Chapitre 2. Systèmes d'équations, systèmes linéaires

§1. Trois écritures d'un système linéaire.

Considérons un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y :

$$\left\{ \begin{array}{l} 7\,x + 2\,y = a \\ 3\,x + \;\; y = b \end{array} \right. . \tag{1}$$

Ce système peut être présenté sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{2}$$

ou encore sous forme en combinaison linéaire :

$$x \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

Exo. Donner les autres formes du système $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = a \\ y - z = 0 \\ z = 1 \end{array} \right. .$

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $$\begin{cases} x + y + z = a \\ \quad\;\; y - z = 0 \\ \qquad\quad\; z = 1 \end{cases}$$

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $$\begin{cases} x + y + z = a \\ \phantom{x + {}} y - z = 0 \\ \phantom{x + y - {}} z = 1 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \qquad z = 1$$

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $$\begin{cases} x + y + z = a \\ \quad\quad y - z = 0 \\ \quad\quad\quad\quad z = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{c} z = 1 \\ y = z = 1 \end{array}$$

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $$\begin{cases} x + y + z = a \\ y - z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{r} z = 1 \\ y = z = 1 \\ x = a - 2 \end{array}$$

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $$\begin{cases} x+y+z=a \\ y-z=0 \\ z=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} z=1 \\ y=z=1 \\ x=a-2 \end{matrix} \underset{\text{vecteur}}{\overset{\text{sous forme}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $$\begin{cases} x+y+z=a \\ \quad\quad y-z=0 \\ \quad\quad\quad\ z=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{r} z=1 \\ y=z=1 \\ x=a-2 \end{array} \underset{\text{vecteur}}{\overset{\text{sous forme}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $\begin{cases} x+y+z=a \\ y-z=0 \\ z=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{r} z=1 \\ y=z=1 \\ x=a-2 \end{array} \underset{\text{vecteur}}{\overset{\text{sous forme}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2z=2 \end{cases}$

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $$\begin{cases} x+y+z=a \\ y-z=0 \\ z=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{c} z=1 \\ y=z=1 \\ x=a-2 \end{array} \underset{\text{vecteur}}{\overset{\text{sous forme}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2z=2 \end{cases} \text{ on déplace un terme } \begin{cases} x+3z &= 6-2y \\ 2z &= 2 \end{cases}$$

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $\begin{cases} x+y+z=a \\ y-z=0 \\ z=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{c} z=1 \\ y=z=1 \\ x=a-2 \end{array} \overset{\text{sous forme}}{\underset{\text{vecteur}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2z=2 \end{cases}$ on déplace un terme $\begin{cases} x+3z &= 6-2y \\ 2z &= 2 \end{cases}$

Donc $z=1$, $x=3-2y$, et y peut prendre n'importe quelle valeur.

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $\begin{cases} x+y+z=a \\ y-z=0 \\ z=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{c} z=1 \\ y=z=1 \\ x=a-2 \end{array} \overset{\text{sous forme}}{\underset{\text{vecteur}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2z=2 \end{cases}$ on déplace un terme $\begin{cases} x+3z &= 6-2y \\ 2z &= 2 \end{cases}$

Donc $z=1$, $x=3-2y$, et y peut prendre n'importe quelle valeur.
Par exemple $y=3, z=1, x=-3$ est une solution,
$y=0, z=1, x=3$ en est une autre.

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $\begin{cases} x+y+z=a \\ y-z=0 \\ z=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{c} z=1 \\ y=z=1 \\ x=a-2 \end{array} \overset{\text{sous forme}}{\underset{\text{vecteur}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2z=2 \end{cases}$ on déplace un terme $\begin{cases} x+3z &= 6-2y \\ 2z &= 2 \end{cases}$

Donc $z=1$, $x=3-2y$, et y peut prendre n'importe quelle valeur. Par exemple $y=3, z=1, x=-3$ est une solution, $y=0, z=1, x=3$ en est une autre. On exprime toutes les solutions sous forme vecteur avec (sous quatre écritures équivalentes)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\}$$

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $\begin{cases} x+y+z=a \\ y-z=0 \\ z=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{c} z=1 \\ y=z=1 \\ x=a-2 \end{array} \overset{\text{sous forme}}{\underset{\text{vecteur}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2z=2 \end{cases}$ on déplace un terme $\begin{cases} x+3z &= 6-2y \\ 2z &= 2 \end{cases}$

Donc $z=1$, $x=3-2y$, et y peut prendre n'importe quelle valeur. Par exemple $y=3, z=1, x=-3$ est une solution, $y=0, z=1, x=3$ en est une autre. On exprime toutes les solutions sous forme vecteur avec (sous quatre écritures équivalentes)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; y \in \mathbb{R} \right\} \overset{\text{ou bien}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; y \in \mathbb{R} \right\}$$

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $\begin{cases} x+y+z=a \\ y-z=0 \\ z=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{c} z=1 \\ y=z=1 \\ x=a-2 \end{array} \overset{\text{sous forme}}{\underset{\text{vecteur}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2z=2 \end{cases}$ on déplace un terme $\begin{cases} x+3z & = & 6-2y \\ 2z & = & 2 \end{cases}$

Donc $z=1$, $x=3-2y$, et y peut prendre n'importe quelle valeur. Par exemple $y=3, z=1, x=-3$ est une solution, $y=0, z=1, x=3$ en est une autre. On exprime toutes les solutions sous forme vecteur avec (sous quatre écritures équivalentes)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \overset{\text{ou bien}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\overset{\text{on aligne}}{\underset{\text{les variables}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2\cdot y \\ 0+1\cdot y \\ 1+0\cdot y \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

§2. Résoudre des systèmes simples (échelonnés).

1. $\begin{cases} x+y+z=a \\ y-z=0 \\ z=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{r} z=1 \\ y=z=1 \\ x=a-2 \end{array} \overset{\text{sous forme}}{\underset{\text{vecteur}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2z=2 \end{cases}$ on déplace un terme $\begin{cases} x+3z &= 6-2y \\ 2z &= 2 \end{cases}$

Donc $z=1$, $x=3-2y$, et y peut prendre n'importe quelle valeur. Par exemple $y=3, z=1, x=-3$ est une solution, $y=0, z=1, x=3$ en est une autre. On exprime toutes les solutions sous forme vecteur avec (sous quatre écritures équivalentes)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} \overset{\text{ou bien}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underset{\text{les variables}}{\overset{\text{on aligne}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2\cdot y \\ 0+1\cdot y \\ 1+0\cdot y \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\} \underset{\text{linéaire}}{\overset{\text{combi.}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\}$$

(sous quatre écritures équivalentes)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \overset{\text{ou bien}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underset{\text{les variables}}{\overset{\text{on aligne}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2\cdot y \\ 0+1\cdot y \\ 1+0\cdot y \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \underset{\text{linéaire}}{\overset{\text{combi.}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

(sous quatre écritures équivalentes)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \overset{\text{ou bien}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underset{\text{les variables}}{\overset{\text{on aligne}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2\cdot y \\ 0+1\cdot y \\ 1+0\cdot y \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \underset{\text{linéaire}}{\overset{\text{combi.}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

Rappel de notre deuxième système :

$$\left\{ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2z &= 2 \end{aligned} \right.$$ Ecriture matricielle

(sous quatre écritures équivalentes)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \overset{\text{ou bien}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underset{\text{les variables}}{\overset{\text{on aligne}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2\cdot y \\ 0+1\cdot y \\ 1+0\cdot y \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \underset{\text{linéaire}}{\overset{\text{combi.}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

Rappel de notre deuxième système :

$$\left\{ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2z &= 2 \end{aligned} \right. \quad \text{Ecriture matricielle} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(sous quatre écritures équivalentes)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \overset{\text{ou bien}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underset{\text{les variables}}{\overset{\text{on aligne}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2\cdot y \\ 0+1\cdot y \\ 1+0\cdot y \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \underset{\text{linéaire}}{\overset{\text{combi.}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

Rappel de notre deuxième système :

$$\left\{ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2z &= 2 \end{aligned} \right. \quad \text{Ecriture matricielle} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. $\left\{ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \qquad (\ell_1) \\ x + 2y + 5z &= 8 \qquad (\ell_2) \end{aligned} \right.$ Ça parait plus compliqué. Mais

(sous quatre écritures équivalentes)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \overset{\text{ou bien}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underset{\text{les variables}}{\overset{\text{on aligne}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2\cdot y \\ 0+1\cdot y \\ 1+0\cdot y \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \underset{\text{linéaire}}{\overset{\text{combi.}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

Rappel de notre deuxième système :

$$\left\{ \begin{aligned} x+2y+3z &= 6 \\ 2z &= 2 \end{aligned} \right. \quad \text{Ecriture matricielle} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. $\left\{ \begin{aligned} x+2y+3z &= 6 \qquad (\ell_1) \\ x+2y+5z &= 8 \qquad (\ell_2) \end{aligned} \right.$ Ça parait plus compliqué. Mais si l'on remplace ℓ_2 par $\ell_2 - \ell_1$, qu'obtient-on ?

(sous quatre écritures équivalentes)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \overset{\text{ou bien}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underset{\text{les variables}}{\overset{\text{on aligne}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3-2\cdot y \\ 0+1\cdot y \\ 1+0\cdot y \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \underset{\text{linéaire}}{\overset{\text{combi.}}{=}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

Rappel de notre deuxième système :

$$\left\{ \begin{aligned} x+2y+3z &= 6 \\ 2z &= 2 \end{aligned} \right. \quad \text{Ecriture matricielle } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. $\left\{ \begin{aligned} x+2y+3z &= 6 \qquad (\ell_1) \\ x+2y+5z &= 8 \qquad (\ell_2) \end{aligned} \right.$ Ça parait plus compliqué. Mais si l'on remplace ℓ_2 par $\ell_2 - \ell_1$, qu'obtient-on ?

Au lieu de trainer avec les x, y, z on peut effectuer les mêmes opérations uniquement sur les coefficients :

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}$$

§3. Matrices échelonnées

Définition

Une matrice est dite **échelonnée** *si :*
la première position non-nulle de chaque ligne se trouve strictement à droite de celle de la ligne au dessus.

Exemples : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Pour une matrice échelonnée, on appelle les pivots les premiers élément non-nul de chaque ligne non entièrement nulle.

On définit **rang de la matrice**=nombres de pivots.
Exercice : Donner une matrice 5×6 non échelonnée et une autre échelonnée.

§4. Retour aux systèmes échelonnés

Définition

Un système linéaire est dit échelonné s'il s'écrit de la forme matricielle $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ avec A une matrice échelonnée.

Exemple : $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2z = 2 \end{cases}$

Pour résoudre un tel système, on commence par

- aligner les variables : $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 0x + 0y + 2z = 2 \end{cases}$
- repérer les pivots, $\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 6 \\ 0x + 0y + 2z = 2 \end{cases}$.
- déplacer les variables non-pivotales à droite (ici, les termes concernant y) : $\begin{cases} 1x + 3z & = & 6 - 2y \\ 2z & = & 2 \end{cases}$
- On résous directement la dernière équation, et remonte de poche en poche des autres équations.

§5. Echelonner une matrice (afin d'échelonner un système)

En utilisant 3 opérations élémentaires sur les lignes :

• Echanger deux lignes $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$

• Multiplier une ligne par une constante non nulle $\ell_i \to a \cdot \ell_i$ $(a \neq 0)$.

• Soustraire d'une ligne par un multiple d'une autre ligne : $\ell_i \to \ell_i - b\ell_j$ $(j \neq i)$.

Avec ces trois opérations, on peut toujours échelonner une matrice (ainsi qu'un système). Voici un exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

§5. Echelonner une matrice (afin d'échelonner un système)

En utilisant 3 opérations élémentaires sur les lignes :

- Echanger deux lignes $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$
- Multiplier une ligne par une constante non nulle $\ell_i \to a \cdot \ell_i$ $(a \neq 0)$.
- Soustraire d'une ligne par un multiple d'une autre ligne : $\ell_i \to \ell_i - b\ell_j$ $(j \neq i)$.

Avec ces trois opérations, on peut toujours échelonner une matrice (ainsi qu'un système). Voici un exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \rightsquigarrow \ell_3 - \ell_1]{\ell_2 \rightsquigarrow \ell_2 - \ell_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

§5. Echelonner une matrice (afin d'échelonner un système)

En utilisant 3 opérations élémentaires sur les lignes :

• Echanger deux lignes $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$

• Multiplier une ligne par une constante non nulle $\ell_i \to a \cdot \ell_i$ ($a \neq 0$).

• Soustraire d'une ligne par un multiple d'une autre ligne : $\ell_i \to \ell_i - b\ell_j$ ($j \neq i$).

Avec ces trois opérations, on peut toujours échelonner une matrice (ainsi qu'un système). Voici un exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \rightsquigarrow \ell_3 - \ell_1]{\ell_2 \rightsquigarrow \ell_2 - \ell_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_3 \rightsquigarrow \ell_3 - 2\ell_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Voici un autre exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Voici un autre exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ {\color{blue}1} & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightsquigarrow \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ {\color{blue}0} & 2 & 1 & 1 \\ {\color{blue}1} & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Voici un autre exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightsquigarrow \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightsquigarrow \ell_3 - \ell_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Voici un autre exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightsquigarrow \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightsquigarrow \ell_3 - \ell_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \ell_3 \rightsquigarrow 2\ell_3$$

Voici un autre exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightsquigarrow \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightsquigarrow \ell_3 - \ell_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightsquigarrow 2\ell_3 - \ell_2}$$

Voici un autre exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightsquigarrow \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightsquigarrow \ell_3 - \ell_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \rightsquigarrow 2\ell_3 - \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

(ne pas recopier)

1. Repérer la première colonne non-nulle et y marquer un élément non-nul (appelé 'pivot') ;
2. ramener la ligne du pivot tout en haut (en faisant un échange) ;
3. annuler les éléments sous le pivot (à l'aide des soustractions) ;
4. encadrer la sous matrice en bas à droite du pivot ;
5. Faire les étapes 1-4 avec cette sous matrice.

Ce boucle s'arrête surement. On définit Rang(A)= le nombre de pivots. Les colonnes correspondantes de A sont appelées 'colonnes pivotales', les autres 'colonnes non-pivotales'.

§6. Méthode de résolution d'un système linéaire

Un exemple : $(S)\left\{\begin{array}{l} 2y+z=1 \\ x+2z=-1 \\ x+y+3z=6 \end{array}\right.$.

§6. Méthode de résolution d'un système linéaire

Un exemple : $(S)\left\{\begin{array}{l} 2y+z=1 \\ x+2z=-1 \\ x+y+3z=6 \end{array}\right.$. On passe à l'écriture

matricielle

§6. Méthode de résolution d'un système linéaire

Un exemple : $(S)\begin{cases} 2y+z=1 \\ x+2z=-1 \\ x+y+3z=6 \end{cases}$. On passe à l'écriture matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

§6. Méthode de résolution d'un système linéaire

Un exemple : $(S)\left\{\begin{array}{l} 2y+z=1 \\ x+2z=-1 \\ x+y+3z=6 \end{array}\right.$. On passe à l'écriture matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. On échelonne la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right)$

§6. Méthode de résolution d'un système linéaire

Un exemple : $(S)\begin{cases} 2y + z = 1 \\ x + 2z = -1 \\ x + y + 3z = 6 \end{cases}$. On passe à l'écriture

matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. On échelonne la matrice

augmentée $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right)$.

§6. Méthode de résolution d'un système linéaire

Un exemple : $(S)\left\{\begin{array}{l} 2y+z=1 \\ x+2z=-1 \\ x+y+3z=6 \end{array}\right.$. On passe à l'écriture matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. On échelonne la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right)$.

On re-transforme en système : $\left\{\begin{array}{l} x+2z=-1 \\ 2y+z=1 \\ z=13 \end{array}\right.$.

§6. Méthode de résolution d'un système linéaire

Un exemple : $(S)\left\{\begin{array}{l} 2y+z=1 \\ x+2z=-1 \\ x+y+3z=6 \end{array}\right.$. On passe à l'écriture matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. On échelonne la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right).$$

On re-transforme en système : $\left\{\begin{array}{l} x+2z=-1 \\ 2y+z=1 \\ z=13 \end{array}\right.$.

On écrit la (ou les) solution sous forme vectorielle

§6. Méthode de résolution d'un système linéaire

Un exemple : $(S)\begin{cases} 2y+z=1 \\ x+2z=-1 \\ x+y+3z=6 \end{cases}$. On passe à l'écriture matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. On échelonne la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right).$$

On re-transforme en système : $\begin{cases} x+2z=-1 \\ 2y+z=1 \\ z=13 \end{cases}$.

On écrit la (ou les) solution sous forme vectorielle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Enfin on ré-injecte ces valeurs dans (S) pour vérification.

§6. Méthode de résolution d'un système linéaire

Un exemple : $(S)\begin{cases} 2y+z=1 \\ x+2z=-1 \\ x+y+3z=6 \end{cases}$. On passe à l'écriture matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. On échelonne la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right)$.

On re-transforme en système : $\begin{cases} x+2z=-1 \\ 2y+z=1 \\ z=13 \end{cases}$.

On écrit la (ou les) solution sous forme vectorielle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Enfin on ré-injecte ces valeurs dans (S) pour vérification.

§6. Méthode de résolution d'un système linéaire

Un exemple : $(S)\begin{cases} 2y+z=1 \\ x+2z=-1 \\ x+y+3z=6 \end{cases}$. On passe à l'écriture matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. On échelonne la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right)$.

On re-transforme en système : $\begin{cases} x+2z=-1 \\ 2y+z=1 \\ z=13 \end{cases}$.

On écrit la (ou les) solution sous forme vectorielle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -27 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Enfin on ré-injecte ces valeurs dans (S) pour vérification.

§6. Méthode de résolution d'un système linéaire

Un exemple : $(S)\left\{\begin{array}{l} 2y+z=1 \\ x+2z=-1 \\ x+y+3z=6 \end{array}\right.$. On passe à l'écriture

matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. On échelonne la matrice

augmentée $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right)$.

On re-transforme en système : $\left\{\begin{array}{l} x+2z=-1 \\ 2y+z=1 \\ z=13 \end{array}\right.$.

On écrit la (ou les) solution sous forme vectorielle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$.

§6. Méthode de résolution d'un système linéaire

Un exemple : $(S)\left\{\begin{array}{l} 2y+z=1 \\ x+2z=-1 \\ x+y+3z=6 \end{array}\right.$. On passe à l'écriture matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. On échelonne la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right).$$

On re-transforme en système : $\left\{\begin{array}{l} x+2z=-1 \\ 2y+z=1 \\ z=13 \end{array}\right.$.

On écrit la (ou les) solution sous forme vectorielle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Enfin on ré-injecte ces valeurs dans (S) pour vérification.

(ne pas recopier)

• récrire, si nécessaire, le système sous forme matricielle $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$
• fabriquer la matrice augmentée $\widehat{A} = (A|\vec{\mathbf{b}})$.
• échelonner cette matrice par les trois opérations élémentaires sur les lignes
• marquer les pivots.
• si la dernière colonne contient un pivot, on conclut que le système n'a pas de solution. Sinon,
• déplacer, s'il y en a, les variables non pivotales à droite des équations.
• résoudre le système. Exprimer l'ensemble des solutions sous forme de combinaison linéaire. Le système a une unique solution si et seulement si toute les colonnes (sauf celle augmentée) contient un pivot.
• vérification (si possible).

Pourquoi ça marche ? Parce que les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas les solutions !

§7. Calculer la matrice inverse par la matrice compagnon

Soit A une matrice carrée. Pour à la fois determiner si A admet une matrice inverse, et calculer cette matrice, on fait :

Fabriquer la matrice compagnon avec la matrice d'identité $(A|Id)$, effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de façon à transformer la partie à gauche en une matrice identité. Si on y arrive, on obtient $(Id|B)$, alors B est la matrice inverse de A (on note $B = A^{-1}$). Sinon A n'est pas inversible.

Exemple 2x2,3x3.

Pourquoi ça marche ? Car chaque opération correspond à multiplier à gauche par une matrice élémentaire :

$$(A|Id) \rightsquigarrow (E_1 A \,|\, E_1 Id) = (E_1 A \,|\, E_1) \rightsquigarrow (E_2 E_1 A \,|\, E_2 E_1) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow (E_n \cdots E_1 A \,|\, E_n \cdots E_1) = (Id \,|\, E_n \cdots E_1) \ .$$

Puisque $E_n \cdots E_1 A = Id$ on sait que $E_n \cdots E_1$ est bien A^{-1}.

§8. Résolution d'un système linéaire

La nature des solutions dépend de la valeur du paramètre.

	$A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ système sans second membre	$A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}},\ C = \widehat{(A\vert\vec{\mathbf{b}})}$ (la matrice augmentée et échelonnée)
	$\vec{\mathbf{0}}$ est une solution	$\vec{\mathbf{b}}$ pivotal : pas de solution
A inversible	$\exists$ une unique solution $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$	$\exists$ une unique solution $\vec{\mathbf{x}} = A^{-1}\vec{\mathbf{b}}$
A non inversible et $\vec{\mathbf{b}}$ non pivotal	$\exists$ une $\infty^{\text{té}}$ de solutions $\{\sum_{j=1}^{k} a_j\vec{\mathbf{v}}_j, a_j \in \mathbb{R}\}$	$\exists$ une $\infty^{\text{té}}$ de solutions $\{\vec{\mathbf{v}}_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j\vec{\mathbf{v}}_j, a_j \in \mathbb{R}\}$