0 Plan du cours

Chapitre 1. Calcul matriciel : matrices à coefficients dans K = R ou C, écriture indicielle, matrices remarquables (unité, nulle, ligne, colonne, carrée, triangulaire, diagonale, symétrique, orthogonale), transposée, opérations sur les matrices, produit matriciel,

Chapitre 2. Systèmes linéaires : systèmes équivalents, rang, opérations élémentaires sur les lignes, méthode du pivot de Gauss, Calculer A inverse par ces opérations. interprétation matricielle du pivot de Gauss.

Chapitre 3. Sous espaces vectoriels engendré. Combinaisons linéaires.

Chapitre 4. Espaces vectoriels sur K = R ou C : définition, familles libres, familles génératrices, bases, sous-espaces vectoriels, supplémentaires, espaces vectoriels euclidiens (produit scalaire classique), orthogonalité. matrice de changement de base, inverse, comatrice, espace affine des solutions,

Chapitre 5. Applications linéaires et matrices : définition (endomorphisme, isomorphisme, automorphisme), image et noyau, injectivité et surjectivité, rang, matrice d'une application linéaire, matrice d'une somme d'un produit par un scalaire et d'une composition d'applications linéaires, effet d'un changement de bases, matrices équivalentes et matrices semblables, rang, interprétation matricielle d'une symétrie

Chapitre 6. Déterminants : développement suivant une ligne ou une colonne, mineur, cofacteur, déterminant d'un produit, formules de Cramer pour les systèmes linéaires

Chapitre 7. Réduction des matrices carrées : valeurs propres, sous-espaces propres, somme directe des sous-espaces propres, polynôme caractéristique, théorème de Hamilton-Cayley, application au calcul de la puissance d'une matrice, théorème fondamental sur la diagonalisation des matrices, cas de la multiplicité un pour toutes les valeurs propres

Volume : 15x 1h20 sequence de CM + 24x1h20 sequences de TD

Evaluation : 100% contrôle continu avec 3 devoirs sur table, dont un hors volume horaire.

1 devoir : 26 oct.

2eme devoir : 29 nov.

3eme hors volume horaire : 11 janvier 2013.

1 Calcul matriciel

1.1 Vecteurs dans $\mathbb{R}^n$

Un vecteur dans $\mathbb{R}^n$ est une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de n nombres réels, ou encore, $\vec{\mathbf{u}}$ (sous forme compacte). On utiliserait aussi d'autres lettres $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{x}}$ etc.

Par contre les lettres $\vec{\mathbf{e_1}}, \vec{\mathbf{e_2}}, \cdots$ sont réservées pour désigner les vecteurs spéciaux suivants :

$$\vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \vec{\mathbf{e_n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ils sont appelés les **vecteurs de la base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Exemple. Un vecteur dans $\mathbb{R}^2$, prend la forme $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, et un vecteur dans $\mathbb{R}^3$ prend la forme $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exercice : Exprimer ces vecteurs explicitement en $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Opérations dans $\mathbb{R}^n$: addition, ou multiplication par un scalaire, ou une combinaison des deux, appelée **combinaison linéaire**.

Exercice : les opérations soustraction, multiplication, division sont-elles permises ?

Un exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Une combinaison linéaire peut prendre une forme plus générale $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 3\vec{\mathbf{u}} + 2\vec{\mathbf{v}}$.

On peut aussi renverser l'égalité : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{\mathbf{e_1}} + y\vec{\mathbf{e_2}}$

Question : exprimer si possible $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ en combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou encore exprimer, si possible $\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$, ou encore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Comment faire ? On transforme la recherche des coefficients en la résolution d'un système linéaire.

D'autres types de questions plus compliquées : Trouver un $\vec{\mathbf{b}}$ qui n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{u_1}}, \cdots, \vec{\mathbf{u_k}}$.

Par exemple : Trouver un $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2$ qui qui n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{e_i}$, $i = 1, 2$. Réponse : il n'y en a pas.

Trouver un $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ qui qui n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{e_i}$, $i = 1, 2$. En forme précise : déterminer un vecteur $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ qui ne peut pas s'écrire sous la forme

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Réponse : $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{e_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Question suivante (encore plus compliquée) : Déterminer tous les $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ qui ne sont pas une combinaison linéaire de $\vec{e_i}$, $i = 1, 2$.

Suite : Déterminer tous les $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ qui ne sont pas une combinaison linéaire de $\vec{e_i}$, $i = 1, 2$, ou encore déterminer tous les $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ qui ne sont pas une combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. On apprendra des méthodes pour répondre à ce genre de questions (qui pourrait être difficiles).

Ces questions peuvent avoir une unique réponse, ou ne pas avoir des réponses, ou avoir une infinité de réponses. Voici quelques exemples :

Est-ce que $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$?

Même question pour $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$. Si oui de combien de façons ?

Il nous arrivent de poser ces questions avec des paramètres : pour quelle valeur de a peut-on exprimer $\vec{\mathbf{e_1}}$ en combinaison linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$?

1.2 Matrices

Définition 1.1. *On appelle matrice réelle de taille $m \times n$ un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.*

On utilise en générale une lettre capitale pour désigner une matrice. La lettre I ou bien I_n est réservée pour une matrice spéciale, appelée **la matrice d'identité**.

Exercice : Ecrire explicitement I_2 et I_3.

Exemple 1.2.

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *On écrit sous forme indicielle* $A = (A_{ij})$ *avec* $i = 1, 2, 3$ *et* $j = 1, 2$. *On a* $A_{21} = -2$ *et* $A_{32} = 1$.
2. $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ *(vecteur colonne).*
3. $v = (3 \;\; -4) \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ *(vecteur ligne).*
4. $C = (8) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ *(aussi une matrice !).*
5. $D = (D_{ij})_{2,2}$ *avec* $D_{ij} = i + j$ *(matrice donnée sous écriture indicielle).*
6. $X = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 2x - by \end{pmatrix}$, *quelle est sa taille ?*
7. *version une liste de vecteur colonne* $A = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{u}} \, \vec{\mathbf{v}} \end{pmatrix}$ *avec* $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, *et* $\vec{\mathbf{v}} = ...$

Opérations permises : addition (des matrices de même taille) et multiplication par un scalaire ou une **combinaison linéaire** des deux :

Exemple 1.3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + ...$

On peut aussi **chasser le facteur commun** :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2I$$

$$\begin{pmatrix} 1/15 & 2/15 \\ 4/15 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 0 \end{pmatrix} =??$$

Multiplication de deux matrices

Attention 1 L'ordre est important ! NE PAS confondre AB avec BA.

Pour pouvoir effectuer AB, il faut

$$\boxed{\textbf{la longueur d'une ligne de } A = \textbf{la longueur d'une colonne de } B}$$

ou bien le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B.

Pour multiplier : on effectue un produit scalaire case par case.

Exemple 1.4.

1.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Les tailles sont :* $3 \times 2 \smile 2 \times 2 \to 3 \times 2$.

Voila un tableau pour calculer le produit :

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & AB \end{array} = \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ -6 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. *On a* $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *De même* $(4\ 2)B = (14\ 6)$, $(-2\ 0)B = \ldots.$

4. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'$ *(comme le produit scalaire entre deux vecteurs). Les tailles sont* $1 \times 2 \smile 2 \times 1 \to 1 \times 1$.

5. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ *n'est PAS définie. Les tailles sont incompatibles !*

6. $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' \\ ba' & bb' \end{pmatrix}$ *(bizarre ... ?)*

7. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *écriture matricielle*

$= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ *écriture en système*

$= x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = x\vec{\mathbf{v}}_1 + y\vec{\mathbf{v}}_2 = (\vec{\mathbf{v}}_1\, \vec{\mathbf{v}}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
écriture en combinaison linéaire .
Les quatre formes d'écritures sont toutes aussi importantes les unes et les autres.

Ecriture indicielle Pour une matrice quelconque A, comment donner un nom à chaque élément de A ? On utilise une double indice a_{ij} avec i indique la ligne et j indique la colonne.

Définition 1.5. *Etant données deux matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (**NB : le même nombre** n) on définit le produit des deux matrices, $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, par*

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk}.$$

(l'élément ik est formé à partir de la i-ème ligne de A et la k-ème colonne de B.

Méthode 1.6. *La j-ème colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ se calcule par $A\vec{\mathbf{e_j}}$ où $\vec{\mathbf{e_j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ .. \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec 1 à la j-ème ligne et 0 ailleurs. Le n-tuple de vecteurs, $(\vec{\mathbf{e_1}}, \ldots, \vec{\mathbf{e_n}})$ s'appelle la* **base canonique** *de $\mathbb{R}^n$.*

Question : Comment trouver la i-ème line d'une matrice ? [1]

1.3 Quelques lois

Théorème 1.7. *Soient A, B, C trois matrices t.q. les produit AB et BC sont définis. Alors (en particuliers les deux membres sont bien définis) :*

$$(AB)C = A(BC).$$

On écrit simplement ABC pour ce produit. Quand c'est défini, on peut aussi factoriser

$$AB + AC = A(B + C), \quad AC + BC = (A + B)C, \quad A(B + kC) = AB + kAC$$

(Question piège : Est-ce qu'on peut factoriser $AB + BC$?)

Démo : Prenons $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors :

1. réponse : la multiplier à gauche par un vecteur spécial !

$((AB)C)_{il} = \sum_{k=1}^{p}(AB)_{ik}C_{kl} =$

$\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}C_{kl} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} A_{ij}B_{jk}C_{kl} =$

$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(BC)_{jl} = (A(BC))_{il}$.

(commutativité de l'addition des nombres réels).

Exemple 1.8.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 3 = 9$. *Il serait 'stupide' de calculer ce produit différemment.*

1.4 Matrices particulières et d'autres opérations matricielles

Définition 1.9. *Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ on définit sa matrice* **transposée** ${}^{\mathbf{t}}A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *qui échange les lignes et les colonnes :* ${}^{\mathbf{t}}A_{ji} = A_{ij}$.

Exemple 1.10.

1. ${}^{\mathbf{t}}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *On a*

$$\text{produit scalaire } \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = {}^{\mathbf{t}}\vec{\mathbf{a}}\,\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 + 4 = 1.$$

Définition 1.11. *On appelle $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice* **carrée** *si elle a le même nombre de lignes et de colonnes.*

Une matrice carré est dite

- **matrice identité** *si A est diagonale et $A_{ii} = 1$. On écrit aussi I_n pour la matrice identité dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On a $I_nB = B = BI_n$ (I_n joue le rôle de 1 dans la multiplication. (Qui joue le rôle de 0 dans l'addition ?) Que vaut $I\vec{\mathbf{v}}$?*
- **symétrique** *si* ${}^{\mathbf{t}}A = A$, *ou encore* $A_{ij} = A_{ji}$
- **anti-symétrique** *si* ${}^{\mathbf{t}}A = -A$, $A_{ij} = -A_{ji}$

- **diagonale** *si* $A_{ij} = 0$ *pour* $i \neq j$
- **triangulaire supérieure (inférieure)** *si* $A_{ij} = 0$ *pour* $i > j$ *(*$i < j$ *respectivement).*

Questions : Lorsqu'on combine la transposée avec $+, k.$ et la multiplication AB, qu'obtient-on ?

Exemple 1.12.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *La matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est la matrice identité* $\mathbf{1}_2 \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. *La multiplication par cette matrice agit comme la multiplication par le nombre 1 dans les réels. On a*
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. *une matrice symétrique : la table des multiplication, la table des kilométrages entre des pairs de villes.*
3. *un exemple antisymétrique : la table des différence, ou prêt-emprunts.*
4. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ *correspond à l'opération "chapeau"* $\widehat{(x; y)} = (-y; x)$ *qui effectue une rotation de* $\pi/2 = 90^o$ *dans le sens direct dans le plan.*

1.5 Matrice inverse

Etant donnée A et $\vec{c}$,

$A.? = \vec{c}$?

Ou bien comment résoudre $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{c}$ avec $\vec{\mathbf{x}}$ un vecteur inconnu ?

Supposes qu'on a connaissance d'une matrice B telle que $B.A = Id_n$, alors c'est facile de trouver $\vec{\mathbf{x}}$:

On multiplie de deux cotes de $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{c}$ par B par la gauche :

$$B.A\vec{\mathbf{x}} = A^{-1}.\vec{c} \quad \text{ce qui donne} \quad \vec{\mathbf{x}} = B.\vec{c}$$

Exemple :

Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ puis résoudre $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Solution $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Définition. Soit A une matrice carrée de taille n. Une matrice B de même taille est dite l'inverse de A, et est notée par A^{-1}, et $BA = Id_n$ (on omet n).

Théorème Pour le système $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{c}}$, si A admet une matrice inverse B, alors la solution du système est $B\vec{\mathbf{c}}$.

Propriétés : $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$. Si $BA = id$ alors $AB = id$. Preuve : Pour que $C^{-1}A^{-1}$ soit la matrice inverse de AC, il faut les multiplier :

$$C^{-1}A^{-1}(AC) = C^{-1}(A^{-1}A)C = C^{-1}IdC = C^{-1}C = id\ .$$

Pour le deuxième, $BA = id \Longrightarrow Au = v$ admet comme solution $u = BAu = Bv$. Du coup $(AB)v = A(Bv) = Au = v$ pour tout v. On applique à la base standard, on obtient que la j-ième colonne de AB est e_j. Donc $AB = id$.

Tester sur le pair de matrices ci-dessus.

Questions pièges : Combiner l'inversion avec la transposition, la multiplication avec un scalaire, et l'addition. Qu'obtient on ?

Problème Comment inverser une matrice ? Est-il toujours possible ? (problème abstraite et concrète).

Méthode 'brute' : on considère les coefficients comme des inconnues et on essaye de résoudre le problème : $?A = I$.

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Plus tard nous allons apprendre : des tests simples à chaque coup sur la possibilité ou non d'inverser une matrice donnée.

des méthodes systématiques de calculer cette matrice inverse lorsqu'elle existe.

Résoudre des systems Ax=b.

Tirer des info lorsque A n'est pas inversible.

2 Systèmes d'équations, systèmes linéaires

2.1 Résoudre manuellement des exemples de systèmes échelonnés

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z=0 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{La solution est } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2z=2 \end{cases} \quad \text{ou bien } \begin{cases} x+3z &= 6-2y \\ 2z &= 2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, z=1, x=3-2y\} = \{\begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R}\} = \{y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

2.2 Matrices triangulaires supérieures et échelonnées

Def. Une matrice **échelonnée** est :
1, toutes les lignes entièrement nulles sont en bas de la matrice
2. pour chacune des autres lignes, les entrées sous le premier élément non-nul sont toutes nulles.

Pour une telle matrice A, on appelle les **pivots** les premiers élément non-nul de chaque ligne non entièrement nulle.

On définit Rang(A)=nombres de pivots.

Exemple : Non échelonnée, échelonnée (en escalier, étagère, podium...)

2.3 Retour aux systèmes échelonnés

Définition. Un système linéaire est dit échelonné s'il s'écrit de la forme matricielle $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ avec A une matrice échelonnée.

Pour résoudre un tel système, on comment par repérer les pivots, puis déplacer les termes non-pivotals à droite des équations. On commence par résoudre la dernière équation, et remonter de poche en poche des autres équations.

2.4 Trois écritures d'un système linéaire

Considérons un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y :

$$(S_1) \qquad \begin{cases} 7\,x + 2\,y = a \\ 3\,x + y = b \end{cases} . \tag{1}$$

Ce système se présente sous **forme matricielle** :

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{2}$$

Il peut aussi se présenter sous **forme en combinaison linéaire** :

$$x \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

Les trois formes sont toutes utiles les unes et les autres pour résoudre un système linéaire.

On a apprit deux méthodes pour résoudre un système : l'écrire sous forme matricielle $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ et inverser la matrice A (si on peut),
ou bien, si le système est échelonné, on procède par la méthode de pivots : Exprimer le système sous forme combinaison linéaire et déplacer les colonnes non-pivotale à droite ;

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2z = 2 \end{cases} \quad \text{réécriture} \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

puis réarranger les termes

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{récriture} \quad \begin{cases} x + 3z &= & 6 - 2y \\ 2z &= & 2 \end{cases}$$

Dans les autres cas, il faut procéder autrement.

2.5 Echelonner une matrice par les 3 opérations élémentaires sur les lignes

3 opérations élémentaires sur les lignes pour échelonner une matrice :

1. Echanger deux lignes $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$
2. Multiplier une ligne par une constante non nulle $\ell_i \to a \cdot \ell_i$ $(a \neq 0)$.
3. Soustraire d'une ligne par un multiple d'une autre ligne : $\ell_i \to \ell_i - b\ell_j$ $(j \neq i)$.

Avec ces trois opérations, on peut toujours échelonner une matrice (ainsi qu'un système) :

1. Repérer la première colonne non-nulle et y marquer un élément non-nul (appelé 'pivot') ;

2. ramener la ligne du pivot tout en haut (en faisant un échange) ;

3. annuler les éléments sous le pivot (à l'aide des soustractions) ;

4. encadrer la sous matrice en bas à droite du pivot ;

5. Faire les étapes 1-5 avec cette sous matrice.

Ce boucle s'arrête surement.

On définit Rang(A)= le nombre de pivots de la matrice échelonnées. Les colonnes correspondantes de A sont appelées 'colonnes pivotales', les autres 'colonnes non-pivotales'.

2.6 Méthode de résolution d'un système linéaire

1. récrire, si nécessaire, le système sous forme matricielle

2. fabriquer la matrice augmentée

3. échelonner cette matrice par les trois opérations élémentaires sur les lignes

4. marquer les pivots.

5. transformer le tout sous forme combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice échelonnée

6. si la dernière colonne contient un pivot, on conclut que le système n'a pas de solution. Sinon,

7. déplacer, s'il y en a, les colonnes non pivotales à droite de l'égalité.

8. résoudre le système. Exprimer l'ensemble des solutions sous forme de combinaison linéaire. Le système a une unique solution si et seulement s'il n'y a pas de colonne pivotale.

9. vérification (si possible).

Pourquoi ça marche ? Parce que les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions !

2.7 Méthode de calculer la matrice inverse par la matrice compagnon

Soit A une matrice carrée. Pour à la fois determiner si A admet une matrice inverse, et calculer cette matrice, on fait :

Fabriquer la matrice compagnon avec la matrice d'identité $(A|I)$, effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de façon à transformer la partie à gauche en une matrice identité. Si on y arrive, on obtient $(I|B)$, alors B est la matrice inverse de A (on note $B = A^{-1}$). Sinon A n'est pas inversible.

Exemple 2x2,3x3.

Pourquoi ça marche ? Car chaque opération correspond à multiplier à gauche par une matrice élémentaire :

$$(A|I) \rightsquigarrow (E_1A \,|\, E_1I) = (E_1A \,|\, E_1) \rightsquigarrow (E_2E_1A \,|\, E_2E_1) \rightsquigarrow \cdots (E_n \cdots E_1A \,|\, E_n \cdots E_1) = (I \,|\, E_n \cdots E_1)\,.$$

Puisque $E_n \cdots E_1A = I$ on sait que $E_n \cdots E_1$ est bien A^{-1}.

2.8 Résolution d'un système linéaire

La nature de la solution dépend de la valeur du paramètre.

	$A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$	$A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, $C = \widehat{(A\|\vec{\mathbf{b}})}$ (la matrice augmentée et échelonnée)
$\vec{\mathbf{b}}$ pivotal	$\vec{\mathbf{0}}$ est toujours une solution	pas de solution
A inversible	il existe une unique solution	il existe une unique solution
A non inversible et $\vec{\mathbf{b}}$ non pivotal	il existe une infinité de solutions $\{a_1\vec{\mathbf{v}}_1 + \cdots + a_k\vec{\mathbf{v}}_k, a_i \in \mathbb{R}\}$	il existe une infinité de solutions $\{\vec{\mathbf{v}}_0 + a_1\vec{\mathbf{v}}_1 + \cdots + a_k\vec{\mathbf{v}}_k, a_i \in \mathbb{R}\}$

3 sev engendré, combinaison linéaire

3.1 Combinaison linéaire

$\vec{\mathbf{w}} = \sum_k a_k \vec{\mathbf{v}}_k$, et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{\mathbf{e}}_1 + y\vec{\mathbf{e}}_2 = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.2 Reconnaitre une combinaison linéaire

Le vecteur $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ est-il une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$? Pour le résoudre, poser des coefficients comme des inconnues, et traduire la question en : Est-ce que le système $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ admet une solution ?

Il suffit d'échelonner la matrice augmentée et résoudre si possible le système. On obtient $x = 2, y = 3$. Réponse de la question initiale : oui, $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ est bien une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, en effet $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{\mathbf{e}}_3$ est-il une combinaison linéaire de $\vec{\mathbf{e}}_1$ et $\vec{\mathbf{e}}_2$? évidemment non. Mais comment le justifier ?

On fabrique un système linéaire $x\vec{\mathbf{e}}_1 + y\vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_3$, et on montre qu'il n'y a pas de solution.

Un élève peut écrire une liste de vecteurs $\vec{\mathbf{v}}_i$ puis un vecteur $\vec{\mathbf{b}}$, et demander à un voisin si $\vec{\mathbf{b}}$ est une combinaison linéaire des $\vec{\mathbf{v}}_i$.

3.3 Sous espace vectoriel engendré

On utilise $\langle \vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m \rangle$ pour désigner l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des $\vec{\mathbf{v}}_i$, ou bien, en écriture ensembliste :

$$\langle \vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m \rangle = \{\sum_k a_k \vec{\mathbf{v}}_k, a_k \in \mathbb{R}\} = \{a_1\vec{\mathbf{v}}_1 + a_2\vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + a_m\vec{\mathbf{v}}_m \mid a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}\}.$$

On appelle ce ensemble le **sous espace vectoriel engendré** par les vecteurs $\vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m$.

Demander si $\vec{\mathbf{w}}$ est une combinaison linéaire des $\vec{\mathbf{v}}_i$ revient à demander si $\vec{\mathbf{w}}$ est dans $\langle \vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m \rangle$.

Voici plusieurs façon de poser la même question :

1. Est-ce que $\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \rangle = \mathbb{R}^3$?

2. Est-ce que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$?

3. Est-ce qu'il existe des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui ne s'expriment pas en combinaison linéaire des $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$? S'il y en a, comme en trouver un ?

Technique : on forme deux colonnes, on échelonne, on rajoute une 3ème colonne pivotale, puis on refait les opérations à l'envers. En détail :

Etape 1 : on forme la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}$.

Etape 2 : on l'échelonne :

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\\2 & 1\end{pmatrix} \underset{\ell_3 \mapsto \ell_3 - 2\ell_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\\0 & -3\end{pmatrix} \underset{\ell_3 \mapsto \ell_3 + \ell_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\\0 & 0\end{pmatrix} .$$

Etape 3 : on rajoute une colonne avec un pivot : $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Etape 4 : On refait les opérations à l'envers, mais avec la colonne en plus :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \underset{\ell_3 \mapsto \ell_3 - \ell_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & -3 & 1\end{pmatrix} \underset{\ell_3 \mapsto \ell_3 + 2\ell_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Etape 5 : Conclusion, le dernier vecteur colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux premiers vecteurs colonnes.

Pourquoi ça marche ?

Théorème d'échelonnement *Si une relation de combinaison linéaire se lit sur les vecteurs colonnes après échelonnement, alors il y a la même relation avant échelonnement.*

On peut faire un exercice avec deux vecteurs dans $\mathbb{R}^4$.

4 Système lié ou libre, famille génératrice et base

4.1 Système libre (indépendant), lié (dépendant)

Soient $\vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m$ un système de vecteurs. La question qu'on se pose ici est : Est-ce que l'un d'eux est une combinaison linéaire des autres ?

Si oui, on dit que le système est **lié**, sinon **libre**.

Critère : On peut prendre un par un puis vérifier si celui-ci est une combinaison linéaire des autres. Ca fait un système linéaire à résoudre par vecteur, donc beaucoup de systèmes au final.

Il y a plus simple : on dit que le système admet une relation d'annulation linéaire si une combinaison linéaire de ses vecteurs donne le vecteur nul : $\sum_k a_k \vec{\mathbf{v}}_k = \vec{\mathbf{0}}$.

Si pour un certain choix des a_k, l'un d'entre eux, par exemple a_j, est non nul, alors $\vec{\mathbf{v}}_j$ est une combinaison linéaire des autres ! Pourquoi ?

Donc

	le système est lié	le système est libre
	il existe une relation d'annulation $\sum_k a_k \vec{\mathbf{v}}_k = \vec{\mathbf{0}}$ avec au moin un $a_j \neq 0$	si $\sum_k a_k \vec{\mathbf{v}}_k = \vec{\mathbf{0}}$ tout les a_k sont nuls.
échelonner la matrices $(\vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_k)$	$\exists$ colonne sans pivot	toute colonne est pivotale

4.2 Bases et générateurs dans $\mathbb{R}^n$

Un système de vecteur est **un système générateur** de $\mathbb{R}^n$ si tout autre vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'exprime en combinaison linéaire des vecteurs de ce système.

Un système de vecteur est **une base** de $\mathbb{R}^n$ si tout autre vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'exprime en combinaison linéaire des vecteurs de ce système, et l'expression est unique.

Des exemples. Un vecteur dans $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs colinéaires dans $\mathbb{R}^2$, base canonique, trois vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

Comment montrer que $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ ne forment pas une base ? Il suffit d'expliciter un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui est en dehors de $\langle \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$.

4.3 Comptage

Théorème fondamental : Dans $\mathbb{R}^n$:

1. Un système de $n-1$ vecteurs ou moins n'est jamais générateur (il manque certainement des pivots)

2. Un système de $n+1$ vecteurs ou plus n'est jamais libre (il y a certainement des colonnes non pivotales)

3. Une base a exactement n vecteurs.

4. Tout système libre se complète (facilement) en une base.

5. De tout système générateur on peut extraire une base (en prenant les colonnes pivotales).

4.4 Relation entre deux bases

Partie 1. Ecriture matricielle de combinaison linéaire :

$$\vec{\mathbf{w}} = \sum_k a_k \vec{\mathbf{v}}_k = (\vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_m) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

On appelle les a_i les coefficients de $\vec{\mathbf{w}}$ dans la base $\mathcal{V}$.

Partie 2. A quoi ça sert toutes ces bases ? La base canonique suffit non ?

En fait chaque base est un système de référence pour étiqueter les vecteurs. Dans des situations différentes un système s'avère plus pratique qu'un autre. $\frac{1}{7} = 0.142857142857...$, lequel est meilleur ?

Partie 3, étant donnée 2 bases et un vecteur, comment convertir les coordonnées de $\vec{\mathbf{w}}$ dans une base aux celles dans l'autre base ?

1. On exprime chaque $\vec{\mathbf{v}}_i$ dans la base $\mathcal{U}$.

2. On collectionne ces coordonnées en une matrice de passage $P_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ de $\mathcal{U}$ vers $\mathcal{V}$.

3. On convertit les coordonnées de $\vec{\mathbf{w}}$ dans la base $\mathcal{V}$ en celles de $\vec{\mathbf{w}}$ dans la base $\mathcal{U}$.

	Base $\mathcal{U} = (\vec{\mathbf{u}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{u}}_n)$		Base $\mathcal{V} = (\vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_n)$
matrice de passage	$\mathcal{U}P_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$	$=$	$\mathcal{V}$
	$(\vec{\mathbf{u}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{u}}_n)P_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$	$=$	$(\vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_n)$
conversion des coordonnées	$Coor_{\mathcal{U}}\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$	$=$	$P_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Coor_{\mathcal{V}}\vec{\mathbf{w}}$

De plus, $P_{\mathcal{U},\mathcal{V}}^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{U}$, autrement dit $P_{\mathcal{U},\mathcal{V}}^{-1} = P_{\mathcal{V},\mathcal{U}}$.

Partie 4. Exemple. $\mathcal{U} = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2\}$, $\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{V} = \{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2\}$.

On a $P_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{\mathbf{w}}$ un vecteur dans $\mathbb{R}^2$ tel que $\vec{\mathbf{w}} = a\vec{\mathbf{v}}_1 + b\vec{\mathbf{v}}_2$. Alors les coordonnées de $\vec{\mathbf{w}}$ dans la base $\mathcal{U}$ sont

$$P_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ 2a + 3b \end{pmatrix}.$$