal{LL}(f - v)(t) = \mathcal{LL}(f)(t + v)$. Soit $B(z) = (z^{d-2} \ \cdots \ z \ 1)$.

$$\begin{array}{ccc}
\{\text{Classes d'isomorphisme}\} & \xrightarrow{\text{vals. cr}} & \mathbb{C}^{d-1}/S_{d-1} \\
\uparrow \beta \ (d:1) & & \updownarrow \\
\{\text{monique centré deg} = d\} & \xrightarrow{\mathcal{LL}} & \{t^{d-1} + B(t)\cdot \mathbf{d}, \mathbf{d} \in \mathbb{C}^{d-1}\} \\
\cup \downarrow \text{fibre} = \mathbb{C} & & \cup \downarrow \text{fibre} = \mathbb{C} \\
\text{hypersurface} & \xrightarrow{\mathcal{LL}} & \{t^{d-1} + B(t)\cdot \mathbf{d}, \text{centré}\} \\
\uparrow \alpha \ (d!:1) & & \uparrow \tau \ (d!:1) \\
\{\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{d-1}, \text{centré}\} & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{LL}} \ (d^{d-2}:1)} & \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{d-1}, \text{centré}\}
\end{array}$$

Théorème. *$\widehat{\mathcal{LL}}$ est polynomiale, homogène, propre, de degré d par coordonnée, en particulier ouverte et surjective.*

Degré 4

$$\widehat{\mathcal{LL}} : \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -c_1^4 + 2c_1^3(c_2+c_3) - 6c_1(c_1c_2c_3) \\ -c_2^4 + 2c_2^3(c_1+c_3) - 6c_2(c_1c_2c_3) \\ -c_3^4 + 2c_3^3(c_1+c_2) - 6c_3(c_1c_2c_3) \end{pmatrix} - \text{centre}$$

$$\underset{\sum c_i=0}{=} - \begin{pmatrix} c_1^4 + 2c_1(c_1c_2c_3) \\ c_2^4 + 2c_2(c_1c_2c_3) \\ c_3^4 + 2c_3(c_1c_2c_3) \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 \\ c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 \\ c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{LL}(z^4 + p_2z^2 + p_3z + p_4) =$

$\text{discriminant}(z^4 + p_2z^2 + p_3z + p_4 - t, z)/(-256) =$

$$t^3 + \frac{1}{2}(p_2^2 - 6p_4)t^2 + \frac{1}{16}(p_2^4 + 9p_2p_3^2 - 16p_2^2p_4 + 48p_4^2)t +$$
$$\frac{1}{4^4}(4p_2^3p_3^2 + 27p_3^4 - 16p_2^4p_4 - 144p_2p_3^2p_4 + 128p_2^2p_4^2 - 256p_4^3)$$

L'hypersurface des poly. à valeurs critiques centrées est le graphe d'une fonction $p_d(p_2, \cdots, p_{d-3})$.

Preuve (inspiré de LL et Douady-Sentenac).

Soit $c_i^* = \lambda c_i$. En degré 4, soit $g^*(x) = 4(x - c_1^*)(x - c_2^*)(x - c_3^*)$. Alors $g^*(\lambda x) = \lambda^3 4(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) = \lambda^3 g(x)$. Donc $g^*(\lambda x) = \lambda^{d-1} g(x)$ en général.

$$
\begin{aligned}
v_i^* &= \left(\int_0^{c_i^*} - \frac{1}{d-1} \Big[\sum_{j=1}^{d-1} \int_0^{c_j^*} \Big] \right) g^*(u) du \\
&= \left(\int_0^{\lambda c_i} - \frac{1}{d-1} \Big[\sum_{j=1}^{d-1} \int_0^{\lambda c_j} \Big] \right) g^*(u) du \\
&= \left(\int_0^{c_i} - \frac{1}{d-1} \Big[\sum_{j=1}^{d-1} \int_0^{c_j} \Big] \right) g^*(\lambda x)\, \lambda\, dx = \lambda^d v_i \ .
\end{aligned}
$$

$\widehat{\mathcal{LL}}^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$ (on compte le nombre de préimages de LA valeur critique). Donc $\widehat{\mathcal{LL}}$ est propre.

Par Bezout $\widehat{\mathcal{LL}}$ est de multiplicité d^{d-2}. q.e.d.

En particulier $\widehat{\mathcal{LL}}$ est ouvert, surjective, de lieu critique $\bigcup_{i\neq j}\{c_i = c_j\}$, de valeurs critiques $\bigcup_{i\neq j}\{v_i = v_j\}$. Donc un revêtement au dessus du lieu hors valeurs critiques (= passeport générique).

Ce résultat permet de construire des polynômes à valeurs critiques simples prescrites : on relève des chemins.

Voici un programme en scilab (écrit par HHR).

Problème : Etudier la monodromie de $\mathcal{LL}$ afin de trouver tout le fibre $\mathcal{LL}^{-1}(\mathbf{v})$.

Problème : Etudier l'endomorphisme de $\mathbb{C}P^{d-3}$ induit, analyser les passeports non génériques.

Pour les polynômes de passeport non-générique :

1. S'il y a seulement une valeur critique multiple, on peut trouver une paramétrisation en un espace vectoriel et faire le même calcul ;

2. S'il y en a plus, on peut trouver une transversalité au niveau de $\widehat{\mathcal{LL}}$.

(Arnold) Les fractions rationnelles ayant au plus trois pôles peuvent être traitées de la même façon.

Autrement, l'espace de fonctions méromorphes avec n les pôles d'une courbe de genre g sur $\overline{\mathbb{C}}$ est un fibré sur l'espace des modules des courbes de genre g avec n points marqués.

La théorie d'intersection (au lieu du théorème de Bezout) dans l'espace des modules est nécessaire et avant cela l'espace des modules doit être compactifié et son espace fibré doit être complété.

La compactification de Deligne-Mumford donne l'énumération (avec le type de branchement aux pôles prescrit).

Encoder $\mathcal{LL}^{-1}(\mathbf{v})$, méthodes combinatoires

Revient à étudier les classes d'isomorphisme des revêtements ramifiés topologiques.

1. action par monodromie du groupe $\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus V)$ (classes de conjugaison des sous groupes d'indice d)
2. representations $\pi_1 \to S_d$ modulo conjugaison interne.
3. tirer en arrière d'un polygone ou d'une étoile à sommets valeurs critiques.
4. un parcours dans le graphe complet à d sommets.
5. empilement de cercles et triangulation
6. ...

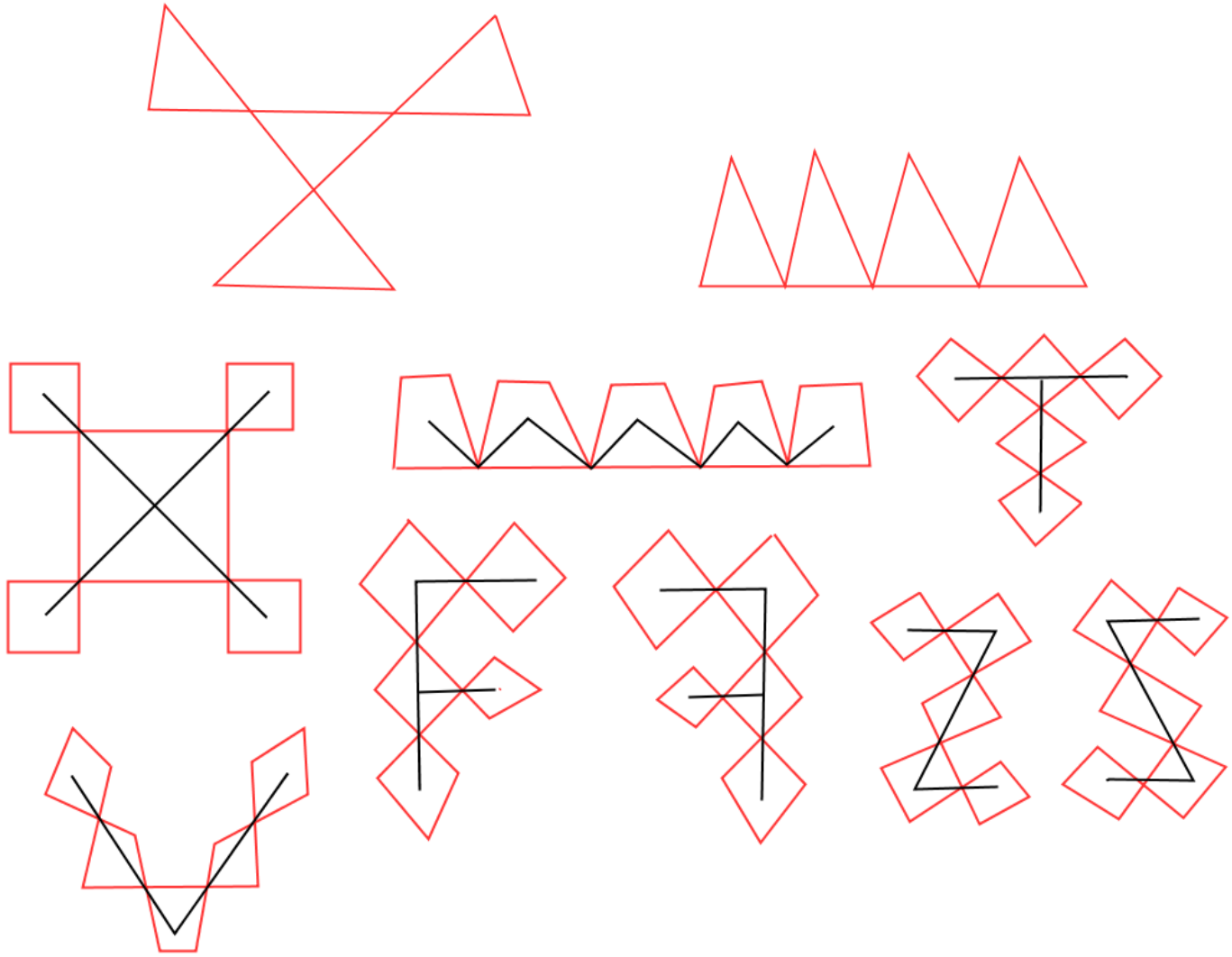
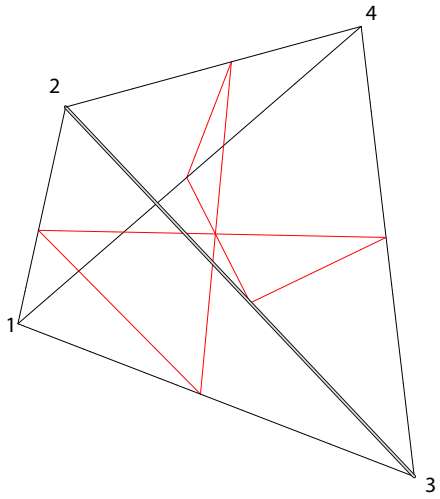
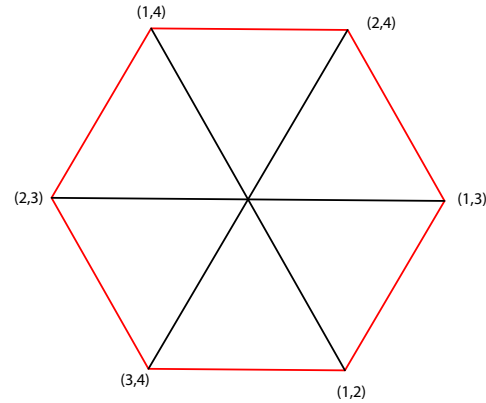
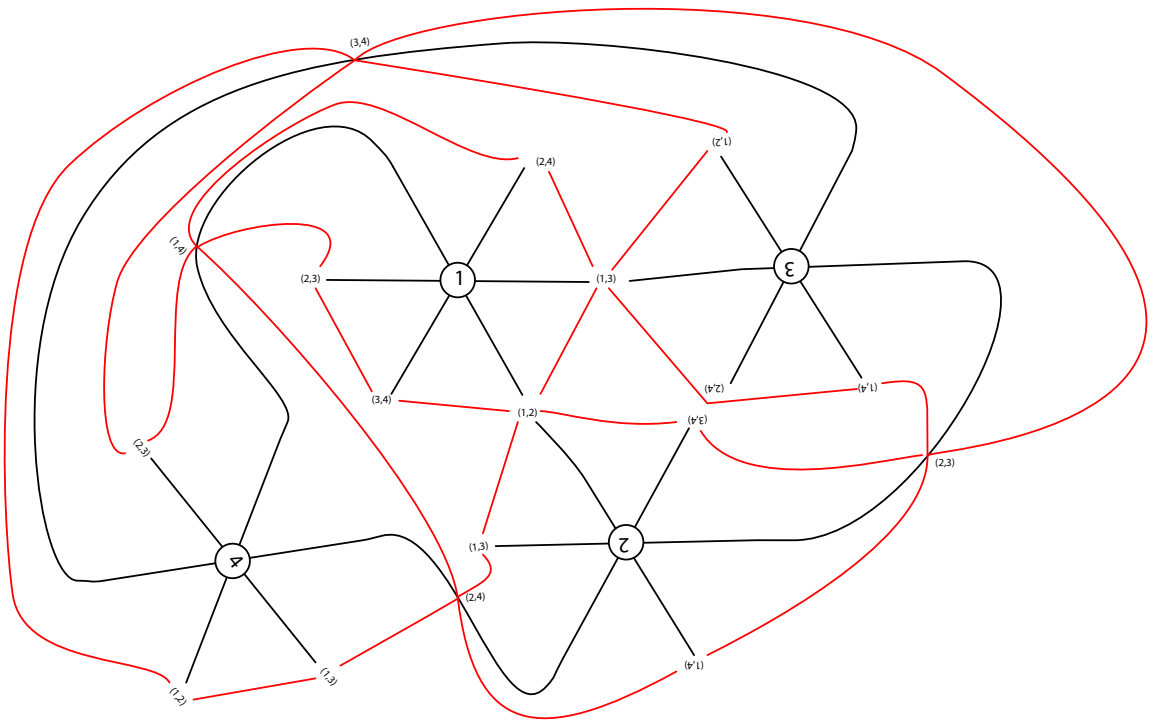


Figure: Degré 4 et 5, cas polynomial



[f1, f2, f3, f4, f5, f6] -> [(1,3), (2,4), (1,4), (2,3), (3,4), (1,2)]



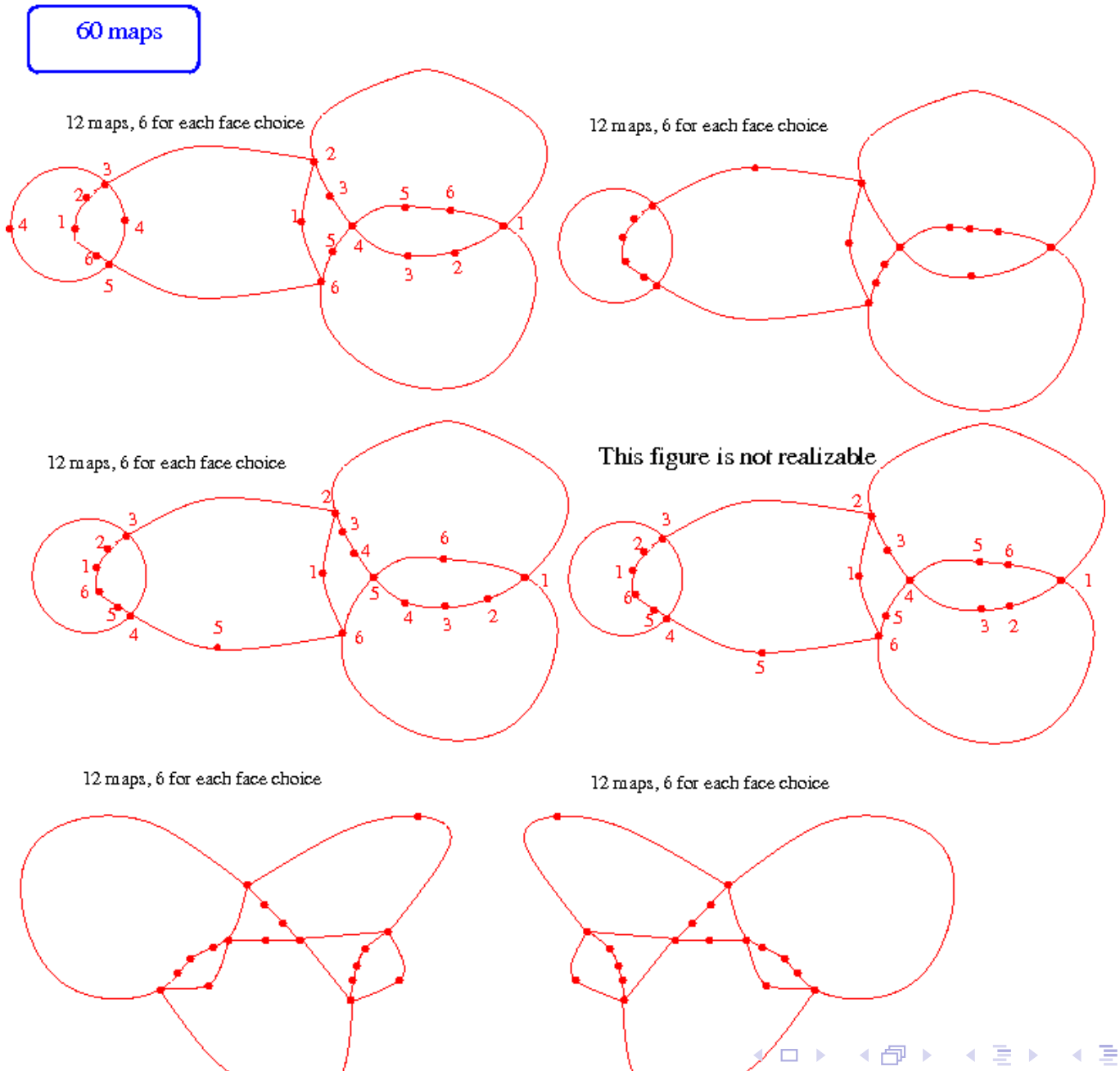


Portions des 120 6-tuples de permutations

$[(1,2),(2,3),(2,3),(3,4),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,3),(1,2),(2,3),(3,4),(3,4),(1,2)]$,
$[(2,3),(1,3),(2,3),(3,4),(3,4),(1,2)]$,
$[(2,3),(2,3),(1,2),(3,4),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,2),(2,4),(3,4),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,4),(1,2),(3,4),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(2,4),(1,4),(3,4),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,2),(3,4),(2,3),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(3,4),(1,2),(2,3),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,2),(2,3),(2,4),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,3),(1,2),(2,4),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(2,3),(1,3),(2,4),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,4),(3,4),(1,2),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(3,4),(1,3),(1,2),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(1,3),(1,4),(1,2),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(2,4),(3,4),(1,3),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(3,4),(2,3),(1,3),(2,3),(3,4),(1,2)]$,
$[(2,3),(2,4),(1,3),(2,3),(3,4),(1,2)]$

$\ldots$ $\ldots$

Portions des 120 classes de degré 4



Problèmes de réalisation : combinatoire non-canonique, et pas d'algorithme du passage
$(V, \text{combinatoire}) \to$ coefficients.
Le lieu de passeport constant peut ne pas être connexe.

Prescrire la dynamique à la Thurston...

Passeports non réalisable

Une condition nécessaire pour qu'un passeport soit réalisable et qu'il doit impliquer le bon nombre, i.e. $2d-2$ de points critiques :

Un point au dessus de v de degré local k est compté comme $k-1$ points critiques, donc si $X(v) = 1^{m_1(v)}2^{m_2(v)}\dots d^{m_d(v)}$ alors il y a $(1-1)\cdot m_1(v) + (2-1)\cdot m_2(v) + \dots + (d-1)\cdot m_d(v)$ points critiques au dessus de v, donc on doit avoir (conditions de Hurwitz) :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{d} k \cdot m_k(v) = d, \quad \forall\, v \in V \\ \sum_{v\in V}\sum_{k=1}^{d}(k-1)\cdot m_k(v) = 2d-2 \end{cases}.$$

Dans le cas polynomial, c'est-à-dire $X(v) = (d^1)$ pour un certain $v \in V$, cette condition nécessaire est aussi suffisante.

La condition est non suffisante dans le cas non-polynomial. Voici un exemple : $d = 4$ et $\mathbf{X} = (1^1 3^1, 2^2, 2^2)$ (preuve par absurde : il faut tirer en arrière un arc passant par les 3 valeurs critiques ayant les deux extrémités de type 2^2, ou une étoile ayant les 3 valeurs

Existence ou non

Le problème de déterminer $\mathbf{X}$ tel que $\mathit{Hurwitz}(\mathbf{X})$ soit nul ou non est un problème ouvert. Voir :

Ekaterina Pervova et Carlo Petronio, On the existence of branched coverings between surfaces with prescribed branch data.

Par exemple, tout passeport polynomial est réalisable.

Prescrire les points critiques simples

Etant donné un ensemble X de $2d-2$ points distinct dans $\mathcal{P}$, il existe un nombre de Catalan $C(d-1)$ de fractions rationnelles de degré d réalisant X comme ensemble critique, modulo post-composition par les homographies.

Un invariant complet de la classe d'équivalence est la dérivée Schwarzienne, qui est une différentielle quadratique méromorphe sur $\mathcal{P}$.

On peut donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une différentielle quadratique méromorphe sur $\mathcal{P}$ soit la dérivée Schwarzienne d'une fraction rationnelle. La résolution provient de la résolution d'une équation différentielle de type $y'' + q(z)y = 0$.

Il manque encore une compréhension géométrique de cet invariant pour donner au sens du nombre de Catalan de solutions.