

THÉORIE D'HOMOTOPIE STABLE

GEOFFREY POWELL

TABLE DES MATIÈRES

1. Prérequis	4
1.1. Foncteurs adjoints	4
1.2. Espaces topologiques	4
1.3. Cofibrations	5
1.4. Espaces pointés et rajout d'un point de base	5
1.5. Produits et coproduits dans \mathcal{T}_\bullet	6
1.6. Le produit smash et l'espace fonctionnel pointé	6
1.7. Catégories homotopiques	6
1.8. Le théorème de Whitehead	7
partie 1. Construction de la catégorie \mathcal{SH}	8
2. Motivation pour l'introduction de la catégorie stable	8
2.1. Le domaine stable	8
2.2. La catégorie de Spanier-Whitehead	8
2.3. Représentabilité	9
2.4. Constructions géométriques	9
3. Spectres	10
3.1. Introduction	10
3.2. Objectifs	10
3.3. La catégorie des spectres	11
3.4. Quelques exemples de spectres	11
3.5. Les \mathbb{Z} -spectres $\text{-----}\gg$	12
3.6. Le foncteur d'évaluation et le foncteur spectre des suspensions	13
3.7. Les foncteurs de décalage	14
3.8. Les foncteurs de troncature	15
3.9. Changement d'indexation $\text{-----}\gg$	15
3.10. Spectres partiels	17
4. Structure de la catégorie des spectres	18
4.1. Coproduits et colimites	18
4.2. Produits	19
4.3. Le produit smash avec un espace pointé	19
4.4. Le produit smash naïf de spectres	21
5. Homotopie	22
5.1. La notion d'homotopie pour les spectres	22
5.2. Le mapping cylindre et la cofibre homotopique	23
5.3. Groupes d'homotopie stable	24
5.4. Équivalences strictes	26
5.5. Le foncteur télescope, $\mathcal{T}el$ $\text{-----}\gg$	26
5.6. La propriété de $\mathcal{T}el$ $\text{-----}\gg$	27
6. La propriété d'extension d'homotopies	29
6.1. La propriété HEP	29
6.2. Spectres ayant la propriété HEP	29
6.3. Morphismes de spectres ayant la propriété HEP $\text{-----}\gg$	30

6.4. Le mapping cylindre et la propriété HEP	31
7. Les CW-spectres	33
7.1. CW-spectres et morphismes cellulaires	33
7.2. Déformation aux morphismes cellulaires	34
7.3. Sous CW-spectres	34
7.4. Filtration cellulaire ----->	35
7.5. CW-spectres et spectres partiels ----->	36
7.6. CW-spectres, le mapping cylindre et la cofibre homotopique ----->	37
7.7. CW-remplacement	37
8. La construction de \mathcal{SH}	40
8.1. Rappels sur la catégorie \mathcal{H}_\bullet	40
8.2. Sous CW-spectres cofinaux	40
8.3. Hyperhom	41
8.4. La catégorie Sp^{CW}	42
8.5. La catégorie stable, \mathcal{SH}	43
8.6. Les foncteurs $\Sigma^\infty, \Sigma, [1]$ et \wedge	43
8.7. Premiers calculs	44
partie 2. Propriétés de la catégorie \mathcal{SH}	46
9. La propriété HELP et le théorème de Whitehead	46
9.1. Groupes d'homotopie relatifs	46
9.2. La propriété HELP	46
9.3. Equivalences d'homotopie stable	48
9.4. Le théorème de Whitehead	48
10. Applications	50
10.1. Le foncteur Σ est une équivalence	50
10.2. Relation entre \mathcal{S}^W et \mathcal{SH} ----->	51
10.3. Suites cofibres	52
10.4. Structure additive	56
10.5. Coproduits dans \mathcal{SH}	57
11. Le produit smash	58
11.1. Existence	58
11.2. Propriétés du produit smash	58
11.3. Le produit smash et morphismes	59
12. Homologie et cohomologie	60
12.1. Théories de cohomologie et d'homologie réduites	60
12.2. Variantes stables	61
12.3. Le télescope (ou hocolim)	63
12.4. Limites inverses dans \mathcal{Ab}	63
12.5. Suites exactes de Milnor	64
12.6. La théorie d'homologie associée à un spectre	66
12.7. La théorie de cohomologie associée à un spectre	67
12.8. Représentabilité (stable)	67
12.9. Théories d'homologie et de cohomologie non-réduites	69
13. Ω -spectres ----->	70
13.1. Définitions et premiers résultats	70
13.2. Le foncteur Ω^∞	71
14. Tours de Postnikov	73
14.1. Spectres connexes	73
14.2. Tours de Postnikov	75
14.3. L'isomorphisme de Hurewicz	77
14.4. Spectres de Moore et spectres d'Eilenberg-MacLane	78
14.5. La t -structure homotopique	80

partie 3. Structures multiplicatives et applications	82
15. Structures multiplicatives	82
15.1. Spectres en anneaux	82
15.2. Spectres en modules	84
15.3. Produits induits en homologie et cohomologie	85
15.4. Changement de coefficients	88
15.5. Le produit /	88
15.6. Structures multiplicatives et tours de Postnikov	89
16. Spectres \mathbb{C} -orientés	90
16.1. Orientations	90
16.2. Calculs	91
16.3. Orientations et morphismes de spectres en anneaux	92
17. Coopérations homologiques	95
17.1. Les morphismes de structure	95
17.2. Spectres en anneaux plats	95
17.3. La structure algébrique	96
17.4. Comodules	98
18. Quelques propriétés de MU_*MU	100
18.1. Rappels	100
18.2. Résultats généraux sur les spectres \mathbb{C} -orientés	100
18.3. Coproduits pour MU	102
19. L'algèbre de Steenrod	104
19.1. Opérations stables cohomologiques	104
19.2. Algèbres de Hopf (graduées commutatives)	104
19.3. Homologie de quelques espaces classifiants	107
19.4. L'algèbre de Steenrod duale	108
19.5. Le coproduit	110
19.6. L'homologie de MU en tant que \mathcal{A}^* -comodule	111
20. Résolutions d'Adams ----->	113
20.1. Spectres E -injectifs	113
20.2. E -résolutions	114
20.3. Résolutions d'Adams	115
21. La suite spectrale d'Adams	117
21.1. Énoncé	117
22. Le théorème de Quillen	118
22.1. Énoncé du théorème de Quillen	118
22.2. Le morphisme de Hurewicz (modulo p)	119
22.3. Spectres modulo p	120
22.4. Le spectre MU/p et calculs homologiques	121
22.5. Démonstration du théorème de Quillen	123
Références	124

Avertissement :

Ces notes sont plus détaillées que les notes de cours. Le symbole -----> indique qu'une section peut être omise en première lecture. (En général, ces sections n'ont pas été traitées en cours).

1. PRÉREQUIS

Pour les notions de base sur la théorie des catégories, consulter [ML98]. Le lecteur pourra consulter [May99], par exemple, pour les notions de théorie d'homotopie.

1.1. **Foncteurs adjoints.** Rappelons la définition suivante :

Définition 1.1.1. Soient $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs. Le foncteur L est adjoint à gauche à R (et le foncteur R est adjoint à droite à L) si, pour tout couple d'objets C de \mathcal{C} et D de \mathcal{D} , il existe un isomorphisme naturel (en C et D) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(D)).$$

On écrit $L \dashv R$ pour indiquer que le foncteur L est adjoint à gauche à R .

Notation 1.1.2. Lorsqu'on dénote une adjonction par $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$, la flèche supérieure est l'adjoint à gauche au foncteur dénoté par la flèche en dessous. Donc, cette adjonction pourrait également être dénotée par $G : \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C} : F$.

Cette convention est particulièrement utile lorsqu'un foncteur $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ admet également un adjoint à droite, $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Le diagramme

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \\ \xrightarrow{H} \end{array} \mathcal{D}$$

correspond aux adjonctions $F \dashv G \dashv H$.

Proposition 1.1.3. L'adjoint à gauche d'un foncteur, s'il existe, est unique à équivalence naturelle près.

Démonstration. Exercice. □

Exercice 1.1.4. Soient $L_1 \dashv R_1, L_2 \dashv R_2$ deux couples de foncteurs adjoints tels que la composition $R_2 \circ R_1$ est définie. Montrer que $L_1 \circ L_2 \dashv R_2 \circ R_1$.

Proposition 1.1.5. Soient $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs. Le foncteur L est adjoint à gauche de R ($L \dashv R$) si et seulement si il existe deux transformations naturelles $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow RL$ (l'unité) et $\epsilon : LR \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ (la counité) telles que les diagrammes suivants de transformations naturelles commutent :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{L\eta} & LRL \\ & \searrow & \downarrow \epsilon_L \\ & & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\epsilon_R} & RLR \\ & \searrow & \downarrow R\eta \\ & & R \end{array}$$

Démonstration. Exercice. □

1.2. **Espaces topologiques.** Voir [May99, Chapter 5] (par exemple) pour les notions suivantes.

Définition 1.2.1. Un espace topologique X est faiblement Hausdorff si, pour tout espace compact K et pour toute application continue $g : K \rightarrow X$, l'image $g(K)$ est fermé dans X .

Définition 1.2.2. Soit X un espace topologique ;

- (1) X est un k -espace s'il satisfait la propriété suivante : un sous-ensemble $A \subset X$ est fermé dans X si et seulement si $g^{-1}(A)$ est fermé dans K pour toute application continue $g : K \rightarrow X$, où K est compact ;
- (2) X est compactement engendré s'il est un k -espace faiblement Hausdorff.

Lemme 1.2.3. Soit X un espace faiblement Hausdorff. Alors X est compactement engendré si et seulement si il satisfait la propriété suivante : un sous-ensemble $A \subset X$ est fermé dans X si et seulement si, pour tout sous-espace compact $K \subset X$, $K \cap A$ est fermé dans K .

Démonstration. Exercice. \square

Il faut faire attention à la topologie lorsqu'on considère les colimites dans la catégorie \mathcal{T} des espaces topologiques compactement engendrés, pour éviter d'éventuelles pathologies lors du passage au quotient. On utilise les deux résultats suivants :

Proposition 1.2.4. [May99, Chapter 5, Section 2] Soient E, Y deux espaces compactement engendrés et $F \hookrightarrow E$ un sous-espace fermé de E . Pour toute application continue $g : F \rightarrow Y$, la somme amalgamée donnée par le carré

$$\begin{array}{ccc} F \hookrightarrow & E & \\ g \downarrow & \downarrow & \\ Y & \dashrightarrow & Y \cup_g E \end{array}$$

$Y \cup_g E$ est un espace compactement engendré.

De même, lorsqu'on considère les colimites de systèmes directs, il convient d'imposer une hypothèse supplémentaire sur le système.

Proposition 1.2.5. [May99, Chapter 5, Section 2] Soient $\{E_i, E_i \hookrightarrow E_{i+1} | i \in \mathbb{N}\}$ un système direct d'espaces compactement engendrés et d'inclusions telles que l'image de E_i est fermée dans E_{i+1} , $\forall i$.

Alors l'espace $\text{colim}_{i \rightarrow \infty} E_i := \bigcup_i E_i$, muni de la topologie colimite ($A \subset \bigcup E_i$ est fermé si et seulement si $E_i \cap A$ est fermé dans E_i , pour tout i) est un espace compactement engendré, qui est la colimite (au sens catégorique) dans la catégorie \mathcal{T} .

1.3. Cofibrations. (Voir [May99, Chapter 6].)

Soient I l'intervalle $[0, 1]$ et $i_0, i_1 : * \rightarrow I$ les deux applications induites par les points $\{0, 1\}$.

Définition 1.3.1. Une application continue $j : A \rightarrow X$ est une cofibration si elle vérifie la propriété d'extension des homotopies (HEP) qui est représentée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{A \times i_0} & A \times I \\ j \downarrow & & \downarrow j \times I \\ X & \xrightarrow{X \times i_0} & X \times I \\ & & \downarrow h \\ & & Y \end{array}$$

H

Remarque 1.3.2. La notion de cofibration est définie d'une manière similaire dans la catégorie des espaces topologiques pointés.

Exemple 1.3.3. L'inclusion $\{0, 1\} \hookrightarrow I$ est une cofibration et $I \rightarrow *$ est une équivalence d'homotopie.

1.4. Espaces pointés et rajout d'un point de base. Soit \mathcal{T} la catégorie d'espaces topologiques (sous-entendu compactement engendrés) et des applications continues et soit \mathcal{T}_\bullet la catégorie des espaces pointés et des applications pointées continues. Le foncteur de rajout d'un point de base disjoint, $(-)_+ : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_\bullet$, associe à un espace X l'espace pointé $X_+ := (X \cup \{*\}, *)$.

Proposition 1.4.1.

- (1) Soit X un espace topologique ; alors X_+ est bien pointé (l'inclusion $* \hookrightarrow X_+$ est une cofibration).
- (2) Le foncteur $(-)_+ : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_\bullet$ est l'adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{T} : \text{soient } X \text{ un espace topologique et } Y \text{ un espace topologique pointé ; il y a une bijection naturelle}$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}_\bullet}(X_+, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y).$$

Démonstration. Évidente. □

1.5. Produits et coproduits dans \mathcal{T}_\bullet .

Définition 1.5.1. Soient X, Y deux espaces topologiques pointés ;

- (1) le bouquet $X \vee Y$ est l'espace pointé $(X \amalg Y / *_X = *_Y, *_X)$;
- (2) le produit $X \amalg Y$ est l'espace pointé $(X \amalg Y, (*_X, *_Y))$.

Proposition 1.5.2. Le bouquet $\vee : \mathcal{T}_\bullet \times \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{T}_\bullet$ est le coproduit (au sens catégorique) et le produit $\amalg : \mathcal{T}_\bullet \times \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{T}_\bullet$ est le produit (au sens catégorique) de la catégorie \mathcal{T}_\bullet .

Démonstration. Exercice. □

1.6. Le produit smash et l'espace fonctionnel pointé.

Définition 1.6.1. Soient X, Y deux espaces topologiques pointés.

- (1) Le produit smash $X \wedge Y$ est l'espace topologique $X \times Y / X \vee Y$, pointé par l'image de $(*_X, *_Y)$.
- (2) L'espace fonctionnel pointé, $\text{Map}_\bullet(X, Y)$, est le sous-espace des applications $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ telles que $f(*_X) = *_Y$.

Exercice 1.6.2. Montrer que $(\mathcal{T}_\bullet, \wedge, S^0)$ est une structure symétrique monoïdale sur la catégorie \mathcal{T}_\bullet . (Voir [ML98], par exemple, pour la définition d'une catégorie symétrique monoïdale.)

Rappeler la propriété fondamentale suivante :

Proposition 1.6.3. Soient X, Y, Z des espaces topologiques pointés dans \mathcal{T}_\bullet , alors il existe un homéomorphisme naturel :

$$\text{Map}_\bullet(X \wedge Y, Z) \cong \text{Map}_\bullet(X, \text{Map}_\bullet(Y, Z)).$$

Exercice 1.6.4. Dédurre que la structure de catégorie symétrique monoïdale de l'Exercice 1.6.2 est une structure fermée.

Définition 1.6.5.

- (1) Le foncteur suspension réduite $\Sigma : \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{T}_\bullet$ est le foncteur $S^1 \wedge -$.
- (2) Le foncteur espace des lacets (pointés) $\Omega : \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{T}_\bullet$ est le foncteur $\text{Map}_\bullet(S^1, -)$.

1.7. Catégories homotopiques.

Remarque 1.7.1. La notion d'homotopie dans la catégorie \mathcal{T}_\bullet est défini par l'objet cylindre

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} X \wedge I_+ \longrightarrow X,$$

pour $X \in \text{Ob} \mathcal{T}_\bullet$ un espace pointé.

On écrit \mathcal{H} (respectivement \mathcal{H}_\bullet) pour la catégorie homotopique des espaces topologiques (respectivement pointés).

Corollaire 1.7.2. Le foncteur $(-)_+$ induit une adjonction au niveau des catégories homotopiques :

$$(-)_+ : \mathcal{H} \rightleftarrows \mathcal{H}_\bullet.$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 1.7.3. *La suspension réduite est l'adjoint à gauche du foncteur espace des lacets :*

$$\Sigma : \mathcal{T}_\bullet \rightleftarrows \mathcal{T}_\bullet : \Omega.$$

L'adjonction passe à la catégorie homotopique :

$$\Sigma : \mathcal{H}_\bullet \rightleftarrows \mathcal{H}_\bullet : \Omega.$$

1.8. Le théorème de Whitehead. On suppose connue la théorie des CW-complexes ; en particulier, nous avons besoin du théorème de Whitehead. (Voir [May99, Chapter 10].)

Théorème 1.8.1. *Soient $A \hookrightarrow B$ l'inclusion d'un sous CW-complexe pointé et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{T}_\bullet qui est une équivalence faible ($\pi_n(f)$ est un isomorphisme, pour tout n). Pour tout carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow g & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y, \end{array}$$

\simeq

il existe un morphisme $g : B \rightarrow X$ qui rend le triangle supérieur commutatif et le triangle inférieur commutatif à homotopie relative à A près.

Première partie 1. Construction de la catégorie \mathcal{SH} **2. MOTIVATION POUR L'INTRODUCTION DE LA CATÉGORIE STABLE**

Il y a plusieurs motivations pour introduire une théorie d'homotopie stable.

2.1. Le domaine stable. Un CW-complexe pointé, X , est k -connexe si $\pi_n(X) = \{*\}$ pour tout $n \leq k$.

Rappelons le théorème de suspension de Freudenthal :

Théorème 2.1.1. Soient X, Y deux CW-complexes pointés, et supposer que Y est $(n-1)$ -connexe. Alors le morphisme

$$\Sigma : [X, Y] \rightarrow [\Sigma X, \Sigma Y]$$

induit par la suspension réduite $\Sigma : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathcal{H}_\bullet$ est une surjection si $\dim X \leq 2n - 1$ et une bijection si $\dim X < 2n - 1$.

Souvent, le résultat est énoncé de la forme suivante :

Corollaire 2.1.2. Soit Y un CW-complexe pointé $(n-1)$ -connexe, alors le morphisme de suspension

$$\Sigma : \pi_q(Y) \rightarrow \pi_q(\Sigma Y)$$

est une surjection si $q = 2n - 1$ et une bijection si $q < 2n - 1$.

Remarque 2.1.3. Le théorème de Freudenthal revient à l'étude de la cointé de l'adjonction $\Sigma \dashv \Omega, Y \rightarrow \Omega \Sigma Y$; ce morphisme est une $(2n - 1)$ -équivalence.

On en déduit la stabilisation suivante :

Corollaire 2.1.4. Soient X, Y deux CW-complexes pointés tels que Y est $(n-1)$ -connexe. Alors le morphisme

$$\Sigma : [\Sigma^d X, \Sigma^d Y] \rightarrow [\Sigma^{d+1} X, \Sigma^{d+1} Y]$$

est une bijection pour tout nombre naturel $d > \dim X + 1 - 2n$.

Démonstration. Exercice. □

2.2. La catégorie de Spanier-Whitehead.

Définition 2.2.1. Soit \mathcal{H}_\bullet^f la sous-catégorie pleine de \mathcal{H}_\bullet dont les objets sont les CW-complexes pointés finis.

Il y a une manière canonique de stabiliser la catégorie \mathcal{H}_\bullet^f , en inversant formellement le foncteur Σ .

Définition 2.2.2. Soit \mathcal{SW} la catégorie :

objets couples (X, a) , où X est un CW-complexe pointé fini et $a \in \mathbb{Z}$ est un entier ;

morphismes $\text{Hom}_{\mathcal{SW}}((X, a), (Y, b)) := \text{colim}_n [\Sigma^{n+a} X, \Sigma^{n+b} Y]$.

Exercice 2.2.3.

- (1) Soient X un CW-complexe et $a \in \mathbb{Z}$ un entier. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel $(\Sigma X, a) \cong (X, a + 1)$ dans \mathcal{SW} .
- (2) Démontrer que \mathcal{SW} est une catégorie additive.

Remarque 2.2.4. La catégorie \mathcal{SW} possède une structure plus riche, celle d'une catégorie triangulée. (Cf. [Mar83].) (La catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ d'une catégorie abélienne \mathcal{A} est une catégorie triangulée.)

Proposition 2.2.5. Il existe un foncteur $\mathcal{H}_\bullet^f \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{W}$ qui envoie un CW-complexe fini X à $(X, 0)$. Le foncteur Σ induit une équivalence de catégories $\Sigma : \mathcal{S}\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{W}$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\bullet^f & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{H}_\bullet^f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}\mathcal{W} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{S}\mathcal{W} \end{array}$$

commute.

Exercice 2.2.6.

- (1) Formuler la propriété universelle de $\mathcal{S}\mathcal{W}$.
- (2) Montrer qu'une théorie de cohomologie généralisée induit un foncteur $\mathcal{S}\mathcal{W}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}b^*$, où $\mathcal{A}b^*$ est la catégorie des groupes abéliens \mathbb{Z} -gradués.

Remarque 2.2.7. La catégorie $\mathcal{S}\mathcal{W}$ a un grand défaut : on ne peut pas généraliser sa définition en incluant les CW-complexes infinis. En particulier, les théories de cohomologie (généralisées) usuelles ne sont pas représentables dans $\mathcal{S}\mathcal{W}$.

2.3. Représentabilité. Les théories de cohomologie (resp. homologie) généralisées sont extrêmement importantes. Une manière de représenter ces théories est par les pré-spectres, mais ces structures ne sont pas facile à manipuler (Cf. la définition de la théorie d'homologie associée à un préspectre).

On a besoin d'une catégorie $\mathcal{S}\mathcal{H}$ d'homotopie stable suffisamment grande pour que :

- les théories de cohomologie soient représentables dans $\mathcal{S}\mathcal{H}$;
- les opérations cohomologiques stables (celles qui commutent avec la suspension Σ) correspondent aux morphismes de $\mathcal{S}\mathcal{H}$.

2.4. Constructions géométriques. Quelques propriétés d'origine géométrique devraient avoir une interprétation naturelle dans la catégorie $\mathcal{S}\mathcal{H}$. Par exemple :

Exemple 2.4.1.

- (1) la dualité de Spanier-Whitehead : la dualité d'Alexandre est induit par une dualité au niveau de la catégorie d'homotopie stable ;
- (2) le transfert : Le transfert associé à $S^\infty \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ est induit par un morphisme $\mathbb{R}P_+^\infty \dashrightarrow S_+^\infty$ dans la catégorie d'homotopie stable ;
- (3) «l'espace de Thom» associé à un fibré vectoriel virtuel : par exemple il existe un objet $\mathbb{C}P_{-1}^\infty$ dans la catégorie d'homotopie stable, qui est une version stable de l'espace de Thom du fibré virtuel $-\lambda$.

3. SPECTRES

3.1. Introduction. Il y a de nombreuses références possibles pour la construction de la catégorie d'homotopie stable, dont :

- (1) L'approche classique à la Boardman : les notes d'Adams [Ada95, Part II] (la référence classique), la présentation donnée par Switzer [Swi02, Chapter 8] et la version rédigée par Rudyak [Rud98].
- (2) La construction par Bousfield et Friedlander, voir [GJ99]. Cette approche utilise la théorie des catégories de modèles à la Quillen - en particulier, ils utilisent les ensembles simpliciaux comme modèle pour les espaces topologiques.
- (3) Kochman [Koc96, Chapter 3] donne l'approche où les spectres sont indexés par les espaces de dimension finie d'un espace $(\mathbb{R}^\infty, \langle -, - \rangle)$.

Les approches modernes sont mieux adaptées à l'étude des structures multiplicatives :

- (1) les spectres symétriques : introduits par Jeff Smith [HSS00] - voir aussi l'article de Hovey [Hov01];
- (2) les S -modules - [EKMM97].

J'ai suivi l'approche de Boardman, en essayant de donner une présentation qui rendra plus facile l'étude ultérieure de la construction de \mathcal{SH} à l'aide de la théorie des catégories de modèles. En particulier :

- j'ai commencé par une étude systématique de la catégorie des spectres \mathcal{S}_p , sans imposer d'autre structure ;
- l'introduction des CW-spectra est motivée par la condition HEP d'extension des homotopies - les spectres CW sont des objets cofibrants.

3.2. Objectifs. On va construire

- une catégorie additive \mathcal{SH} , la catégorie d'homotopie stable, munie
- d'un foncteur $\Sigma : \mathcal{SH} \rightarrow \mathcal{SH}$ et
- d'un foncteur $\Sigma^\infty : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathcal{SH}$

tels que

- (1) $\Sigma : \mathcal{SH} \rightarrow \mathcal{SH}$ est une équivalence de catégories et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\bullet & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{H}_\bullet \\ \Sigma^\infty \downarrow & & \downarrow \Sigma^\infty \\ \mathcal{SH} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{SH} \end{array}$$

commute ;

- (2) la restriction du foncteur $\Sigma^\infty : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathcal{SH}$ à \mathcal{H}_\bullet^f se factorise canoniquement :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\bullet^f & \hookrightarrow & \mathcal{H}_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \Sigma^\infty \\ \mathcal{SW} & \hookrightarrow & \mathcal{SH}, \end{array}$$

où le foncteur $\mathcal{SW} \hookrightarrow \mathcal{SH}$ est un plongement pleinement fidèle.

Remarque 3.2.1. La première condition correspond au fait que la suspension soit inversible dans \mathcal{SH} ; la deuxième est nécessaire pour assurer que la catégorie \mathcal{SH} soit suffisamment fine pour détecter les propriétés 'stables' de \mathcal{H}_\bullet . (On pourrait également rajouter la condition que les théories de cohomologie généralisées soient représentables dans \mathcal{SH} .)

La catégorie \mathcal{SH} est une catégorie *homotopique* associée à une catégorie \mathcal{Sp} de 'spectres', construite à partir de \mathcal{T}_\bullet . On peut comprendre «homotopique» de deux manières différentes (mais qui sont essentiellement équivalentes) :

- on définit la classe d'équivalences d'homotopie stable dans la catégorie \mathcal{Sp} et on obtient \mathcal{SH} par un processus de localisation (grossièrement-dit, on inverse formellement les équivalences d'homotopie stable) ;
- on utilise la théorie d'homotopie abstraite (à la Quillen [Qui67] - la théorie des catégories de modèles [Hov99]) afin de construire la catégorie homotopique associée à cette théorie.

Le processus de localisation est en général fort délicat ; Quillen a développé la théorie d'algèbre homotopique afin de pallier à ce problème.

Remarque 3.2.2. La catégorie \mathcal{Sp} des spectres est analogue à la catégorie des complexes de chaînes $\text{Ch}(\mathcal{A})$ associée à une catégorie abélienne \mathcal{A} . La catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est construite à partir de $\text{Ch}(\mathcal{A})$ en inversant les équivalences d'homologie ; donc la construction de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est analogue à celle de la catégorie \mathcal{SH} à partir de \mathcal{Sp} .

La construction de la catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ n'est pas facile. Surtout lorsqu'on travaille avec les complexes non-bornés (indexés par \mathbb{Z}), il vaut mieux utiliser la théorie d'algèbre homotopique pour construire la catégorie dérivée.

3.3. La catégorie des spectres.

Définition 3.3.1. Soit \mathcal{Sp} , la catégorie des spectres :

- objets** les spectres E , où E est la donnée $\{E_n \in \text{Ob } \mathcal{T}_\bullet, \sigma_n^E : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$ - les morphismes σ_n^E sont les *morphismes de structure* du spectre E ;
- morphismes** un morphisme $f : E \rightarrow F$ entre deux spectres est la donnée d'un ensemble de morphismes de \mathcal{T}_\bullet , $\{f_n : E_n \rightarrow F_n | n \in \mathbb{N}\}$ tel que, pour tout n , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma E_n & \xrightarrow{\sigma_n^E} & E_{n+1} \\ \Sigma f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ \Sigma F_n & \xrightarrow{\sigma_n^F} & F_{n+1}. \end{array}$$

Remarque 3.3.2. Le morphisme de structure $\sigma_n^E : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ est adjoint à un morphisme :

$$\tilde{\sigma}_n^E : E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}.$$

Par adjonction, pour définir un objet de \mathcal{Sp} , il est équivalent à se donner $\{E_n \in \text{Ob } \mathcal{T}_\bullet, \tilde{\sigma}_n^E : E_n \rightarrow \Omega E_{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3.3.3. Vérifier que \mathcal{Sp} est une catégorie.

Notation 3.3.4. Soit $0 \in \text{Ob } \mathcal{Sp}$ le spectre (unique) tel que $0_n = *$ pour tout n .

Proposition 3.3.5. La catégorie \mathcal{Sp} est pointée : l'objet 0 est initial et final dans \mathcal{Sp} .

Démonstration. Exercice. □

3.4. Quelques exemples de spectres. Une motivation pour l'introduction de la catégorie des spectres est d'avoir une catégorie dans laquelle les théories de cohomologie soient représentables. Les théories de cohomologie 'classiques' fournissent les premiers exemples de spectres.

Définition 3.4.1. Soit $A \in \text{Ob } \mathcal{Ab}$ un groupe abélien. Le spectre d'Eilenberg-MacLane \mathbf{HA} est le spectre $\mathbf{HA}_n := K(A, n)$ (l'espace d'Eilenberg-MacLane - c'est à dire un

CW-complexe tel que $\pi_n(K(A, n)) = 0$ et tous les autres groupes d'homotopie sont triviaux) et dont les morphismes de structure sont

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{HA}_n & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_n^{\mathbf{HA}}} & \Omega\mathbf{HA}_{n+1} \\ \downarrow = & & \downarrow = \\ K(A, n) & \xrightarrow{\cong} & \Omega K(A, n+1) \end{array}$$

où le morphisme inférieur est une équivalence d'homotopie.

Exemple 3.4.2. La K -théorie complexe, KU , est un spectre 2-périodique défini par

$$KU_n = \begin{cases} BU \times \mathbb{Z} & n \equiv 0 \pmod{2} \\ U & n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

ou U est le groupe unitaire (infini) et BU est son espace classifiant, donc $U \simeq \Omega BU$. Le revêtement universel de U est SU et le théorème de périodicité de Bott montre que $BU \simeq \Omega SU$, donc $BU \times \mathbb{Z} \simeq \Omega U$. La définition des morphismes de structure du spectre KU est évidente (exercice !).

Les deux exemples précédents sont des Ω -spectres, c'est à dire que les morphismes de structure $\tilde{\sigma}_n^E$ sont des équivalences d'homotopie. Les spectres de Thom fournissent des exemples qui ne sont pas des Ω -spectres.

Exemple 3.4.3. Le cobordisme complexe, MU est un spectre de Thom. Soient n un nombre naturel et γ_n le \mathbb{C} -fibré vectoriel universel sur $BU(n)$. On définit $MU_{2n} := \text{Thom}(\gamma_n)$, l'espace de Thom, et $MU_{2n+1} := \Sigma MU_{2n}$. Alors, pour définir les morphismes de structure du spectre MU , il suffit de définir $\Sigma^2 MU_{2n} \rightarrow MU_{2n+2}$, pour tout nombre naturel n (exercice).

Le morphisme $i_n : BU(n) \rightarrow BU(n+1)$, induit par l'inclusion $U(n) \hookrightarrow U(n+1)$, permet de considérer le fibré $i_n^* \gamma_{n+1}$, qui est isomorphe au fibré vectoriel $\mathbb{C} \oplus \gamma_n$. Il existe un homéomorphisme $\text{Thom}(\mathbb{C} \oplus \gamma_n) \cong \Sigma^2 \text{Thom}(\gamma_n)$ et le morphisme i_n induit un morphisme d'espaces de Thom

$$\text{Thom}(i_n^* \gamma_{n+1}) \cong \Sigma^2 \text{Thom}(\gamma_n) \rightarrow \text{Thom}(\gamma_{n+1}).$$

3.5. Les \mathbb{Z} -spectres ----- \times . Il existe un variant de la catégorie des spectres, la catégorie $\mathcal{S}p^{\mathbb{Z}}$ des \mathbb{Z} -spectres; pour la définir, remplacer partout \mathbb{N} dans la Définition 3.3.1 par \mathbb{Z} . L'inclusion $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ induit un foncteur oubli $\Theta : \mathcal{S}p^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{S}p$.

Définition 3.5.1. Soient $\lambda, \rho : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p^{\mathbb{Z}}$ les foncteurs définis comme suite sur un spectre E :

- (1) le \mathbb{Z} -spectre λE est le spectre défini par $(\lambda E)_n = *$, pour $n < 0$ et $(\lambda E)_n = E_n$ pour $n \geq 0$, les morphismes de structure étant les morphismes évidents;
- (2) le \mathbb{Z} -spectre ρE est le spectre défini par $(\rho E)_n = \Omega^{-n} E$ pour $n \leq 0$ et $(\lambda E)_n = E_n$ pour $n \geq 0$; le morphisme de structure $\tilde{\sigma}_{n-1}^{\rho E} : (\rho E)_{n-1} \rightarrow \Omega(\rho E)_n$ (pour $n \neq 0$) est l'identité.

Les foncteurs λ, ρ sont définis sur les morphismes de la manière évidente.

Proposition 3.5.2. Le foncteur λ est l'adjoint à gauche du foncteur Θ et le foncteur ρ est l'adjoint à droite de Θ :

$$\mathcal{S}p^{\mathbb{Z}} \begin{array}{c} \xleftarrow{\lambda} \\ \xleftarrow{\Theta} \\ \xrightarrow{\rho} \end{array} \mathcal{S}p.$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 3.5.3. On pourrait utiliser les \mathbb{Z} -spectres pour développer la théorie d'homotopie stable. Ce serait avantageux de certains points de vue ; cependant la catégorie \mathcal{Sp} des spectres est la plus naturelle lorsqu'on cherche à construire des modèles plus sophistiqués (par exemple les *spectres symétriques* [HSS00] ou les *S-modules* [EKMM97]).

3.6. Le foncteur d'évaluation et le foncteur spectre des suspensions.

Définition 3.6.1. Soit $l \in \mathbb{Z}$ un entier.

(1) Le foncteur d'évaluation, $\text{Ev}_l^\Omega : \mathcal{Sp} \rightarrow \mathcal{T}_\bullet$ est le foncteur défini par

$$\text{Ev}_l^\Omega E := \begin{cases} E_l & l \geq 0 \\ \Omega^{-l} E_0 & l \leq 0. \end{cases}$$

(2) Le foncteur $\mathfrak{F}_l : \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{Sp}$ est le foncteur défini par

$$(\mathfrak{F}_l X)_n = \begin{cases} \Sigma^{n-l} X & n - l \geq 0 \\ * & n - l < 0. \end{cases}$$

(3) Le foncteur spectre des suspensions, $\Sigma^\infty : \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{Sp}$, est le foncteur \mathfrak{F}_0 .

Le foncteur spectre des suspensions fournit pleins d'exemples non-triviaux de spectres :

Définition 3.6.2. Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier.

(1) Soit $S \in \text{Ob } \mathcal{Sp}$ le spectre $\Sigma^\infty S^0$.

(2) Soit $S^n \in \text{Ob } \mathcal{Sp}$ le spectre $\mathfrak{F}_{-n} S^0$.

Exercice 3.6.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre naturel. Montrer que $S^n \cong \Sigma^\infty S^n$ dans la catégorie des spectres \mathcal{Sp} . (En particulier, la notation n'est pas abusive.)

Remarque 3.6.4. On vient de définir des sphères S^n dans \mathcal{Sp} pour tout entier n , en particulier on a des sphères de dimension négative dans \mathcal{Sp} ! Plus généralement, pour tout $X \in \text{Ob } \mathcal{T}_\bullet$, le spectre $\mathfrak{F}_{-n} X$, pour $n < 0$, est un modèle pour la n -ième suspension (ou $(-n)$ -ième désuspension) de X .

Proposition 3.6.5. Soit $l \in \mathbb{Z}$ un entier. Le foncteur $\mathfrak{F}_l : \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{Sp}$ est l'adjoint à gauche du foncteur $\text{Ev}_l^\Omega : \mathcal{Sp} \rightarrow \mathcal{T}_\bullet$.

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 3.6.6. Soit $l \in \mathbb{N}$ un nombre naturel. Alors, il existe une équivalence naturelle de foncteurs $\mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{Sp}$:

$$\Sigma^\infty \circ \Sigma^l \cong \mathfrak{F}_{-l}.$$

Démonstration. Le foncteur Ev_{-l}^Ω est la composée $\Omega^{-l} \circ \text{Ev}_0^\Omega$ (car $-l \leq 0$), dont l'adjoint à gauche est $\mathfrak{F}_0 \circ \Sigma^l$. Le résultat découle de l'unicité (à équivalence naturelle près) de l'adjoint à gauche d'un foncteur. (Bien entendu, on peut démontrer le résultat directement.) □

Lemme 3.6.7. Soit $l \in \mathbb{Z}$ un entier. Le foncteur composé $\text{Ev}_l^\Omega \circ \mathfrak{F}_l : \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{T}_\bullet$ satisfait :

$$\text{Ev}_l^\Omega \circ \mathfrak{F}_l(X) = \begin{cases} X & l \geq 0 \\ \Omega^{-l} \Sigma^{-l} X & l \leq 0, \end{cases}$$

quelque soit $X \in \text{Ob } \mathcal{T}_\bullet$.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 3.6.8. Soit $l \in \mathbb{Z}$ un entier. L'unité de l'adjonction $\mathfrak{F}_l \dashv \text{Ev}_l^\Omega, 1_{\mathcal{T}_\bullet} \rightarrow \text{Ev}_l^\Omega \mathfrak{F}_l$, est

(1) le morphisme identité, si $l \geq 0$;

(2) la transformation naturelle $X \rightarrow \Omega^{-l}\Sigma^{-l}X$, si $l \leq 0$.

Démonstration. On identifie le foncteur $\text{Ev}_l^{\Omega}\mathfrak{F}_l$ à l'aide du Lemme 3.6.7. L'identification de l'unité de l'adjonction découle de la démonstration de la Proposition 3.6.5. \square

Remarque 3.6.9. Ces considérations seraient plus élémentaires si on travaillait avec la catégorie des \mathbb{Z} -spectres, car les foncteurs sont alors définis sans distinguer les cas $l \geq 0$ et $l < 0$.

3.7. Les foncteurs de décalage. Le foncteur décalage d'un spectre est analogue au foncteur décalage d'un complexe de chaînes. Comme d'habitude, puisque nos spectres sont indexés par \mathbb{N} , il y a deux définitions possibles lorsqu'on décale à droite (Cf. Section 3.6).

Définition 3.7.1. Soit $a \in \mathbb{Z}$ un entier.

(1) Le foncteur $[a] : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ est le foncteur défini par :

$$E[a]_n := \begin{cases} E_{a+n} & a+n \geq 0 \\ * & a+n < 0, \end{cases}$$

les morphismes de structures étant les morphismes évidents.

(2) Le foncteur $[a]^{\Omega} : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ est le foncteur défini par :

$$E[a]_n^{\Omega} := \begin{cases} E_{a+n} & a+n \geq 0 \\ \Omega^{-(a+n)}E_0 & a+n \leq 0, \end{cases}$$

les morphismes de structures étant les morphismes évidents.

Exercice 3.7.2. Soient E un spectre et $a \in \mathbb{Z}$ un entier ; préciser les morphismes de structure de $E[a]$ et de $E[a]^{\Omega}$ et vérifier que $[a]$ et $[a]^{\Omega}$ sont des foncteurs $\mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$.

Lemme 3.7.3. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ deux nombres naturels. Alors

- (1) Le foncteur $[0] : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ est l'identité ;
- (2) $[a] = [a]^{\Omega}$;
- (3) $[a] \circ [b] = [a+b]$ et $[-a] \circ [-b] = [-(a+b)]$;
- (4) $[-a]^{\Omega} \circ [-b]^{\Omega} = [-(a+b)]^{\Omega}$;
- (5) $[a] \circ [-a] = 1_{\mathcal{S}p} = [a]^{\Omega} \circ [-a]^{\Omega}$

en tant que foncteurs $\mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$.

Démonstration. Évident. \square

Proposition 3.7.4. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors le foncteur $[a] : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ est l'adjoint à gauche du foncteur $[-a]^{\Omega} : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$:

$$[a] : \mathcal{S}p \rightleftarrows \mathcal{S}p : [-a]^{\Omega}.$$

- (1) Si $a \geq 0$, la counité de l'adjonction $[a] \circ [-a]^{\Omega} \rightarrow 1_{\mathcal{S}p}$ est l'identité ;
- (2) si $a \leq 0$, l'unité de l'adjonction $1 \rightarrow [-a]^{\Omega} \circ [a]$ est l'identité.

Démonstration. Exercice. \square

Remarque 3.7.5. Les foncteurs $[a], [a]^{\Omega}$ sont presque des équivalences de catégories. L'existence du foncteur $[1]$ et sa relation avec le foncteur de suspension de \mathcal{T}_{\bullet} explique en partie la définition de la catégorie $\mathcal{S}p$. (Dans la catégorie des \mathbb{Z} -spectres, il n'y a qu'un foncteur de décalage, qui est une équivalence de catégories.)

Proposition 3.7.6. Soit $l \in \mathbb{Z}$ un entier.

(1) Il existe une équivalence naturelle de foncteurs $\mathcal{T}_{\bullet} \rightarrow \mathcal{S}p$:

$$[l] \circ \mathfrak{F}_0 \cong \mathfrak{F}_{-l}.$$

(2) Si $l \geq 0$, il existe une équivalence naturelle de foncteurs $\mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{S}p$:

$$\Sigma^\infty \circ \Sigma^l \cong [l] \circ \Sigma^\infty.$$

Démonstration. Pour le premier point, on vérifie que $([l] \circ \mathfrak{F}_0(X))_n = (\mathfrak{F}_0(X))_{n+l}$ et que ceci coïncide avec $(\mathfrak{F}_{-l}X)_n$. Le deuxième point est un cas particulier du premier, à l'aide du Corollaire 3.6.6. \square

Rappelons de la Proposition 3.6.5 qu'il existe une adjonction $\mathfrak{F}_l \dashv \text{Ev}_l^\Omega$.

Proposition 3.7.7. Soit $l \in \mathbb{Z}$ un entier. La counité $\mathfrak{F}_l \text{Ev}_l^\Omega \rightarrow 1_{\mathcal{S}p}$ de l'adjonction $\mathfrak{F}_l \dashv \text{Ev}_l^\Omega$ induit une transformation naturelle :

$$\Sigma^\infty \circ \text{Ev}_l^\Omega \rightarrow [l]^\Omega$$

de foncteurs $\mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$.

Si $l \geq 0$ et $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ est un spectre, la transformation naturelle est de la forme :

$$\Sigma^\infty E_l \rightarrow E[l].$$

Démonstration. Exercice. \square

3.8. Les foncteurs de troncature.

Définition 3.8.1. Soit $d \in \mathbb{Z}$ un entier. Le foncteur de troncature $\tau_{\geq d} : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ est le foncteur défini par :

$$(\tau_{\geq d}E)_n = \begin{cases} * & n < d \\ E_n & n \geq d, \end{cases}$$

les morphismes de structure étant définis de la manière évidente.

Remarque 3.8.2. Le foncteur $\tau_{\geq d}$ est naturellement équivalent à l'identité si $d < 0$.

Proposition 3.8.3. Soient $c \leq d \leq e$ des entiers. Il existe un diagramme de transformations naturelles de foncteurs $\mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$:

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\geq e} & \longrightarrow & \tau_{\geq d} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \tau_{\geq c}. \end{array}$$

En particulier, il existe une transformation naturelle $\tau_{\geq d} \rightarrow 1_{\mathcal{S}p}$.

Démonstration. Évident. \square

Proposition 3.8.4. Soit $d \in \mathbb{N}$ un nombre naturel. Le foncteur $\tau_{\geq d}$ est naturellement équivalent à la composée $[-d] \circ [d] : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ et la transformation naturelle $\tau_{\geq d} \rightarrow 1_{\mathcal{S}p}$ est naturellement équivalente à la counité de l'adjonction $[-d] \dashv [d]$ de la Proposition 3.7.4.

Démonstration. Exercice. \square

3.9. Changement d'indexation $\dashv\dashv\dashv$. Soit $I \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble infini. Alors, il existe une bijection monotone $\mathbb{N} \xrightarrow{\cong} I$, donc on peut écrire $I = \{i_s \mid s \in \mathbb{N}\}$, où $i_s < i_{s+1}, \forall s$.

Étant donné un spectre E , on peut se restreindre aux espaces indexés par I . Pour formaliser cette procédure, on introduit la catégorie des I -spectres, indexés par I .

Définition 3.9.1. Soit $I \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble infini. La catégorie $\mathcal{S}p^I$ des spectres indexés par I est la catégorie :

objets $\{X_i \in \text{Ob } \mathcal{T}_\bullet \mid i \in I\}$ muni des morphismes de structure

$$\Sigma^{i_{s+1}-i_s} X_{i_s} \rightarrow X_{i_{s+1}};$$

morphismes un morphisme $f : X \rightarrow Y$ entre deux I -spectres est la donnée d'un ensemble de morphismes de \mathcal{T}_\bullet , $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ tel que, pour tout s , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{i_{s+1}-i_s} X_{i_s} & \longrightarrow & X_{i_{s+1}} \\ \Sigma f_{i_s} \downarrow & & \downarrow f_{i_{s+1}} \\ \Sigma^{i_{s+1}-i_s} Y_{i_s} & \longrightarrow & Y_{i_{s+1}}. \end{array}$$

Remarque 3.9.2. $\mathcal{A}p^{\mathbb{N}} = \mathcal{A}p$.

Définition 3.9.3. Soit $I \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble infini.

- (1) Le foncteur de restriction, $\mathcal{R}_I : \mathcal{A}p \rightarrow \mathcal{A}p^I$, est le foncteur défini par $(\mathcal{R}_I E)_i := E_i$, avec les morphismes de structure évidents.
- (2) Le foncteur d'induction, $\mathcal{L}_I : \mathcal{A}p^I \rightarrow \mathcal{A}p$, est le foncteur défini par

$$(\mathcal{L}_I X)_n := \begin{cases} * & n < i_0 \\ \Sigma^{n-i_j} X_{i_j} & i_j \leq n < i_{j+1}, \end{cases}$$

où les morphismes de structure $\Sigma(\mathcal{L}_I X)_n \rightarrow (\mathcal{L}_I X)_{n+1}$ sont triviaux si $n < i_0$, l'identité si $n \neq i_{j+1} - 1$ et le morphisme de structure de X si $n = i_{j+1} - 1$:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(\mathcal{L}_I X)_{i_{j+1}-1} & \longrightarrow & (\mathcal{L}_I X)_{i_{j+1}} \\ \downarrow = & \nearrow & \\ \Sigma^{i_{j+1}-i_j} X_{i_j} & & \end{array}$$

Proposition 3.9.4. Soit $I \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble infini. Le foncteur \mathcal{L}_I est l'adjoint à gauche du foncteur \mathcal{R}_I :

$$\mathcal{L}_I : \mathcal{A}p^I \rightleftarrows \mathcal{A}p : \mathcal{R}_I.$$

L'unité de l'adjoint, $1_{\mathcal{A}p^I} \rightarrow \mathcal{R}_I \mathcal{L}_I$ est l'identité.

Démonstration. Exercice. □

Remarque 3.9.5. La counité de l'adjonction nous fournit une transformation naturelle $\mathcal{L}_I \mathcal{R}_I \rightarrow 1_{\mathcal{A}p}$.

Exemple 3.9.6. Soit $I = 2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$. Alors, on dispose du foncteur d'induction

$$\mathcal{L}_{2\mathbb{N}} : \mathcal{A}p^{2\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}p.$$

On a déjà utilisé cette construction implicitement dans la construction du spectre MU du cobordisme complexe, Exemple 3.4.3.

Exercice 3.9.7. Soient $I \subset J \subset \mathbb{N}$ deux sous-ensembles finis. Montrer qu'il existe foncteurs

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_I^J & : \mathcal{A}p^J \rightarrow \mathcal{A}p^I \\ \mathcal{L}_I^J & : \mathcal{A}p^I \rightarrow \mathcal{A}p^J \end{aligned}$$

qui rendent commutatif les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}p & \xrightarrow{\mathcal{R}_J} & \mathcal{A}p^J \\ & \searrow \mathcal{R}_I & \downarrow \mathcal{R}_I^J \\ & & \mathcal{A}p^I \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}p^I & & \\ \mathcal{L}_I^J \downarrow & \searrow \mathcal{L}_I & \\ \mathcal{A}p^J & \xrightarrow{\mathcal{L}_J} & \mathcal{A}p. \end{array}$$

Remarque 3.9.8. Soient $I, K \subset \mathbb{N}$ deux sous-ensembles infinis. On dispose des foncteurs de comparaison $\mathcal{R}_K \mathcal{L}_I : \mathcal{A}p^I \rightarrow \mathcal{A}p^K$ et $\mathcal{R}_I \mathcal{L}_K : \mathcal{A}p^K \rightarrow \mathcal{A}p^I$.

3.10. Spectres partiels.

Définition 3.10.1. Soit $N \in \mathbb{Z}$. La catégorie $\mathcal{S}p_{\leq N}$ est la catégorie discrète $\{*\}$ si $N < 0$ et, pour $N \geq 0$, la catégorie :

- objets** les spectres partiels : $\{E_n \in \text{Ob } \mathcal{T}_\bullet \mid 0 \leq n \leq N\}$ muni des morphismes de structure $\{\sigma_n^E : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1} \mid 0 \leq n < N\}$;
morphismes un morphisme $f : E \rightarrow F$ entre deux spectres partiels est la donnée d'un ensemble de morphismes de \mathcal{T}_\bullet , $\{f_n : E_n \rightarrow F_n \mid 0 \leq n \leq N\}$ tel que, pour tout $0 \leq n < N$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma E_n & \xrightarrow{\sigma_n^E} & E_{n+1} \\ \Sigma f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ \Sigma F_n & \xrightarrow{\sigma_n^F} & F_{n+1}. \end{array}$$

Soit $\Phi_{\leq N} : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p_{\leq N}$ le foncteur oubli.

Remarque 3.10.2. La catégorie $\mathcal{S}p_{\leq 0}$ est équivalente à la catégorie \mathcal{T}_\bullet . Le foncteur oubli $\Phi_{\leq N}$ est une généralisation du foncteur d'évaluation Ev_0^Ω .

Proposition 3.10.3. Soit $N \in \mathbb{Z}$ un entier. Le foncteur $\Phi_{\leq N}$ admet un adjoint à gauche, $\Psi_{\leq N} : \mathcal{S}p_{\leq N} \rightarrow \mathcal{S}p$.

Démonstration. (Cf. la Proposition 3.6.5.) Si $N < 0$, le foncteur $\Psi_{\leq N} : \{*\} \rightarrow \mathcal{S}p$ est définie par $\Psi_{\leq N}(\ast) = 0$.

Pour $N \geq 0$ et $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p_{\leq N}$ un spectre partiel, on définit :

$$(\Psi_{\leq N} E)_k := \begin{cases} E_k & k \leq N \\ \Sigma^{k-N} E_N & k \geq N, \end{cases}$$

avec les morphismes de structure évidents.

La vérification que $\Psi_{\leq N}$ est un foncteur et qu'il est l'adjoint à gauche de $\Phi_{\leq N}$ ne présente aucune difficulté. \square

Définition 3.10.4. Soit $N \in \mathbb{Z}$ un entier. Le foncteur $(-)_{\leq N} : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ est le foncteur composé : $\Psi_{\leq N} \Phi_{\leq N} : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$, muni de la transformation naturelle

$$E_{\leq N} \rightarrow E$$

(pour $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$), fournie par la counité de l'adjonction.

Lemme 3.10.5. Soient $M \leq N$ deux entiers. Alors il existe un diagramme commutatif de transformations naturelles

$$\begin{array}{ccc} (-)_{\leq M} & \longrightarrow & (-)_{\leq N} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & 1_{\mathcal{S}p} \end{array}$$

et le foncteur $(-)_{\leq M}$ est le foncteur constant 0 si $M < 0$.

Démonstration. Exercice. \square

La construction suivante est utile dans les arguments de récurrence.

Exercice 3.10.6. Soient $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ un spectre tel que chaque morphisme de structure $\Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ est l'inclusion d'un sous-espace fermé et $Y \in \text{Ob } \mathcal{S}p_{\leq N}$ un spectre partiel et $f : \Phi_{\leq N} E \rightarrow Y$ un morphisme de spectres partiels. Montrer qu'il existe

- un spectre $\tilde{Y} \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ tel que $\Phi_{\leq N} \tilde{Y} = Y$;
- un morphisme de spectres $\tilde{f} : E \rightarrow \tilde{Y}$ tel que $\Phi_{\leq N}(\tilde{f}) = f$.

4. STRUCTURE DE LA CATÉGORIE DES SPECTRES

4.1. Coproduits et colimites. Rappelons que le coproduit d'une famille $\{X_i | i \in \mathcal{I}\}$ d'espaces topologiques pointés est $\bigvee_{i \in \mathcal{I}} X_i$.

Définition 4.1.1. Soit $\{E(i) \in \text{Ob } \mathcal{S}p | i \in \mathcal{I}\}$ une famille de spectres. Le spectre $\bigvee_{i \in \mathcal{I}} E(i)$ est le spectre défini par $(\bigvee_{i \in \mathcal{I}} E(i))_n := \bigvee_{i \in \mathcal{I}} E(i)_n$ et ayant pour morphismes de structure

$$\Sigma\left(\bigvee_{i \in \mathcal{I}} E(i)\right)_n \cong \bigvee_{i \in \mathcal{I}} \Sigma E(i)_n \xrightarrow{\bigvee \sigma^{(i)}_n} \bigvee_{i \in \mathcal{I}} E(i)_{n+1}.$$

Proposition 4.1.2. Le spectre $\bigvee_{i \in \mathcal{I}} E(i)$ est le coproduit (au sens catégorique) dans la catégorie $\mathcal{S}p$.

Démonstration. Exercice. □

Comme cas particulier, on obtient le foncteur

$$\begin{aligned} \vee : \mathcal{S}p \times \mathcal{S}p &\rightarrow \mathcal{S}p \\ (E, F) &\mapsto E \vee F. \end{aligned}$$

Lemme 4.1.3. Soit $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ un spectre. Il y a des isomorphismes canoniques

$$E \vee 0 \cong E \cong 0 \vee E.$$

Démonstration. Évident. □

On peut considérer d'autres colimites petites dans la catégorie des spectres par la même procédure ; toutefois, il faut faire attention à la topologie des espaces (voir la Section 1.2).

Proposition 4.1.4. Soient $Y \leftarrow F \hookrightarrow E$ morphismes de spectres tels que, $F_n \hookrightarrow E_n$ est l'inclusion d'un sous-espace fermé, quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} F & \hookrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \dashrightarrow & Y \cup_F E \end{array}$$

existe dans la catégorie $\mathcal{S}p$, où $(Y \cup_F E)_n = Y_n \cup_{F_n} E_n$, muni des morphismes de structure évidents. (C'est à dire que $Y \cup_F E$ est la colimite dans la catégorie $\mathcal{S}p$ du diagramme.)

Démonstration. Proposition 1.2.4 montre que $Y_n \cup_{F_n} E_n$ existe dans \mathcal{T}_\bullet et est la somme amalgamée au sens catégorique. On vérifie que $Y \cup_F E$ est un spectre qui est la somme amalgamée dans la catégorie $\mathcal{S}p$. □

Proposition 4.1.5. Soit $\{E(n), i(n) : E(n) \hookrightarrow E(n+1) | n \in \mathbb{N}\}$ un système direct dans la catégorie $\mathcal{S}p$, tel que $E(n)_t \hookrightarrow E(n+1)_t$ est l'inclusion d'un sous-espace fermé, $\forall n, t$. Alors la colimite $\text{colim}_{n \rightarrow \infty} E(n)$ existe dans $\mathcal{S}p$ et

- $(\text{colim}_n E(n))_t = \text{colim}_n E(n)_t = \bigcup_n E(n)_t$;
- le morphisme de structure $\Sigma(\text{colim}_n E(n))_t \rightarrow (\text{colim}_n E(n))_{t+1}$ est la composée :

$$\Sigma\left(\bigcup_n E(n)_t\right) \cong \bigcup_n \Sigma E(n)_t \rightarrow \bigcup_n E(n)_{t+1}.$$

Démonstration. Utiliser la Proposition 1.2.5 pour identifier la colimite dans la catégorie \mathcal{T}_\bullet . □

4.2. Produits. Rappelons que le produit d'une famille $\{X_i | i \in \mathcal{I}\}$ d'espaces topologiques pointés est $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, pointé par $\prod_{i \in \mathcal{I}} *$. Le produit ne commute pas au foncteur suspension (par exemple, considérer $S^1 \wedge (S^0 \times S^0)$), mais il existe une transformation naturelle

$$S^1 \wedge \left(\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i \right) \rightarrow \prod_{i \in \mathcal{I}} S^1 \wedge X_i.$$

Définition 4.2.1. Soit $\{E(i) \in \text{Ob } \mathcal{S}p | i \in \mathcal{I}\}$ une famille de spectres. Le spectre $\prod_{i \in \mathcal{I}} E(i)$ est le spectre défini par $(\prod_{i \in \mathcal{I}} E(i))_n := \prod_{i \in \mathcal{I}} E(i)_n$ et ayant pour morphismes de structure

$$\Sigma \left(\prod_{i \in \mathcal{I}} E(i) \right)_n \rightarrow \prod_{i \in \mathcal{I}} \Sigma E(i)_n \xrightarrow{\prod \sigma_n^{(i)}} \prod_{i \in \mathcal{I}} E(i)_{n+1}.$$

Proposition 4.2.2. Le spectre $\prod_{i \in \mathcal{I}} E(i)$ est le produit (au sens catégorique) dans la catégorie $\mathcal{S}p$.

Démonstration. Exercice. □

Remarque 4.2.3. La catégorie $\mathcal{S}p$ ne peut pas être additive, car les coproduits finis ne coïncident pas avec les produits finis.

Remarque 4.2.4. Lorsqu'on passe à la catégorie d'homotopie stable, pour définir les produits il faut utiliser la version *dérivée* de ce produit.

4.3. Le produit smash avec un espace pointé.

Définition 4.3.1. Le foncteur $\wedge : \mathcal{S}p \times \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{S}p$, $(E, X) \mapsto E \wedge X$ est défini par

- $(E \wedge X)_n := E_n \wedge X$;
- $\sigma_n^{E \wedge X} : \Sigma(E \wedge X)_n \rightarrow (E \wedge X)_{n+1}$ est le morphisme $\sigma_n^E \wedge X$.

Exercice 4.3.2. Vérifier que $\wedge : \mathcal{S}p \times \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{S}p$ est un foncteur.

Proposition 4.3.3. Soient $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ un spectre et $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{T}_\bullet$ deux espaces topologiques pointés. Alors, il existe des équivalences naturelles :

$$\begin{aligned} E \wedge S^0 &\cong E \\ (E \wedge X) \wedge Y &\cong E \wedge (X \wedge Y). \end{aligned}$$

Démonstration. Exercice. □

Exemple 4.3.4. Le foncteur $- \wedge S^1 : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ définit un foncteur de suspension sur la catégorie $\mathcal{S}p$.

Exemple 4.3.5. Soient $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{T}_\bullet$ deux espaces topologiques pointés. Alors il existe des isomorphismes naturels dans $\mathcal{S}p$:

$$\begin{aligned} \Sigma^\infty X &\cong S \wedge X \\ (\Sigma^\infty X) \wedge Y &\cong \Sigma^\infty (X \wedge Y). \end{aligned}$$

On a le résultat suivant concernant la catégorie \mathcal{T}_\bullet .

Lemme 4.3.6. Soient $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathcal{T}_\bullet$ des espaces topologiques pointés. Il existe une application continue naturelle :

$$X \wedge \text{Map}_\bullet(Y, Z) \rightarrow \text{Map}_\bullet(Y, X \wedge Z).$$

Démonstration. Le morphisme est l'adjoint de l'application naturelle

$$X \wedge \text{Map}_\bullet(Y, Z) \wedge Y \rightarrow X \wedge Z$$

induit par l'application d'évaluation $\text{Map}_\bullet(Y, Z) \wedge Y \rightarrow Z$. □

Définition 4.3.7. Le foncteur $\text{Map}_\bullet(-, -) : \mathcal{T}_\bullet \times \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ est défini par

$$\text{Map}_\bullet(Y, E)_n := \text{Map}_\bullet(Y, E_n)$$

avec morphisme de structure :

$$S^1 \wedge \text{Map}_\bullet(Y, E_n) \rightarrow \text{Map}_\bullet(Y, S^1 \wedge E_n) \xrightarrow{\text{Map}_\bullet(Y, \sigma_n)} \text{Map}_\bullet(Y, E_{n+1}).$$

Exercice 4.3.8. Vérifier que $\text{Map}_\bullet(-, -) : \mathcal{T}_\bullet \times \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ est un foncteur.

Proposition 4.3.9. Soient $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ un spectre et $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{T}_\bullet$ deux espaces topologiques pointés. Alors, il existe des équivalences naturelles :

$$\begin{aligned} \text{Map}_\bullet(S^0, E) &\cong E \\ \text{Map}_\bullet(X, \text{Map}_\bullet(Y, E)) &\cong \text{Map}_\bullet(X \wedge Y, E). \end{aligned}$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 4.3.10. Soit $X \in \text{Ob } \mathcal{T}_\bullet$ un espace pointé. Alors le foncteur $- \wedge X : \mathcal{S}p \rightarrow X$ est l'adjoint à gauche du foncteur $\text{Map}_\bullet(X, -) : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$.

Démonstration. (Indications.) Soient $E, F \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ deux spectres et $\{f_n : E_n \wedge X \rightarrow F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de morphismes de \mathcal{T}_\bullet et $\{\tilde{f}_n : E_n \rightarrow \text{Map}_\bullet(X, F_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des morphismes adjoints. Alors, par adjonction :

$$\begin{array}{ccc} S^1 \wedge E_n \wedge X & \xrightarrow{\sigma_n \wedge X} & E_{n+1} \wedge X \\ S^1 \wedge f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ S^1 \wedge F_n & \xrightarrow{\sigma_n} & F_{n+1} \end{array}$$

est commutatif si et seulement si

$$\begin{array}{ccc} S^1 \wedge E_n & \xrightarrow{\sigma_n} & E_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_{n+1} \\ \text{Map}_\bullet(X, S^1 \wedge F_n) & \xrightarrow{\text{Map}_\bullet(X, \sigma_n)} & \text{Map}_\bullet(X, F_{n+1}) \end{array}$$

est commutatif. Le morphisme $S^1 \wedge E_n \rightarrow \text{Map}_\bullet(X, S^1 \wedge F_n)$ est la composée

$$S^1 \wedge E_n \xrightarrow{S^1 \wedge \tilde{f}_n} S^1 \wedge \text{Map}_\bullet(X, F_n) \rightarrow \text{Map}_\bullet(X, S^1 \wedge F_n).$$

Donc le deuxième diagramme est commutatif si et seulement si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S^1 \wedge E_n & \xrightarrow{\sigma_n} & E_{n+1} \\ S^1 \wedge \tilde{f}_n \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_{n+1} \\ S^1 \wedge \text{Map}_\bullet(X, F_n) & \longrightarrow & \text{Map}_\bullet(X, F_{n+1}), \end{array}$$

où le morphisme inférieur est le morphisme de structure de $\text{Map}_\bullet(X, F)$. ✓ □

Exemple 4.3.11. Le foncteur suspension $- \wedge S^1 : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ est l'adjoint à gauche du foncteur

$$\text{Map}_\bullet(S^1, -) : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p.$$

Attention : Hovey [Hov01] utilise un foncteur induit différent dans son cadre général. (Cf. [Hov01, Remark 1.6] pour une discussion de ce point.)

4.4. Le produit smash naïf de spectres.

Définition 4.4.1.

- (1) Soit $\wedge^{2\mathbb{N}} : \mathcal{S}p \times \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p^{2\mathbb{N}}$ le foncteur $(E, F) \mapsto E \wedge^{2\mathbb{N}} F$, où $(E \wedge^{2\mathbb{N}} F)_{2n} = E_n \wedge F_n$ et le morphisme de structure $\Sigma^2(E \wedge^{2\mathbb{N}} F)_{2n} \cong (\wedge E_n) \wedge (\Sigma F_n) \rightarrow E_{n+1} \wedge F_{n+1}$.
- (2) Soit $\wedge : \mathcal{S}p \times \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ la composition :

$$\mathcal{S}p \times \mathcal{S}p \xrightarrow{\wedge^{2\mathbb{N}}} \mathcal{S}p^{2\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}_{2\mathbb{N}}} \mathcal{S}p.$$

Remarque 4.4.2. Le produit smash naïf ne définit pas une structure symétrique monoïdale sur $\mathcal{S}p$. An particulier :

- (1) $S^0 \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ n'est pas un objet neutre pour \wedge dans la catégorie $\mathcal{S}p$;
- (2) le produit smash naïf n'est pas associatif ;
- (3) il n'est pas commutatif.

Ces problèmes disparaissent lorsqu'on passe au niveau de la catégorie homotopique $\mathcal{S}\mathcal{H}$.

Exercice 4.4.3. Démontrer les trois affirmations de la Remarque 4.4.2.

L'exercice suivant montre qu'il y a une famille de produits smash naïfs itérés, indexée par certaines applications $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^t$.

Exercice 4.4.4. Soit $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^t$ une application telle que les projections $\alpha_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ satisfont les propriétés suivantes :

- (1) α_i est une application croissante ($\alpha_i(k) \leq \alpha_i(k+1), \forall k$) ;
- (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i(k) = \infty$;
- (3) $\Sigma_i \alpha_i(k) < \Sigma_i \alpha_i(k+1), \forall k$.

Montrer que α induit un produit smash naïf :

$$\wedge_\alpha : \mathcal{S}p^{\times t} \rightarrow \mathcal{S}p.$$

Remarque 4.4.5. La condition $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i(k) = \infty$ est imposée afin que le produit smash ne soit pas dégénéré. (Si une application α_i se stabilise, le produit smash ne dépendrait que d'un spectre partiel associé à un des facteurs.)

5. HOMOTOPIE

5.1. La notion d'homotopie pour les spectres. Rappelons que la notion d'homotopie pour la catégorie \mathcal{T}_\bullet est basée sur les morphismes

$$i_0, i_1 : S^0 \rightrightarrows I_+ \rightarrow S^0.$$

La définition se généralise à la catégorie $\mathcal{S}p$ à l'aide du foncteur $\wedge : \mathcal{S}p \times \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{S}p$.

Définition 5.1.1. Deux morphismes $f, g : E \rightrightarrows F$ de spectres sont homotopes (par une homotopie à gauche) s'il existe un morphisme $H : E \wedge I_+ \rightarrow F$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} E \wedge S^0 & \xrightarrow{E \wedge i_0} & E \wedge I_+ & \xleftarrow{E \wedge i_1} & E \wedge S^0 \\ & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & \\ & & F & & \end{array}$$

Le morphisme H est une homotopie entre f et g , qu'on dénote par $f \sim_H g$. On écrit $f \sim g$ pour indiquer qu'il existe une homotopie entre les deux morphismes.

Remarque 5.1.2. Une homotopie $H : E \wedge I_+ \rightarrow F$ est définie par l'ensemble des morphismes $\{H_n : E_n \wedge I_+ \rightarrow F_n\}$, qui sont compatibles aux morphismes de structure. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, les morphismes $f_n : E_n \rightarrow F_n$ sont homotopes par l'homotopie H_n .

Remarque 5.1.3. Il existe une notion équivalente d'homotopie à droite. Une homotopie à droite entre f et g est un morphisme

$$E \rightarrow \text{Map}_\bullet(I_+, F)$$

qui satisfait les conditions évidentes. L'équivalence entre les deux notions découle de la Proposition 4.3.10.

Théorème 5.1.4. Soient $E, F \in \text{Ob } \mathcal{S}p$.

- (1) La relation d'homotopie, \sim , définit une relation d'équivalence sur $\text{Hom}_{\mathcal{S}p}(E, F)$.
- (2) Soient $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{S}p}(E, F)$ tels que $f \sim_H g$. Alors
 - (a) $k \circ f \sim_{k \circ H} k \circ g$, pour $k \in \text{Hom}_{\mathcal{S}p}(F, G)$;
 - (b) $f \circ j \sim_{H \circ (j \wedge I_+)} g \circ j$, pour $j \in \text{Hom}_{\mathcal{S}p}(D, E)$.

Démonstration. Comme pour la catégorie \mathcal{T}_\bullet . □

Définition 5.1.5. Soient $E, F \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ deux spectres.

- (1) Une équivalence d'homotopie de E à F est un morphisme de spectres $\alpha : E \rightarrow F$ tel qu'il existe un morphisme $\beta : F \rightarrow E$ tel que $\beta \circ \alpha \sim 1_E$ et $\alpha \circ \beta \sim 1_F$.
- (2) Les spectres E, F ont le même type d'homotopie s'il existe une équivalence d'homotopie entre E et F .

Exemple 5.1.6. Soit $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ un spectre. Alors, la projection $I_+ \rightarrow S^0$ induit une équivalence d'homotopie $E \wedge I_+ \rightarrow E$.

Exercice 5.1.7. Soient E un spectre et $\alpha : X \rightarrow Y$ une équivalence d'homotopie dans \mathcal{T}_\bullet . Montrer que le morphisme $E \wedge \alpha : E \wedge X \rightarrow E \wedge Y$ est une équivalence d'homotopie.

Définition 5.1.8. Une classe \mathcal{M} de morphismes a la propriété 2 sur 3 si, pour tout couple f, g de morphismes composables, si deux des morphismes $\{f, g, g \circ f\}$ appartiennent à \mathcal{M} , alors tous appartiennent à \mathcal{M} .

Proposition 5.1.9. *Les équivalences d'homotopie de la catégorie $\mathcal{S}p$ vérifient la propriété 2 sur 3.*

Démonstration. Exercice. □

Remarque 5.1.10. La catégorie d'homotopie stable, $\mathcal{S}\mathcal{H}$, n'est pas la catégorie $\mathcal{S}p/\sim$. Pour construire cette catégorie, plus particulièrement pour calculer $\text{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}}(E, F)$, il faudra :

- (1) remplacer E par une «CW-résolution» (par analogie avec \mathcal{T}_\bullet);
- (2) remplacer F par une «résolution fibrante» (Cf. l'algèbre homologique classique : les résolutions injectives correspondent à des résolutions 'fibrantes'. La terminologie provient de la théorie d'algèbre homotopique [Qui67, Hov99]).

5.2. Le mapping cylindre et la cofibre homotopique. La définition du mapping cylindre dans $\mathcal{S}p$ est l'analogue de la définition dans \mathcal{T}_\bullet .

Définition 5.2.1. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres. Le mapping cylindre M_f est le spectre défini par la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{E \wedge i_1} & E \wedge I_+ \\ f \downarrow & & \downarrow \\ F & \dashrightarrow & M_f, \end{array}$$

(autrement dit : $M_f := (E \wedge I_+) \cup_E F$).

Exercice 5.2.2. Expliciter les espaces et les morphismes de structure du spectre M_f .

Remarque 5.2.3. Le morphisme $E \rightarrow E \wedge I_+$ a la propriété que $E_n \hookrightarrow E_n \wedge I_+$ est l'inclusion d'un sous-espace fermé, quelque soit n . Donc la somme amalgamée existe dans $\mathcal{S}p$, par la Proposition 4.1.5.

Il existe morphismes de spectres

$$E \xrightarrow{i} M_f \xrightarrow{p} F, \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ j \end{array}$$

où le morphisme $E \rightarrow M_f$ est induit par $E \wedge i_0 : E \rightarrow E \wedge I_+$ et la projection p est induit par $E \wedge I_+ \rightarrow E$ et le morphisme f .

Proposition 5.2.4. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres. Les morphismes $E \xrightarrow{i} M_f \xleftarrow{j} F$ ont la propriété suivante : quelque soit $n \in \mathbb{N}$, les morphismes

$$E_n \xrightarrow{i} (M_f)_n \xleftarrow{j} F_n$$

sont des inclusions de sous-espaces fermés.

Démonstration. Exercice. (Remarquer que $E \wedge I_+ \cong (E \times I)/(* \times I)$ et que $E \times \{0, 1\}$ est un sous-espace fermé de $E \times I$.) □

Proposition 5.2.5. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres. Le morphisme $p : M_f \rightarrow F$ est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. La démonstration est formellement la même que celle dans le cadre des espaces topologiques pointés, \mathcal{T}_\bullet . □

Exercice 5.2.6. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de $\mathcal{S}p$. Montrer qu'un morphisme de spectres $M_f \rightarrow G$ est équivalent à la donnée de morphismes de spectres :

- $g : F \rightarrow G$; $k : E \rightarrow G$;

$$- H : E \wedge I_+ \rightarrow G;$$

tel que H est une homotopie entre k et $g \circ f$.

Définition 5.2.7. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres. La cofibre homotopique de f est le spectre C_f défini comme la colimite du diagramme $0 \leftarrow E \xrightarrow{i} M_f$. (Autrement dit : $C_f := M_f \cup_E 0$, où bien $C_f = M_f/E$.)

Remarque 5.2.8. La colimite existe puisque chaque $i_n : E_n \hookrightarrow (M_f)_n$ est l'inclusion d'un sous-espace fermé, par la Proposition 5.2.4.

Par définition, on dispose d'un diagramme de morphismes de spectres

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ f \nearrow & \uparrow \simeq & \searrow \\ E & \xrightarrow{i} M_f & \longrightarrow C_f \end{array}$$

tel que la composée horizontale est triviale (se factorise à travers 0) et la composée $E \xrightarrow{f} F \rightarrow C_f$ est homotope au morphisme trivial.

Exercice 5.2.9. Montrer qu'un morphisme de spectres $C_f \rightarrow Y$ est équivalent à la donnée :

- d'un morphisme $g : F \rightarrow Y$;
- d'une homotopie $H : E \wedge I_+ \rightarrow Y$ entre la composée $g \circ f : E \rightarrow Y$ et le morphisme trivial $E \rightarrow 0 \rightarrow Y$.

5.3. Groupes d'homotopie stable. Soit $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ un spectre. Le morphisme de structure $\sigma_n : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$, induit un morphisme en homotopie

$$\pi_*(\sigma_n) : \pi_{s+1}(\Sigma E_n) \rightarrow \pi_{s+1}(E_{n+1}).$$

La composition avec le morphisme de suspension, $\Sigma : \pi_s(E_n) \rightarrow \pi_{s+1}(\Sigma E_n)$, fournit un morphisme

$$\pi_s(E_n) \rightarrow \pi_{s+1}(E_{n+1})$$

qui est un morphisme de groupes abéliens, si $s \geq 2$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$ (en particulier on admet k négatif). Choisissons un nombre naturel T tel que $k + T \geq 2$, de telle sorte qu'on ait un système direct de groupes abéliens :

$$\pi_{k+T}(E_T) \rightarrow \pi_{k+T+1}(E_{T+1}) \rightarrow \pi_{k+T+2}(E_{T+2}) \rightarrow \dots$$

Définition 5.3.1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ un entier : le foncteur $\pi_k : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{A}b$ est défini par

$$\pi_k(E) := \text{colim}_{t \rightarrow \infty} \pi_{k+t}(E_t).$$

Exercice 5.3.2. Vérifier que π_k est un foncteur à valeurs dans la catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens.

Proposition 5.3.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre naturel. Alors

$$\pi_k(S^n) = \begin{cases} 0 & k < n \\ \mathbb{Z} & k = n. \end{cases}$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 5.3.4.

- (1) Les groupes d'homotopie stable d'un spectre peuvent être non-triviaux en degrés négatifs. Par exemple $\pi_{-1}(S^{-1}) \cong \mathbb{Z}$.
- (2) Le calcul des groupes d'homotopie stable $\pi_*(S^0)$ pour $* \gg 0$ est un problème ouvert extrêmement difficile, qui a motivé une grande partie des recherches en théorie d'homotopie stable depuis les années 1970.

Exercice 5.3.5. Soit $X \in \text{Ob}\mathcal{T}_\bullet$ un CW-complexe pointé. Exprimer $\pi_k(\Sigma^\infty X)$ en termes des groupes d'homotopie (instable) de X (sans colimite).

Exemple 5.3.6.

- (1) Soit $A \in \text{Ob}\mathcal{A}b$ un groupe abélien. Alors, les groupes d'homotopie stable du spectre d'Eilenberg-MacLane $\mathbf{H}A$ sont les suivants :

$$\pi_*(\mathbf{H}A) = \begin{cases} A & * = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (2) Les groupes d'homotopie stable du spectre de la K -théorie complexe, KU , sont 2-périodiques :

$$\pi_*(KU) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Exercice : effectuer ces calculs.)

La proposition suivante donne une première propriété de *stabilité* des groupes d'homotopie stable d'un spectre.

Proposition 5.3.7. Soient $E \in \text{Ob}\mathcal{S}p$ un spectre et $a, k \in \mathbb{Z}$ deux entiers. Alors il existe un isomorphisme naturel

$$\pi_k(E[a]) \cong \pi_{k-a}(E).$$

Démonstration. Exercice. □

Définition 5.3.8. Un morphisme de spectres $f : E \rightarrow F$ est une équivalence d'homotopie stable si $\pi_k(f)$ est un isomorphisme pour tout entier k .

Proposition 5.3.9.

- (1) Soient $f, g : E \rightarrow F$ deux morphismes entre spectres tel que $f \sim g$. Alors $\pi_*(f) = \pi_*(g)$.
- (2) Une équivalence d'homotopie $\alpha : E \rightarrow F$ est une équivalence d'homotopie stable.
- (3) La classe des équivalences d'homotopie stable vérifie la propriété 2 sur 3.

Démonstration. Exercice. □

Remarque 5.3.10. On aimerait pouvoir définir la catégorie d'homotopie stable comme suite :

$$\mathcal{S}p / \simeq$$

où $/ \simeq$ indique 'la localisation' par rapport aux équivalences d'homotopie stable. (On inverserait formellement les équivalences d'homotopie stable.) Malheureusement, il n'est pas clair que cette localisation existe.

Le résultat suivant donne un premier exemple non-trivial d'une équivalence d'homotopie stable qui ne provient pas d'une équivalence d'homotopie.

Lemme 5.3.11. Soient $d \in \mathbb{Z}$ un entier et $E \in \text{Ob}\mathcal{S}p$ un spectre. La transformation naturelle

$$\tau_{\geq d}E \rightarrow E$$

est une équivalence d'homotopie stable.

Démonstration. Pour $0 \leq n \leq d$, la transformation naturelle induit le morphisme identité :

$$(\tau_{\geq d}E)_n \xrightarrow{\cong} E_n.$$

Il est donc évident que la transformation naturelle est une équivalence d'homotopie stable. □

Exemple 5.3.12. Le résultat précédent montre que le morphisme canonique

$$\tau_{\geq 1}S^1 \rightarrow S^1$$

est une équivalence d'homotopie stable. Cependant, il n'est pas une équivalence d'homotopie, car

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}}(S^1, \tau_{\geq 1}S^1) = \{*\}$$

Exercice : démontrer cette affirmation ! (Le morphisme trivial $S^1 \rightarrow * \rightarrow \tau_{\geq 1}S^1$ induit le morphisme 0 en groupes d'homotopie stable, tandis que $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.)

Cet exemple souligne le fait que, si on souhaite utiliser la notion d'homotopie pour construire $\mathcal{S}\mathcal{H}$, il faudra raffiner la catégorie des spectres qu'on utilise. On le fait en deux étapes :

- (1) On se restreint à la sous-catégorie des CW-spectres et des morphismes cellulaires (à définir).
- (2) Au lieu d'utiliser des «résolutions fibrantes», on rajoute des morphismes, précisément pour éviter la difficulté exhibée en Exemple 5.3.12.

5.4. Équivalences strictes. Il y a une notion plus forte d'équivalence définie par les groupes d'homotopie instable π_* .

Définition 5.4.1. Un morphisme $f : E \rightarrow F$ de spectres est une équivalence stricte si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $f_n : E_n \rightarrow F_n$ induit un isomorphisme $\pi_*(f_n) : \pi_*(E_n) \rightarrow \pi_*(F_n)$.

Proposition 5.4.2.

- (1) Soit $f : E \rightarrow F$ une équivalence stricte de la catégorie $\mathcal{S}\mathcal{P}$. Alors f est une équivalence d'homotopie stable.
- (2) Une équivalence d'homotopie est une équivalence stricte.
- (3) La classe des équivalences strictes vérifie la propriété (2 sur 3).

Démonstration. Exercice. □

5.5. Le foncteur télescope, $\mathfrak{T}\mathfrak{el} \cdots \rightarrow \infty$.

Théorème 5.5.1. Il existe un foncteur $\mathfrak{T}\mathfrak{el} : \mathcal{S}\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{P}$ muni d'une transformation naturelle $q : \mathfrak{T}\mathfrak{el} \rightarrow 1_{\mathcal{S}\mathcal{P}}$, tel que, quelque soit $E \in \mathrm{Ob}\mathcal{S}\mathcal{P}$

- (1) $\Sigma\mathfrak{T}\mathfrak{el}(E)_n \rightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{el}(E)_{n+1}$ est une cofibration, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- (2) la transformation naturelle $\mathfrak{T}\mathfrak{el}(E) \rightarrow E$ est une équivalence stricte.

Démonstration. On définit $\mathfrak{T}\mathfrak{el}(E)$ par une généralisation du Mapping cylindre :

$$\mathfrak{T}\mathfrak{el}(E)_n := \left(E_n \wedge \{n, *\} \vee \bigvee_{-1 \leq k < n} (\Sigma^{n-k} E_k \wedge [k, k+1]_+) \right) / \sim$$

où on identifie, pour tout $-1 \leq k < n$

$$(\Sigma^{n-k} E_k \times \{k+1, *\}) \sim (\Sigma^{n-k-1} E_{k+1} \times \{k+1, *\})$$

à l'aide du morphisme de structure $\Sigma E_k \rightarrow E_{k+1}$.

Il existe une application naturelle $q_n : \mathfrak{T}\mathfrak{el}(E)_n \rightarrow E_n$, induite par les projections $[k, k+1]_+ \cong I_+ \rightarrow S^0$. De même, il existe une inclusion naturelle $j_n : E_n \hookrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{el}(E)_n$. Par construction, la composée $q_n \circ j_n$ est l'identité de E_n et on vérifie facilement que E_n est un rétracte par déformation forte de E_n , donc q_n est une équivalence d'homotopie.

Le foncteur suspension Σ commute aux coproduits, donc induit un morphisme de structure

$$\Sigma\mathfrak{T}\mathfrak{el}(E)_n \rightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{el}(E)_{n+1}.$$

On constate que $\mathfrak{Tel}(E)_{n+1}$ est homéomorphe à

$$\Sigma\mathfrak{Tel}(E)_n \cup_{\Sigma E_n} M_{\sigma_n^E}.$$

In en découle que le morphisme de structure $\Sigma\mathfrak{Tel}(E)_n \rightarrow \mathfrak{Tel}(E)_{n+1}$ est une cofibration.

Cette construction est fonctorielle : elle fournit le foncteur $\mathfrak{Tel} : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ et la transformation naturelle $q : \mathfrak{Tel} \rightarrow 1_{\mathcal{S}p}$. Enfin, puisque chaque q_n est une équivalence d'homotopie, la transformation naturelle q est une équivalence stricte. \square

Remarque 5.5.2. L'espace $\mathfrak{Tel}(E)_0$ est homéomorphe à E_0 , donc n'est pas nécessairement bien pointé. (La catégorie des spectres E dont E_0 est bien pointé est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}p$.)

Proposition 5.5.3. *Il existe un foncteur $(-)' : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ muni d'une transformation naturelle $(-)' \rightarrow 1_{\mathcal{S}p}$ tel que, quelque soit $E \in \text{Ob}\mathcal{S}p$:*

- (1) E'_0 est bien pointé et $E'_n = E_n$ pour $n > 0$;
- (2) le morphisme $E'_0 \rightarrow E_0$ est une équivalence faible (induit un isomorphisme en π_*) et $E'_n \rightarrow E_n$ est l'identité pour $n > 0$.

Démonstration. Soit E un spectre. On prend pour E'_0 la cofibre homotopique (non-pointée) de $* \rightarrow E_0$, muni de la projection canonique $E'_0 \rightarrow E_0$. Le morphisme de structure $\Sigma E'_0 \rightarrow E_1$ est la composée $\Sigma E'_0 \rightarrow \Sigma E_0 \rightarrow E_1$. La vérification des propriétés ne présentent aucune difficulté. \square

5.6. La propriété de $\mathfrak{Tel} \dashrightarrow \mathfrak{e}$.

Notation 5.6.1. Soient E, F deux spectres et $\{f_n : E_n \rightarrow F_n | n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de morphismes tels que, pour tout n , le diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \Sigma E_n & \longrightarrow & E_{n+1} \\ f_n \downarrow & \simeq & \downarrow f_{n+1} \\ \Sigma F_n & \longrightarrow & F_{n+1} \end{array}$$

est commutatif à homotopie près. On écrit $f : E \dashrightarrow F$ pour indiquer cette structure et on dit que f est un pseudo-morphisme de spectres.

Si on se donne les homotopies H_n pour chaque diagramme (1), on écrit

$$f : E \dashrightarrow_{\{H_n\}} F$$

pour dénoter cette structure.

Définition 5.6.2. Soient E, F deux spectres. On écrit $\widetilde{\text{Hom}}_{\mathcal{S}p}(E, F)$ pour l'ensemble des pseudo-morphismes $E \dashrightarrow_{\{H_n\}} F$ (donc on considère les homotopies comme étant une partie de la structure).

Remarque 5.6.3. Soit $E \in \text{Ob}\mathcal{S}p$ un spectre. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une inclusion naturelle

$$j_n : E_n \rightarrow \mathfrak{Tel}(E)_n.$$

Ces morphismes ne définissent pas un morphisme de spectres mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma E_n & \longrightarrow & E_{n+1} \\ \Sigma j_n \downarrow & \simeq & \downarrow j_{n+1} \\ \Sigma\mathfrak{Tel}(E)_n & \longrightarrow & \mathfrak{Tel}(E)_{n+1} \end{array}$$

et il existe un choix naturel d'homotopie H_n . On écrit $j : E \dashrightarrow_{H_n} \mathfrak{Tel}(E)$ pour dénoter ce 'pseudo-morphisme' de spectres $\in \widetilde{\text{Hom}}_{\mathcal{S}p}(E, \mathfrak{Tel}(E))$.

Le foncteur télescope, \mathfrak{Tel} , a une propriété importante, qui généralise la propriété du mapping cylindre.

Proposition 5.6.4. Soient E, F deux spectres. Alors, il existe une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{P}}(\mathfrak{Tel}(E), F) \cong \widetilde{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{S}\mathcal{P}}(E, F).$$

Démonstration. Exercice. □

Soit $f : E \dashrightarrow_{\{H_n\}} F$ un pseudo-morphisme. On obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Tel}(E) & \xrightarrow{\tilde{f}} & F \\ q \downarrow & & \\ E & & \end{array}$$

où q est une équivalence stricte.

Proposition 5.6.5. Soit $f : E \dashrightarrow_{\{H_n\}} F$ un pseudo-morphisme de spectres. Alors l'ensemble de morphismes $\{f_n : E_n \rightarrow F_n\}$ induit un morphisme de groupes abéliens gradués

$$\pi_*(f) : \pi_*(E) \rightarrow \pi_*(F)$$

qui est indépendant des homotopies $\{H_n\}$, tel que :

- (1) si f est un morphisme de spectres, $\pi_*(f)$ coïncide avec le morphisme défini par le foncteur $\pi_*(-)$ sur la catégorie des spectres ;
- (2) le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi_*(\mathfrak{Tel}(E)) & \xrightarrow{\pi_*(\tilde{f})} & \pi_*(F) \\ \pi_*(q) \downarrow \cong & \nearrow \pi_*(f) & \\ \pi_*(E) & & \end{array}$$

où $\pi_*(\mathfrak{Tel}(E)) \rightarrow \pi_*(F)$ est induit par le morphisme $\mathfrak{Tel}(E) \rightarrow F$ de spectres défini par le pseudo-morphisme et $\pi_*(q)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Exercice. □

6. LA PROPRIÉTÉ D'EXTENSION D'HOMOTOPIES

6.1. **La propriété HEP.** Rappelons la définition suivante :

Définition 6.1.1. Un morphisme $f : E \rightarrow F$ de la catégorie $\mathcal{S}p$ a la propriété HEP si tout diagramme commutatif de $\mathcal{S}p$

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{E \wedge i_0} & E \wedge I_+ \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ F & \xrightarrow{g} & G, \end{array}$$

se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{E \wedge i_0} & E \wedge I_+ & & \\ f \downarrow & & \downarrow f \wedge I_+ & & \downarrow h \\ F & \xrightarrow{F \wedge i_0} & F \wedge I_+ & \xrightarrow{H} & G \\ & \searrow g & & \swarrow & \\ & & & & \end{array}$$

Cette propriété est fondamentale lorsqu'on souhaite utiliser la notion d'homotopie afin de construire une catégorie homotopique.

Définition 6.1.2. Un spectre E a la propriété HEP si le morphisme $0 \rightarrow E$ a la propriété HEP.

Remarque 6.1.3. Pour ne pas prêter à confusion, on n'utilise pas la terminologie cofibration et cofibrant dans la catégorie des spectres. Cette terminologie est utilisée lorsqu'on introduit une structure de catégorie de modèles [Qui67].

6.2. **Spectres ayant la propriété HEP.** Rappelons qu'un espace pointé $X \in \text{Ob } \mathcal{T}_*$ est cofibrant si et seulement si l'inclusion du point de base $* \hookrightarrow X$ est une cofibration. Autrement dit, l'espace X est bien pointé. Dans la catégorie des spectres, la notion est plus riche.

Notation 6.2.1. On écrit $A \twoheadrightarrow B$ pour dénoter une cofibration dans \mathcal{T}_* .

Proposition 6.2.2. Un spectre $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ a la propriété HEP si les conditions suivantes sont satisfaites :

- l'espace E_0 est bien pointé ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme de structure $\Sigma E_n \twoheadrightarrow E_{n+1}$ est une cofibration.

Démonstration. (Indications.) Supposons les deux conditions satisfaites. Il faut montrer que, pour tout morphisme $g : E \rightarrow G$ de spectres, il existe une extension :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{E \wedge i_0} & E \wedge I_+ \\ & \searrow g & \downarrow H \\ & & G. \end{array}$$

La construction de H se fait par récurrence ; l'étape de récurrence consiste en la construction de $H_n : E_n \wedge I_+ \rightarrow G_n$ en supposant que H a déjà été construit dans la catégorie $\mathcal{S}p_{\leq n-1}$ des spectres partiels. Pour démarrer la construction (construire H_0), on utilise l'hypothèse que E_0 est bien pointé.

Pour l'étape de récurrence, on considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma E_{n-1} & \longrightarrow & \Sigma E_{n-1} \wedge I_+ & & \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow^{\Sigma H_{n-1}} & \\
 E_n & \longrightarrow & E_n \wedge I_+ & & \Sigma G_{n-1} \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 & & & & G_n
 \end{array}$$

(Note: A dotted arrow labeled H_n points from $E_n \wedge I_+$ to G_n , and a solid arrow points from E_n to G_n .)

où la flèche H_n existe puisque $\Sigma E_{n-1} \hookrightarrow E_n$ est une cofibration, par hypothèse. \square

Remarque 6.2.3.

- (1) La proposition montre l'importance de l'hypothèse que les morphismes de structure $\Sigma E_n \hookrightarrow E_{n+1}$ soient des cofibrations.
- (2) On peut établir une réciproque faible de cette proposition.

Remarque 6.2.4. Une conséquence de l'hypothèse de la Proposition 6.2.2 est que chaque espace E_n est bien pointé.

Rappeler que le foncteur \mathfrak{Tel} est introduit dans le Théorème 5.5.1 et le foncteur $(-)'$ dans la Proposition 5.5.3. Le résultat suivant montre que ces foncteurs permettent de remplacer un spectre quelconque par un spectre ayant la propriété HEP.

Corollaire 6.2.5. Soit $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$. Alors le spectre $\mathfrak{Tel}(E')$ a la propriété HEP.

Démonstration. Une conséquence immédiate du Théorème 5.5.1, de la Proposition 6.2.2 et de la Proposition 6.2.2. \square

Exercice 6.2.6. Utiliser le fait que, pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de la catégorie \mathcal{T}_\bullet , il existe une factorisation

$$X \hookrightarrow M \rightarrow Y$$

où la première flèche est une cofibration et la deuxième est une équivalence faible pour montrer directement le fait suivant :

Soit $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ un spectre ; il existe un spectre \tilde{E} muni d'un morphisme $\tilde{E} \rightarrow E$ tel que

- (1) le morphisme est une équivalence stricte ;
- (2) \tilde{E}_0 est bien pointé et le morphisme de structure $\Sigma \tilde{E}_n \rightarrow \tilde{E}_{n+1}$ est une cofibration, $\forall n \in \mathbb{N}$.

6.3. Morphismes de spectres ayant la propriété HEP $\dots \rightsquigarrow \infty$.

Hypothèse 6.3.1. Soit E un spectre tel que $\Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ est l'inclusion d'un sous-espace fermé.

Un morphisme de spectres $f : E \rightarrow F$ induit pour tout nombre naturel n un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma E_n & \longrightarrow & E_{n+1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Sigma F_n & \longrightarrow & \Sigma F_n \cup_{\Sigma E_n} E_{n+1} \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & F_{n+1}
 \end{array}$$

(Note: A dotted arrow points from $\Sigma F_n \cup_{\Sigma E_n} E_{n+1}$ to F_{n+1} , and a solid arrow points from ΣF_n to F_{n+1} .)

où le carré est la somme amalgamée. (L'hypothèse sert à assurer que l'espace $\Sigma F_n \cup_{\Sigma E_n} E_{n+1}$ soit compactement engendré.)

Réciproquement, par récurrence, le morphisme est déterminé par $f_0 : E_0 \rightarrow F_0$ et les morphismes $\Sigma F_n \cup_{\Sigma E_n} E_{n+1} \rightarrow F_{n+1}$.

Proposition 6.3.2. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres, où E vérifié l'hypothèse 6.3.1. Alors f a la propriété HEP si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) $f_0 : E_0 \rightarrow F_0$ est une cofibration ;
- (2) quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma F_n \cup_{\Sigma E_n} E_{n+1} \rightarrow F_{n+1}$ est une cofibration.

Démonstration. Soit

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \wedge I_+ \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ F & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

un diagramme commutatif de morphismes de spectres. Il faut construire un morphisme de spectres $H : F \rightarrow G$ qui étend l'homotopie de h . Comme dans la démonstration de la Proposition 6.2.2, l'argument se fait par récurrence. Donc, supposons que l'extension a été construit dans la catégorie des spectres partiels $\mathcal{S}p_{\leq N}$; il faut passer à la catégorie $\mathcal{S}p_{\leq N+1}$ - c'est à dire qu'il faut construire l'application $H_{N+1} : F_{N+1} \wedge I_+ \rightarrow G_{N+1}$. Le début de la récurrence $N = -1$ est facile.

Pour l'étape de récurrence, on suppose qu'on a déjà construit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E_N & \longrightarrow & E_N \wedge I_+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_N & \longrightarrow & F_N \wedge I_+ \\ & \searrow & \searrow \\ & & G_N \end{array}$$

Le morphisme $H_N : F_N \wedge I_+ \rightarrow G_N$ induit un morphisme

$$\Sigma(F_N \wedge I_+) \rightarrow \Sigma G_N \rightarrow G_{N+1}$$

qui induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma F_N \cup_{\Sigma E_N} E_{N+1} & \longrightarrow & (\Sigma F_N \cup_{\Sigma E_N} E_{N+1}) \wedge I_+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_{N+1} & \longrightarrow & G_{N+1} \end{array}$$

où le morphisme de structure est une cofibration, par hypothèse.

Par la propriété d'extension d'homotopies, on obtient une extension $H_{N+1} : F_{N+1} \wedge I_+ \rightarrow G_{N+1}$. On vérifie que cette application fournit l'extension recherchée. \square

Remarque 6.3.3. Les hypothèses entraînent que chaque morphisme $f_n : E_n \rightarrow F_n$ est une cofibration.

6.4. Le mapping cylindre et la propriété HEP.

Proposition 6.4.1. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres. Alors le morphisme $i : E \rightarrow M_f$ a la propriété HEP.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle dans \mathcal{T}_\bullet . En particulier, le spectre $M_f \wedge I_+$ est isomorphe (dans $\mathcal{S}p$) au spectre $(E \wedge (I \times I)_+) \cup_{E \wedge I_+} (F \wedge I_+)$, qui admet le spectre

$$(E \wedge I_+) \cup_E (E \wedge I_+) \cup F$$

comme rétracte par déformations. (Exercice : donner les détails de la démonstration.) \square

Remarque 6.4.2. Cette proposition explique pourquoi la construction de la cofibre homotopique C_f se comporte bien par rapport à la notion d'homotopie.

7. LES CW-SPECTRES

7.1. CW-spectres et morphismes cellulaires. Rappelons qu'un CW-complexe X est muni de sa filtration cellulaire $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots \subset X$ et qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est cellulaire si $f(X^k) \subset Y^k$ pour tout nombre naturel k . Toute application continue $g : X \rightarrow Y$ entre deux CW-complexes est homotope à un morphisme cellulaire.

Définition 7.1.1. Un CW-spectre est un spectre $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ tel que

- (1) chaque E_n est un CW-complexe pointé ;
- (2) Le morphisme de structure $\sigma_n : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ est l'inclusion d'un sous CW-complexe.

Lemme 7.1.2. Soient E, F deux CW-spectres, X un CW-complexe pointé et $a \in \mathbb{Z}$ un entier. Alors, les spectres suivants sont des CW-spectres :

- (1) $E \vee F, E \coprod F$;
- (2) $E \wedge X$;
- (3) $E[a]$.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 7.1.3. Tout CW-spectre a la propriété HEP.

Démonstration. Conséquence immédiate de la Proposition 6.2.2. □

Définition 7.1.4. Un CW-spectre E est fini s'il existe un nombre naturel D tel que le CW-complexe E_n ait au plus D cellules, quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.1.5. Soit E un CW-spectre fini.

- (1) Montrer qu'il existe un nombre naturel $N \in \mathbb{N}$ tel que $E \cong E_{\leq N}$ (voir Section 3.10 pour les spectres partiels).
- (2) Montrer qu'il existe un nombre naturel $M \in \mathbb{N}$ et un CW-complexe fini tel que $\Sigma^M E$ (par définition $E \wedge S^M$) est un sous CW-spectre de $\Sigma^\infty X$.

Définition 7.1.6. Un morphisme $f : E \rightarrow F$ entre deux CW-spectres est cellulaire si, pour tout nombre naturel n , $f_n : E_n \rightarrow F_n$ est un morphisme cellulaire.

Lemme 7.1.7. Soient X, Y deux CW-complexes pointés et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme pointé cellulaire et E un CW-spectre. Alors

- (1) $\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y$ sont des CW-spectres ;
- (2) $\Sigma^\infty X$ est un CW-spectre fini si X est un CW-complexe fini ;
- (3) le morphisme $\Sigma^\infty f : \Sigma^\infty X \rightarrow \Sigma^\infty Y$ est un morphisme cellulaire ;
- (4) le morphisme $E \wedge f : E \wedge X \rightarrow E \wedge Y$ est un morphisme cellulaire.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 7.1.8. Soit E un CW-spectre. Alors, tous les morphismes associés au cylindre :

$$E \rightrightarrows E \wedge I_+ \rightarrow E$$

sont des morphismes cellulaires.

Rappelons le foncteur $\mathfrak{T}el : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ construit dans Théorème 5.5.1.

Proposition 7.1.9. Soit E un spectre tel que

- chaque E_n est un CW-complexe pointé ;
- chaque morphisme de structure $\sigma_n : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ est cellulaire.

Alors, le spectre $\mathfrak{T}el(E)$ est un CW-spectre.

Démonstration. On vérifie par récurrence que chaque $\mathfrak{Tel}(E)_n$ est un CW-complexe et que le morphisme de structure $\Sigma\mathfrak{Tel}(E)_n \rightarrow \mathfrak{Tel}(E)_{n+1}$ est l'inclusion d'un sous-complexe (essentiellement par construction). \square

Proposition 7.1.10. *Les CW-spectres et les morphismes cellulaires entre CW-spectres forment une sous-catégorie*

$$\mathcal{A}p^{\text{CW}} \subset \mathcal{A}p$$

de la catégorie des spectres.

Démonstration. Évident. \square

Remarque 7.1.11. Pour quelques auteurs (par exemple [Swi02]) «la» catégorie $\mathcal{A}p^{\text{CW}}$ est la catégorie des spectres.

Notation 7.1.12. Soit $\mathcal{T}_\bullet^{\text{CW}}$ la sous-catégorie de \mathcal{T}_\bullet des CW-complexes pointés et des morphismes cellulaires.

Les lemmes 7.1.2 et 7.1.7 entraînent le résultat suivant.

Proposition 7.1.13. *Les foncteurs $\vee, \prod, \wedge, [a]$ induisent des foncteurs :*

- $\vee, \prod : \mathcal{A}p^{\text{CW}} \times \mathcal{A}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathcal{A}p^{\text{CW}} ;$
- $\wedge : \mathcal{A}p^{\text{CW}} \times \mathcal{T}_\bullet^{\text{CW}} \rightarrow \mathcal{A}p^{\text{CW}} ;$
- $[a] : \mathcal{A}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathcal{A}p^{\text{CW}} .$

Démonstration. Évidente. \square

7.2. Déformation aux morphismes cellulaires. Rappelons qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ entre deux CW-complexes pointés est homotope à un morphisme cellulaire.

Théorème 7.2.1. *Soient E, F deux CW-spectres.*

- (1) *Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres (pas nécessairement cellulaire). Alors f est homotope à un morphisme cellulaire $f^{\text{cell}} : E \rightarrow F$.*
- (2) *Soient $f_1, f_2 : E \rightarrow F$ deux morphismes cellulaires qui sont homotopes. Alors, il existe une homotopie cellulaire entre f_1 et f_2 .*

Démonstration. La démonstration du deuxième point est une généralisation de celle du premier (on a besoin d'une version relative d'homotopie).

Le premier point se démontre par une récurrence utilisant les spectres partiels. La première étape est conséquence du résultat pour les CW-complexes pointés. L'étape de récurrence utilise le fait que $\Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$ est l'inclusion d'un sous CW-complexe, donc a la propriété HEP. \square

Remarque 7.2.2. Le théorème est fondamental : lorsqu'on travaille à homotopie près, on pourrait se restreindre à la sous-catégorie $\mathcal{A}p^{\text{CW}}$. Toutefois, cette restriction n'est pas nécessaire.

7.3. Sous CW-spectres.

Définition 7.3.1. Soit E un CW-spectre. Un sous CW-spectre de E est un CW-spectre F muni d'un morphisme $j : F \hookrightarrow E$ tel que chaque $j_n : F_n \rightarrow E_n$ est l'inclusion d'un sous CW-complexe pointé, quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 7.3.2. L'inclusion d'un sous CW-spectre $F \hookrightarrow E$ est un morphisme cellulaire, donc un morphisme de $\mathcal{A}p^{\text{CW}}$.

Lemme 7.3.3. *Soient $E_i \subset E, i \in \{1, 2\}$ deux sous CW-spectres. Alors les spectres $E_1 \cap E_2$ et $E_1 \cup E_2$ sont des sous CW-spectres de E .*

Démonstration. (Exercice : noter que, par définition, $E_1 \cap E_2$ est la limite du diagramme d'inclusions $E_1 \hookrightarrow E \hookleftarrow E_2$ et $E_1 \cup E_2$ est la somme amalgamée de $E_1 \leftarrow E_1 \cap E_2 \rightarrow E_2$.) \square

Lemme 7.3.4. Soient E un CW-spectre et $Y \subset X$ l'inclusion d'un sous CW-complexe pointé. Alors $E \wedge Y \subset E \wedge X$ est un sous CW-spectre.

Démonstration. Exercice. \square

Exemple 7.3.5. Soit E un CW-spectre. Les inclusions $i_0, i_1 : S^0 \rightrightarrows I_+$ induisent deux sous CW-spectres $E_0, E_1 \subset E \wedge I_+$, tels que $E_0 \cap E_1 = 0$ et $E_0 \cup E_1 \cong E_0 \vee E_1 \subset E \wedge I_+$ est un sous CW-spectre.

Proposition 7.3.6. Soit $j : F \hookrightarrow E$ l'inclusion d'un sous CW-spectre. Alors j a la propriété HEP.

Démonstration. Exercice. \square

Définition 7.3.7. Un sous CW-spectre $F \subset E$ est fermé si, quelque soit $K \subset E_n$ sous CW-complexe pointé fini tel que $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $\Sigma^m K \subset F_{m+n} \subset E_{m+n}$, alors $K \subset F_n$.

Exercice 7.3.8. Montrer qu'un sous CW-spectre $F \subset E$ est fermé si et seulement si E/F est un CW-spectre.

Proposition 7.3.9. Soit $i : F \subset E$ l'inclusion d'un sous CW-spectre fermé. Alors

- (1) la cofibre $E/F := 0 \cup_F E$ est un CW-spectre et le morphisme quotient $E \rightarrow E/F$ est un morphisme cellulaire;
- (2) la cofibre homotopique C_i est un CW-spectre, et le morphisme induit $C_i \rightarrow E/F$ est cellulaire;
- (3) le morphisme $C_i \rightarrow E/F$ est une équivalence d'homotopie stricte.

Démonstration. Exercice. \square

Dans le cas d'un système direct de CW-spectres, où chaque morphisme est l'inclusion d'un sous CW-spectre, la colimite est facile à décrire.

Proposition 7.3.10. Soient $\{E(n) | n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de CW-spectres muni d'inclusion de sous-spectres $E(n) \hookrightarrow E(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors le spectre $\text{colim}_{n \rightarrow \infty} E(n)$ existe et $(\text{colim}_{n \rightarrow \infty} E(n))_t = \bigcup_n E(n)_t$, avec les morphismes de structure induits.

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier de la Proposition 4.1.5. \square

7.4. Filtration cellulaire $\cdots \rightarrow \infty$. Il existe une notion évidente de filtration cellulaire d'un CW-spectre.

Définition 7.4.1. Soit E un CW-spectre. La filtration cellulaire de E est la filtration par les sous CW-spectres

$$0 \subset \dots \subset E^{-2} \subset E^{-1} \subset E^0 \subset E^1 \subset E^2 \subset \dots \subset E,$$

où, pour $d \in \mathbb{Z}$, $(E^d)_n := (E_n)^{d+n}$, muni des morphismes de structure induits par restriction.

Lemme 7.4.2. Soit E un CW-spectre, alors

- $\bigcap_{d \in \mathbb{Z}} E^d = 0$;
- $\bigcup_{d \in \mathbb{Z}} E^d = E$.

Démonstration. Exercice. \square

Proposition 7.4.3. Soit $j : F \hookrightarrow E$ l'inclusion d'un sous CW-spectre. Alors, pour tout entier n , l'inclusion j se restreint à une inclusion $j^n : F^n \hookrightarrow E^n$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F^n & \xrightarrow{j^n} & E^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^{n+1} & \xrightarrow{j^{n+1}} & E^{n+1} \end{array}$$

Démonstration. Évident. \square

Proposition 7.4.4. *La filtration cellulaire d'un CW-spectre fini, X , est de longueur finie : il existe entiers $d_1 \leq d_2$ tel que $X^{d_1} = 0$ et $X^{d_2} = X$.*

Exercice 7.4.5. Soit E un CW-spectre tel que $E \not\cong 0$. Montrer que E possède un nombre infini de sous CW-spectres.

Les CW-spectres se construisent par l'attachement de cellules.

Proposition 7.4.6. *Soient E un CW-spectre et n un entier. Alors il existe un ensemble \mathcal{J} d'indexation et un ensemble de nombres naturels $\{d_i \in \mathbb{N} \mid i \in \mathcal{J}\}$ tel que E^{n+1} est la cofibre homotopique d'un morphisme cellulaire*

$$\bigvee_{i \in \mathcal{J}} (\tau_{\geq d_i} S^n) \rightarrow E^n.$$

L'ensemble \mathcal{J} est l'ensemble des $n + 1$ -cellules stables du spectre E .

Démonstration. (Indications). L'argument est par récurrence sur d , où d est le nombre de troncature. On montre qu'il existe ensembles d'indexation \mathcal{J}_d , $d \in \mathbb{N}$, tels que $\mathcal{J} = \coprod_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_d$ et l'ensemble \mathcal{J}_d indexe les morphismes d'attachement de cellules stables :

$$\bigvee_{j \in \mathcal{J}_d} f_j : \bigvee_{j \in \mathcal{J}_d} (\tau_{\geq d} S^n) \rightarrow E^n.$$

Pour construire \mathcal{J}_d et les morphismes d'attachement, on considère les inclusions de sous-complexes :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma E_{d-1}^n \hookrightarrow & E_d^n & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \Sigma E_{d-1}^{n+1} \hookrightarrow & E_d^{n+1} & \end{array}$$

Donc, par construction, $E_d^n \cup E_{d-1}^{n+1}$ est un sous complexe de E_d^{n+1} et que E_d^{n+1} est obtenu à partir de $E_d^n \cup E_{d-1}^{n+1}$ par le rattachement de $d + n + 1$ cellules via des morphismes $f'_j : S^{n+d} \rightarrow E_d^n \subset E_d^n \cup E_{d-1}^{n+1}$, indexé par un ensemble \mathcal{J}_d . Pour compléter l'étape de récurrence, on observe que le morphisme f'_j induit un morphisme de spectres $f_j : \tau_{\geq d} S^n \rightarrow E^n$.

Il reste à démontrer que E^{n+1} est isomorphe (dans la catégorie des spectres) à la cofibre homotopique du morphisme $\bigvee_{i \in \mathcal{J}} f_i$. Ceci est une conséquence de la construction. (Exercice.) \square

7.5. CW-spectres et spectres partiels $\cdots \rightarrow *$. Rappelons que l'adjonction entre la catégorie des spectres partiels $\mathcal{S}p_{\leq N}$ est $\mathcal{S}p$ induit un foncteur $(-)_{\leq N} : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$, muni d'une transformation naturelle $(-)_{\leq N} \rightarrow 1_{\mathcal{S}p}$ (Cf. Définition 3.10.4.)

Proposition 7.5.1. *Soit E un CW-spectre. Soient $m \leq n$ deux nombres naturels. Alors*

- (1) $E_{\leq m} \subset E_{\leq n} \subset E$ sont des sous CW-spectres ;
- (2) $(E_{\leq m})^k = 0$, pour tout entier $k < -m$.

Démonstration. Le premier point est évident (Cf. Lemma 3.10.5).

Par construction, l'espace $(E_{\leq m})_t$ est un CW-complexe qui n'a pas de cellules de dimensions $< t - m$, donc $((E_{\leq m})_t)^{t-m-1} = *$. Le deuxième point est alors conséquence de la définition de la filtration cellulaire. \square

L'énoncé suivant montre qu'on peut construire un CW-spectre à partir du diagramme des spectres $E_{\leq N}$.

Proposition 7.5.2. Soit $E \in \text{Ob} \mathcal{S}p^{\text{CW}}$ un CW-spectre, alors les transformations naturelles $E_{\leq N} \rightarrow E$ induisent un isomorphisme dans $\mathcal{S}p$:

$$\text{colim}_{N \rightarrow \infty} E_{\leq N} \xrightarrow{\cong} E.$$

Démonstration. (Exercice : on note que la colimite est un cas particulier de la construction de Proposition 7.3.10.) \square

Remarque 7.5.3.

- (1) La Proposition 7.5.1 fournit la base pour les arguments de récurrence pour les spectres.
- (2) Le deuxième point de la Proposition 7.5.1 permet de démarrer des arguments de récurrence pour les spectres $E_{\leq m}$ utilisant la filtration cellulaire.

7.6. CW-spectres, le mapping cylindre et la cofibre homotopique \dashrightarrow .

Lemme 7.6.1. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme cellulaire entre CW-spectres (autrement dit, un morphisme de $\mathcal{S}p^{\text{CW}}$). Alors, le mapping cylindre M_f est un CW-spectre et les inclusions

$$E \hookrightarrow M_f \hookrightarrow F$$

sont des inclusions de sous CW-spectres.

Démonstration. Exercice. (L'ingrédient essentiel est le résultat analogue pour les CW-complexes : soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme cellulaire entre CW-complexes pointés, alors le mapping cylindre de f a la structure d'un CW-complexe fini.) \square

Proposition 7.6.2. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de $\mathcal{S}p^{\text{CW}}$, alors

- (1) la cofibre homotopique C_f est un CW-spectre ;
- (2) le morphisme quotient $M_f \rightarrow C_f$ est un morphisme cellulaire ;
- (3) $F \rightarrow C_f$ est l'inclusion d'un sous CW-spectre ;
- (4) le spectre C_f/F est un CW-spectre, qui est canoniquement isomorphe dans $\mathcal{S}p^{\text{CW}}$ au spectre $E \wedge S^1$.

Démonstration. $E \hookrightarrow M_f$ est l'inclusion d'un sous CW-spectre, donc C_f est un CW-spectre par la Proposition 7.3.9. Les autres affirmations sont évidentes (Cf. la Proposition 5.2.4). \square

7.7. CW-remplacement. Rappeler qu'un morphisme pointé $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{T}_\bullet est une équivalence faible si $\pi_t(f)$ est une bijection, $\forall t \in \mathbb{N}$.

On utilise le théorème suivant pour les CW-complexes pointés.

Théorème 7.7.1. Soit $g : A \rightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{T}_\bullet , où A est un CW-complexe pointé. Alors, il existe un CW-complexe pointé Γg , une équivalence faible $\gamma_g : \Gamma g \rightarrow Y$ qui figure dans un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & \Gamma g \\ & \searrow g & \downarrow \gamma_g \\ & & Y, \end{array}$$

où j est l'inclusion d'un sous-complexe.

Corollaire 7.7.2. Soit $X \in \text{Ob} \mathcal{T}_\bullet$ un espace topologique pointé. Alors il existe un CW-complexe pointé ΓX et un morphisme pointé $\gamma_X : \Gamma X \rightarrow X$ qui est une équivalence faible.

Ces résultats entraînent directement l'existence d'un remplacement CW d'un spectre quelconque.

Théorème 7.7.3. Soit $E \in \text{Ob}\mathcal{S}\mathcal{p}$ un spectre. Alors, il existe un CW-spectre E^{CW} et une équivalence stricte $\gamma : E^{\text{CW}} \rightarrow E$ de spectres.

Démonstration. On construit E^{CW} par récurrence sur les espaces des spectres. Par récurrence sur N on construit les CW-complexes E_k^{CW} et les morphismes $\gamma_k : E_k^{\text{CW}} \rightarrow E_k$ tels que $\{E^{\text{CW}}, \gamma_k : E_k^{\text{CW}} \rightarrow E_k | k \leq N\}$ définissent un morphisme de spectres partiels et γ_k est une équivalence faible pour $k \leq N$.

Pour démarrer la récurrence, on utilise le Corollaire 7.7.2 et on pose $E_0^{\text{CW}} := \Gamma E_0$, muni d'une équivalence faible $\Gamma E_0 \xrightarrow{\simeq} E_0$ dans $\mathcal{S}\mathcal{p}$.

Pour l'étape de récurrence, supposer construit E_k^{CW} , $k \leq N$, muni de morphismes $\gamma_k : E_k^{\text{CW}} \rightarrow E_k$. En particulier, on dispose du morphisme $E_N^{\text{CW}} \rightarrow E_N$.

Par le Théorème 7.7.1, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma E_N^{\text{CW}} \hookrightarrow & E_{N+1}^{\text{CW}} & \\ \downarrow & \downarrow \gamma_{N+1} & \\ \Sigma E_N & \xrightarrow{\sigma_N^E} & E_{N+1}, \end{array}$$

où j_N est l'inclusion d'un sous-complexe et γ_{N+1} est une équivalence faible. $\checkmark \quad \square$

Il existe une version relative de ce théorème.

Théorème 7.7.4. Soient $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres, tel que $E \in \text{Ob}\mathcal{S}\mathcal{p}^{\text{CW}}$. Alors, il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & \Gamma_f^{\text{CW}} \\ & \searrow f & \downarrow \gamma \\ & & F, \end{array}$$

tel que

- (1) Γ_f^{CW} est un CW-spectre et $E \hookrightarrow \Gamma_f^{\text{CW}}$ est l'inclusion d'un sous CW-spectre ;
- (2) $\gamma : \Gamma_f^{\text{CW}} \rightarrow F$ est une équivalence stricte.

En particulier, $E \hookrightarrow \Gamma_f^{\text{CW}}$ a la propriété HEP.

Démonstration. La démonstration généralise celle du Théorème 7.7.3. Pour démarrer la récurrence, on choisit une factorisation

$$\begin{array}{ccc} E_0 \hookrightarrow & (\Gamma_f^{\text{CW}})_0 & \\ & \searrow & \downarrow \simeq \\ & & F_0. \end{array}$$

Pour l'étape de récurrence, on utilise le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma E_n \hookrightarrow & & E_{n+1} & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ \Sigma(\Gamma_f^{\text{CW}})_n \hookrightarrow & & E_{n+1} \cup_{\Sigma E_n} \Sigma(\Gamma_f^{\text{CW}})_n & & \\ & \searrow & & \searrow \delta_{n+1} & \\ & & \Sigma F_n & \xrightarrow{\quad} & F_{n+1}, \end{array}$$

où les morphismes \hookrightarrow sont des inclusions de sous-complexes.

On définit f_{n+1}^{CW} par la factorisation

$$\begin{array}{ccc}
 E_{n+1} \cup_{\Sigma E_n} f_n^{\text{CW}} & \hookrightarrow & (\Gamma_f^{\text{CW}})_{n+1} := \Gamma \delta_{n+1} \\
 & \searrow & \downarrow \simeq \\
 & & F_{n+1}.
 \end{array}$$

Ceci termine l'étape de récurrence.

La vérification des propriétés de cette construction est élémentaire. \square

Remarque 7.7.5.

- (1) Le morphisme $\gamma : \Gamma_f^{\text{CW}} \rightarrow F$ est une équivalence stricte, en particulier il est une équivalence d'homotopie stable.
- (2) La construction de $\Gamma X \rightarrow X$ du Corollaire 7.7.2 n'est pas *a priori* fonctoriel. Donc le théorème 7.7.4 n'affirme pas que le CW-remplacement d'un spectre est fonctoriel.

8. LA CONSTRUCTION DE \mathcal{SH}

8.1. Rappels sur la catégorie \mathcal{H}_\bullet . Par définition, \mathcal{H}_\bullet est la catégorie d'homotopie des espaces topologiques pointés : intuitivement, on la considère comme étant la catégorie $\mathcal{T}_\bullet / \simeq$, des espaces topologiques pointés localisée par rapport aux équivalences faibles. L'existence de cette catégorie *a priori* n'est pas évident. En utilisant l'existence de CW-remplacements pour les espaces pointés et le théorème de Whitehead, on a le modèle suivant explicite pour la catégorie \mathcal{H}_\bullet :

objets les CW-complexes pointés ;

morphismes les classes d'homotopie pointée des applications continues pointées.

Remarque 8.1.1. Tout morphisme entre CW-complexes pointés est homotope à un morphisme cellulaire, donc on pourrait également utiliser le modèle $\mathcal{T}_\bullet^{\text{CW}} / \sim$, la catégorie homotopique de la catégorie des CW-complexes pointés et des morphismes cellulaires.

8.2. Sous CW-spectres cofinaux.

Définition 8.2.1. Soit E un CW-spectre. Un sous CW-spectre $F \subset E$ de E est cofinal si, pour tout sous CW-complexe fini $X \subset E_n$ ($n \in \mathbb{N}$), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\Sigma^k X \subset E_{n+k}$ est contenu dans $F_{n+k} \subset E_{n+k}$.

Exemple 8.2.2. Soient E un CW-spectre et $d \in \mathbb{N}$. Alors $\tau_{\geq d} E \subset E$ est un sous CW-spectre cofinal.

Lemme 8.2.3. Soient E, F deux CW-spectres.

- (1) Soient $E'' \subset E' \subset E$ deux sous CW-spectres ; alors E'' est cofinal dans E si et seulement si (E'' est cofinal dans E' et E' est cofinal dans E).
- (2) Soient W un CW-complexe pointé et $E' \subset E$ un sous CW-spectre cofinal. Alors $E' \wedge W$ est un sous CW-spectre cofinal de $E \wedge W$.
- (3) Soient E', E'' deux sous CW-spectres cofinaux de E ; alors les sous CW-spectres $E' \cap E''$ et $E' \cup E''$ de E sont cofinaux.
- (4) Soient $f : E \rightarrow F$ un morphisme et $F' \subset F$ un sous CW-spectre cofinal. Alors, il existe un sous CW-spectre cofinal $E' \subset E$ tel que f se restreint à un morphisme $f' : E' \rightarrow F'$; si f est cellulaire, alors f' est cellulaire.

Démonstration. Les premiers énoncés du lemme sont évidents.

Pour le dernier point, pour $n \in \mathbb{N}$, soit E'_n le plus grand sous CW-complexe de E_n tel que $f_n(E'_n) \subset F'_n$. Alors, les CW-complexes E'_n définissent un sous CW-spectre $E' \subset E$.

Soit $X \subset E_k$ un sous CW-complexe fini, alors $f_k(X)$ est contenu dans un sous CW-complexe fini $Y \subset F_k$. Puisque F' est cofinal dans F , il existe un nombre naturel d tel que $\Sigma^d Y \subset F'_{k+d}$. En particulier, $f_{k+d}(\Sigma^d X)$ est contenu dans $\Sigma^d Y \subset F'_{k+d}$, donc $E'_{k+d} \subset \Sigma^d Y$. \square

Lemme 8.2.4. Soient E un CW-spectre et W un CW-complexe pointé fini. Alors, quelque soit $F \subset E \wedge W$, un CW-spectre cofinal, il existe un sous CW-spectre cofinal $E' \subset E$ tel que $E' \wedge W \subset F$.

Démonstration. Soit $E'_n \subset E_n$ le plus grand sous CW-complexe tel que $E'_n \wedge W \subset F_n$. Il est évident que ces espaces définissent un sous CW-spectre $E' \subset E$. Il faut montrer que E' est cofinal dans E .

Soit $Z \subset E_n$ un sous CW-complexe fini. Alors $Z \wedge W \subset E_n \wedge W$ est un sous complexe fini, donc il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $\Sigma^d Z \wedge W \subset F_{n+d}$. Alors, $\Sigma^d Z \subset E'_{n+d}$, donc E' est cofinal. \square

Lemme 8.2.5. Soient W un CW-complexe pointé fini et $F \subset \Sigma^\infty W$ un sous CW-spectre cofinal. Alors, il existe un nombre naturel d tel que $\tau_{\geq d} \Sigma^\infty W \subset F$.

Démonstration. Prendre $X = W = (\Sigma^\infty W)_0$. Alors, il existe un nombre naturel $d \in \mathbb{N}$ tel que $\Sigma^d X \subset F_d$, puisque F est cofinal dans $\Sigma^\infty W$. On en déduit que $\tau_{\geq d}(\Sigma^\infty W) \subset F$. \square

Lemme 8.2.6. Soient $F \subset E$ deux CW-spectres tels que F n'est pas cofinal dans E . Alors, il existe un morphisme cellulaire de spectres de la forme

$$f : \tau_{\geq d} S^n \rightarrow F,$$

$d \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$, tel que le spectre $G := C_f$ est un sous CW-spectre : $F \subset G \subset E$.

Démonstration. Par l'hypothèse que F n'est pas un sous-spectre cofinal, il existe un sous CW-complexe fini $W \subset W_k$, $k \in \mathbb{N}$, tel que $\Sigma^t W \not\subset F_{k+t}$, quelque soit $t \in \mathbb{N}$. On peut choisir W un complexe minimal parmi de tels complexes. On peut écrire $W = W' \cup_{S^n} e^{n+1}$, pour un sous-complexe propre W' , et morphisme d'attachement (cellulaire) $\alpha : S^n \rightarrow W'$. Donc, par minimalité de W , il existe un nombre naturel t tel que $\Sigma^t W' \subset F_{t+t}$. Alors le morphisme $\Sigma^t \alpha$ induit un morphisme $S^{n+t} \rightarrow \Sigma^t W' \rightarrow F_{t+t}$. Par adjonction, ceci induit $f : \tau_{\geq t+t} S^{n+t} \rightarrow F$. Soit G le spectre C_f , alors, par construction, $F \subset G \subset E$. \square

8.3. Hyperhom.

Définition 8.3.1. Soient E un CW-spectre et F un spectre. On définit :

$$\mathbb{H}\text{om}(E, F) := \text{colim}_{E' \subset E} \text{Hom}(E', F),$$

où la colimite (filtrante) est indexée par les sous CW-spectres cellulaires de E .

Remarque 8.3.2. Un élément $[f]$ de $\mathbb{H}\text{om}(E, F)$ est représenté par un morphisme de spectres $f : E' \rightarrow F$, où $E' \subset E$ est un sous-spectre cofinal. Deux tels morphismes $f : E' \rightarrow F$, $g : E'' \rightarrow F$ représentent le même élément s'il existe $E''' \subset E' \cap E''$ cofinal dans E tel que $f|_{E'''} = g|_{E'''}$.

Lemme 8.3.3. Soient E un CW-spectre et $\beta : F_1 \rightarrow F_2$ un morphisme de spectres, alors β induit :

$$\beta_* : \mathbb{H}\text{om}(E, F_1) \rightarrow \mathbb{H}\text{om}(E, F_2),$$

par $\beta_*[f : E' \rightarrow F_1] := [\beta \circ f : E' \rightarrow F_2]$.

Démonstration. Le morphisme β induit un morphisme entre les diagrammes

$$\text{Hom}(E', F_1) \rightarrow \text{Hom}(E', F_2)$$

qui passe à la colimite. \square

Lemme 8.3.4. Soient $\alpha : E_1 \rightarrow E_2$ un morphisme cellulaire entre CW-spectres, et F un spectre. Alors α induit une application naturelle (par rapport à F) :

$$\alpha^* : \mathbb{H}\text{om}(E_2, F) \rightarrow \mathbb{H}\text{om}(E_1, F).$$

Démonstration. Soit $[f : E'_2 \rightarrow F]$ un élément de $\mathbb{H}\text{om}(E_2, F)$. Par le Lemme 8.2.3, il existe un sous CW-spectre cofinal $E'_1 \subset E_1$ tel que α se restreint à un morphisme $\alpha' : E'_1 \rightarrow E'_2$. On définit $\alpha^*[f] = [f \circ \alpha' : E'_1 \rightarrow F]$. On vérifie que $\alpha^*[f]$ est bien défini - ne dépend ni du choix de E'_2 ni du choix de E'_1 . \square

En particulier, les deux inclusions $i_0, i_1 : E \rightrightarrows E \wedge I_+$ induisent

$$\mathbb{H}\text{om}(E \wedge I_+, F) \rightrightarrows \mathbb{H}\text{om}(E, F).$$

Définition 8.3.5. Deux éléments f, g de $\mathbb{H}\text{om}(E, F)$ sont homotopes (on écrit $f \sim g$) s'il existe $H \in \mathbb{H}\text{om}(E \wedge I_+, F)$ tel que $i_0^* H = f$ et $i_1^* H = g$. (H est une homotopie de f à g .)

Remarque 8.3.6. Soient E un CW-spectre et $X \subset E \wedge I_+$ un sous CW-spectre cofinal. Alors, il existe un sous CW-spectre cofinal $E' \subset E$ tel que $E' \wedge I_+ \subset X$, par le Lemme 8.2.4. Donc on peut toujours représenter un élément de $\mathbb{H}\text{om}(E \wedge I_+, F)$ par une homotopie $E' \wedge I_+ \rightarrow F$, pour $E' \subset E$ cofinal.

Soient f, g deux éléments de $\mathbb{H}\text{om}(E, F)$, représentés par des morphismes de spectres $f : E_f \rightarrow F$ (resp. $g : E_g \rightarrow F$) où $E_f, E_g \subset E$ sont des sous CW-spectres cofinaux. Les éléments f, g sont homotopes s'il existe un sous CW-spectre cofinal $E' \subset E_f \cap E_g$ et une homotopie $H : E' \wedge I_+ \rightarrow F$ entre $f|_{E'}$ et $g|_{E'}$.

Proposition 8.3.7. Soient E un CW-spectre et F un spectre. La relation \sim sur $\mathbb{H}\text{om}(E, F)$ est une relation d'équivalence.

Démonstration. Exercice. (Utiliser le Lemme 8.2.3.) □

8.4. La catégorie $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$. En utilisant $\mathbb{H}\text{om}$, on peut définir une nouvelle catégorie.

Définition 8.4.1. Soit $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$ la catégorie :

- objets** les CW-spectres ;
- morphismes** $\text{Hom}_{\mathbb{S}p^{\text{CW}}}(E, F) := \mathbb{H}\text{om}(E, F)$.

Exercice 8.4.2. Vérifier que $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$ est une catégorie.

Remarque 8.4.3. On n'exige pas qu'un morphisme de $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$ soit représenté par un morphisme cellulaire.

Le résultat suivant est formel et explique l'intérêt de la catégorie $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$, (Cf. Exemple 5.3.12).

Lemme 8.4.4. Soient E un CW-spectre et $E' \subset E$ un sous CW-spectre cofinal. Alors le morphisme $E' \hookrightarrow E$ induit un isomorphisme dans $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$.

En particulier, pour tout nombre naturel d , le morphisme $\tau_{\geq d} E \rightarrow E$ induit un isomorphisme dans $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$.

Proposition 8.4.5. Le foncteur $\mathcal{A}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathbb{S}p^{\text{CW}}$ induit par la transformation naturelle $\text{Hom}(E, F) \rightarrow \mathbb{H}\text{om}(E, F)$ est l'inclusion d'une sous-catégorie.

Démonstration. On vérifie que la transformation naturelle $\text{Hom}(E, F) \rightarrow \mathbb{H}\text{om}(E, F)$ qui envoie un morphisme f à la classe $[f]$ induit un foncteur $\mathcal{A}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathbb{S}p^{\text{CW}}$. Les deux catégories ont les mêmes objets, donc il reste à vérifier que le foncteur est fidèle. (Exercice.) □

La définition 8.3.5 fournit une notion de homotopie \sim dans $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$, donc on dispose d'une notion d'équivalence d'homotopie dans la catégorie $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$:

Définition 8.4.6. Un morphisme $f : E \rightarrow F$ de $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$ est une équivalence d'homotopie s'il existe un morphisme $g : F \rightarrow E$ de $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$ tel que $g \circ f \sim 1_E$ et $f \circ g \sim 1_F$ dans $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$.

La plupart des foncteurs habituels définis sur $\mathcal{A}p^{\text{CW}}$ passent à la catégorie $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$. En particulier, on obtient :

- (1) $\vee : \mathbb{S}p^{\text{CW}} \times \mathbb{S}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathbb{S}p^{\text{CW}}, (E, F) \mapsto E \vee F$;
- (2) $\amalg : \mathbb{S}p^{\text{CW}} \times \mathbb{S}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathbb{S}p^{\text{CW}}, (E, F) \mapsto E \amalg F$;
- (3) $\wedge : \mathbb{S}p^{\text{CW}} \times \mathcal{T}_\bullet^{\text{CW}} \rightarrow \mathbb{S}p^{\text{CW}}, (E, X) \mapsto E \wedge X$;
- (4) $[a] : \mathbb{S}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathbb{S}p^{\text{CW}}, E \mapsto E[a]$.

Proposition 8.4.7. Soit $a \in \mathbb{Z}$ un entier. Le foncteur $[a] : \mathbb{S}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathbb{S}p^{\text{CW}}$ est une équivalence de catégories, d'inverse $[-a] : \mathbb{S}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathbb{S}p^{\text{CW}}$.

Démonstration. Pour démontrer que $[a], [-a]$ soient des équivalences de catégories, inverses l'un à l'autre, on peut supposer que $a \geq 0$. Alors, par le Lemme 3.7.3, on a $[a] \circ [-a] = 1_{\mathcal{S}p}$, donc on déduit $[a] \circ [-a] = 1_{\mathcal{S}p}^{\text{CW}}$, au niveau de la catégorie $\mathcal{S}p^{\text{CW}}$.

Par la Proposition 3.8.4, il y a une transformation naturelle $[-a] \circ [a] \rightarrow 1_{\mathcal{S}p}$, qui coïncide avec la transformation naturelle $\tau_{\geq a} \rightarrow 1_{\mathcal{S}p}$. Ce morphisme naturel devient un isomorphisme naturel dans $\mathcal{S}p^{\text{CW}}$, par le Lemme 8.4.4. \checkmark \square

8.5. La catégorie stable, $\mathcal{S}\mathcal{H}$.

Définition 8.5.1. Soient E un CW-spectre et F un spectre. On définit :

$$[E, F] := \mathbb{H}\text{om}(E, F) / \sim .$$

Lemme 8.5.2. Soient E_1, E_2 deux CW-spectres et F un spectre. Alors la composition de morphismes de spectres induit une loi de composition

$$[E_1, E_2] \times [E_2, F] \rightarrow [E_1, F].$$

Démonstration. Conséquence du Lemme 8.3.4. \square

Définition 8.5.3. Soit $\mathcal{S}\mathcal{H}$ la catégorie :

Objets les CW-spectres ;

Morphismes $\text{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}}(E_1, E_2) := [E_1, E_2]$.

Exercice 8.5.4. Vérifier que $\mathcal{S}\mathcal{H}$ est une catégorie.

Proposition 8.5.5. Il existe un foncteur $\mathcal{S}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}$ de passage aux classes d'homotopie et donc un foncteur

$$\mathcal{S}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H} .$$

Démonstration. Par construction. \square

Remarque 8.5.6. On aimerait pouvoir définir un foncteur $\mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}$; la construction du CW-remplacement d'un spectre n'est pas un foncteur $\mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p^{\text{CW}}$, donc il faut procéder avec caution. Le théorème de Whitehead pour les CW-spectres permet d'éviter certains problèmes.

8.6. Les foncteurs $\Sigma^\infty, \Sigma, [1]$ et \wedge . Rappelons que le foncteur $\Sigma^\infty : \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{S}p$ envoie les CW-complexes à des CW-spectres (voir le lemme 7.1.7). On obtient donc :

Proposition 8.6.1. Le foncteur $\Sigma^\infty : \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{S}p$ induit un foncteur $\Sigma^\infty : \mathcal{T}_\bullet^{\text{CW}} \rightarrow \mathcal{S}p^{\text{CW}}$, qui passe aux catégories homotopiques :

$$\Sigma^\infty : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H} .$$

Démonstration. \square

On a aussi le résultat suivant :

Proposition 8.6.2. Le foncteur $- \wedge S^1 : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ induit un foncteur

$$\Sigma : \mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H} .$$

En plus, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\bullet & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{H}_\bullet \\ \Sigma^\infty \downarrow & & \downarrow \Sigma^\infty \\ \mathcal{S}\mathcal{H} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{S}\mathcal{H} \end{array}$$

commute (à équivalence naturelle près).

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Proposition 8.6.3. Le foncteur $\wedge : \mathcal{S}p \times \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{S}p$ induit un foncteur

$$\wedge : \mathcal{S}\mathcal{H} \times \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}.$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\bullet \times \mathcal{H}_\bullet & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{H}_\bullet \\ \Sigma^\infty \times 1 \downarrow & & \downarrow \Sigma^\infty \\ \mathcal{S}\mathcal{H} \times \mathcal{H}_\bullet & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{S}\mathcal{H} \end{array}$$

commute (à équivalence naturelle près).

Démonstration. Exercice. □

Il nous faut toujours démontrer que :

- le foncteur Σ est une équivalence de catégories ;
- la catégorie $\mathcal{S}\mathcal{H}$ est additive.

Une première étape est la suivante, qui concerne les foncteurs de décalage introduits en Définition 3.7.1.

Proposition 8.6.4. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors le foncteurs $[a] : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ induit un foncteur

$$[a] : \mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}$$

qui est une équivalence de catégories, dont l'inverse est $[-a]$.

Démonstration. Le foncteur $[a]$ induit un foncteur $[a] : \mathbb{S}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathbb{S}p^{\text{CW}}$ et donc induit un foncteur $\mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}$ est évident. Proposition 8.4.7 entraîne que $[a] : \mathbb{S}p^{\text{CW}} \rightarrow \mathbb{S}p^{\text{CW}}$ est une équivalence de catégories, d'inverse $[-a]$, donc induit une équivalence de catégories au niveau de $\mathcal{S}\mathcal{H}$. □

8.7. Premiers calculs. Soit W un CW-complexe pointé fini. Le lemme 8.2.5 entraîne que, pour calculer $[\Sigma^\infty W, F]$, il suffit d'utiliser le système inverse des spectres cofinaux $\tau_{\geq d} \Sigma^\infty W$.

Remarque 8.7.1. Soit $d \in \mathbb{N}$ un nombre naturel. Il existe un isomorphisme naturel, pour $W \in \text{Ob } \mathcal{T}_\bullet^{\text{CW}}$:

$$\tau_{\geq d} \Sigma^\infty W \cong \mathfrak{F}_d(\Sigma^d W),$$

(voir la définition 3.6.1).

Lemme 8.7.2. Soient W un CW-complexe pointé fini, F un spectre et d un nombre naturel. Alors

- (1) $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\tau_{\geq d} \Sigma^\infty W, F) \cong \text{Hom}_{\mathcal{T}_\bullet}(\Sigma^d W, F_d)$;
- (2) $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\tau_{\geq d} \Sigma^\infty W, F) / \sim \cong [\Sigma^d W, F_d]_{\mathcal{H}_\bullet}$.

Démonstration. Exercice. □

Remarque 8.7.3. On écrit $[-, -]_{\mathcal{H}_\bullet}$ ici pour éviter toute confusion éventuelle : ce sont les classes d'homotopie dans \mathcal{T}_\bullet .

Proposition 8.7.4. Soient W un CW-complexe pointé fini et F un spectre. Alors

$$[\Sigma^\infty W, F] \cong \text{colim}_{d \rightarrow \infty} [\Sigma^d W, F_d]_{\mathcal{H}_\bullet}.$$

Démonstration. Une conséquence du Lemme 8.7.2. (Exercice.) □

Corollaire 8.7.5. Soient F un spectre et n un entier. Alors

$$[S^n, F] \cong \pi_n(F),$$

donc les groupes d'homotopie stable de F se calcule dans $\mathcal{S}\mathcal{H}$ à l'aide de $[-, -]$.

On peut donc donner la définition suivante, qui est compatible avec la Définition 5.3.8.

Définition 8.7.6. Un morphisme $f : E \rightarrow F$ de $\mathbb{S}p^{CW}$ est une équivalence d'homotopie stable si, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme f induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}}(S^n, E) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}}(S^n, F).$$

On peut étendre le résultat du Lemme 8.7.2.

Lemme 8.7.7. Soient $W \xrightarrow{i} V$ une inclusion de CW-complexes pointés finis, $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres et $[\phi] \in \mathbb{H}\mathrm{om}(\Sigma^\infty W, E)$, $[\psi] \in \mathbb{H}\mathrm{om}(\Sigma^\infty V, F)$ deux éléments, tels que $f_*[\phi], i^*[\psi] \in \mathbb{H}\mathrm{om}(\Sigma^\infty W, F)$ sont homotopes par une homotopie $H \in \mathbb{H}\mathrm{om}(W \wedge I_+, F)$.

Alors, il existe $d \in \mathbb{N}$ et morphismes de spectres $\phi : \tau_{\geq d}\Sigma^\infty W \rightarrow E$, $\psi : \tau_{\geq d}\Sigma^\infty V \rightarrow F$, qui représentent $[\phi], [\psi]$ respectivement et une homotopie $H : \tau_{\geq d}\Sigma^\infty W \wedge I_+ \rightarrow F$ qui représentent H tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} \tau_{\geq d}\Sigma^\infty W & \longrightarrow & \tau_{\geq d}\Sigma^\infty W \wedge I_+ & \longleftarrow & \tau_{\geq d}\Sigma^\infty W \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \phi \\ \tau_{\geq d}\Sigma^\infty V & \xrightarrow{\psi} & F & \xleftarrow{f} & E. \end{array}$$

Ce diagramme est adjoint du diagramme dans \mathcal{T}_\bullet :

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^d W & \longrightarrow & \Sigma^d W \wedge I_+ & \longleftarrow & \Sigma^d W \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^d V & \xrightarrow{\psi_d} & F_d & \xleftarrow{f_d} & E_d. \end{array}$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 8.7.8. L'énoncé peut être compris de la manière suivante. Les données 'correspondent' à un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^\infty W & \xrightarrow{[\phi]} & E \\ \Sigma^\infty i \downarrow & \simeq_H & \downarrow f \\ \Sigma^\infty V & \xrightarrow{[\psi]} & F, \end{array}$$

où \rightsquigarrow indique un élément de $\mathbb{H}\mathrm{om}(-, -)$, commutatif à homotopie près.

Ce diagramme est induit par un diagramme de \mathcal{T}_\bullet , commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^d W & \longrightarrow & E_d \\ \Sigma^d i \downarrow & \simeq_{H_d} & \downarrow f_d \\ \Sigma^d V & \longrightarrow & F_d, \end{array}$$

pour $d \gg 0$.

Deuxième partie 2. Propriétés de la catégorie \mathcal{SH}

9. LA PROPRIÉTÉ HELP ET LE THÉORÈME DE WHITEHEAD

9.1. Groupes d'homotopie relatifs.

Définition 9.1.1. Soit $g : X \rightarrow Y$ un morphisme de la catégorie \mathcal{T}_\bullet . Les groupes (ensembles pour $* \leq 1$) d'homotopie relatifs $\pi_*(X \xrightarrow{g} Y)$ sont les groupes d'homotopie relatifs $\pi_*(M_g, X, *)$.

Cette notion se généralise à la catégorie des spectres.

Lemme 9.1.2. Soit $g : X \rightarrow Y$ un morphisme de la catégorie \mathcal{T}_\bullet . La suspension Σ induit une application

$$\pi_*(X \xrightarrow{g} Y) \rightarrow \pi_{*+1}(\Sigma X \xrightarrow{\Sigma g} \Sigma Y)$$

qui est un morphisme de groupes pour $* \geq 2$.

Démonstration. Exercice. □

Soient $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres, $n \in \mathbb{Z}$ un entier et $E \rightarrow M_f$ son mapping cylindre. Alors, comme pour les groupes d'homotopie stable, on obtient un système direct de groupes abéliens :

$$\dots \rightarrow \pi_{n+t}(E_t \xrightarrow{f_t} F_t) \rightarrow \pi_{n+t+1}(E_{t+1} \xrightarrow{f_{t+1}} F_{t+1}) \rightarrow \dots$$

Définition 9.1.3. Soient $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres et $n \in \mathbb{Z}$ un entier. On définit :

$$\pi_n(E \xrightarrow{f} F) := \operatorname{colim}_{t \rightarrow \infty} \pi_{n+t}(E_t \xrightarrow{f_t} F_t).$$

Lemme 9.1.4. Soient $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres et $\gamma \in \pi_{n+t}(E_t \xrightarrow{f_t} F_t)$ une classe d'homotopie, où $n + t \geq 0$. Si $\pi_n(E \xrightarrow{f} F) = 0$, alors il existe un entier $T \geq t$ tel que $\gamma \mapsto 0$ dans $\pi_{n+T}(E_T \xrightarrow{f_T} F_T)$.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 9.1.5. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres. Il existe une suite exacte longue de groupes abéliens :

$$\dots \rightarrow \pi_n(E) \xrightarrow{\pi_n(f)} \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E \xrightarrow{f} F) \rightarrow \pi_{n-1}(E) \rightarrow \dots$$

Démonstration. Le foncteur colim est exact. □

Rappeler qu'un morphisme $f : E \rightarrow F$ entre deux spectres (par nécessairement des CW-spectres) est une équivalence d'homotopie stable si $\pi_*(f) : \pi_*(E) \rightarrow \pi_*(F)$ est une bijection.

Corollaire 9.1.6. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres qui est une équivalence d'homotopie stable. Alors les groupes $\pi_*(E \xrightarrow{f} F)$ sont triviaux.

Démonstration. Évident. □

9.2. La propriété HELP.

Définition 9.2.1. Soit \mathcal{C} une classe de morphismes de la catégorie \mathcal{Sp} . Un morphisme de CW-spectres $j : F \rightarrow E$ à la propriété HELP par rapport à \mathcal{C} (la propriété de relèvement et d'extension d'homotopies) si, pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & F \wedge I_+ & \longleftarrow & F \\ \downarrow j & & \downarrow & & \downarrow \beta \\ E & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xleftarrow{c} & X \end{array}$$

tel que c appartient à \mathcal{C} , il existe E' cofinal dans E tel que $F \subset E' \subset E$, un relèvement $r : E' \rightarrow X$ et une extension d'homotopie $H : E' \wedge I_+ \rightarrow Y$ qui rend commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \longrightarrow & F \wedge I_+ & \longleftarrow & F \\
 \downarrow j' & & \swarrow & \downarrow & \searrow \beta \\
 & & Y & \xleftarrow{c} & X \\
 & \nearrow \alpha' & \swarrow H & & \nwarrow r \\
 E' & \longrightarrow & E' \wedge I_+ & \longleftarrow & E'
 \end{array}$$

où α' est la restriction de α à E' .

Remarque 9.2.2. Les données correspondent à un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{\beta} & X \\
 \downarrow & \simeq & \downarrow c \\
 E & \xrightarrow{\alpha} & Y
 \end{array}$$

commutatif à une homotopie donnée près, tel que c appartient à la classe \mathcal{C} .

La propriété HELP affirme l'existence d'un relèvement r qui rend commutatif le triangle supérieur du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{\beta} & X \\
 \downarrow & \nearrow r & \downarrow c \\
 E' & \xrightarrow{\alpha'} & Y
 \end{array}$$

où le triangle inférieur commute à une homotopie relative à F près.

Théorème 9.2.3. Soient $i : F \subset E$ l'inclusion d'un sous CW-spectre. Alors, i a la propriété HELP par rapport à la classe d'équivalences d'homotopie stable dans $\mathcal{S}p$.

Par un argument standard (utiliser le lemme de Zorn et le lemme 8.2.6), la démonstration est conséquence du résultat suivant. (Utiliser Corollaire 9.1.6 pour déduire l'hypothèse).

Proposition 9.2.4. Soient $d \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$ deux entiers tels que $n + d \geq 0$. Alors l'inclusion $\tau_{\geq d}S^n \subset \tau_{\geq d}e^{n+1}$ a la propriété HELP par rapport à la classe des morphismes $f : E \rightarrow F$ tel que $\pi_{n+1}(E \xrightarrow{f} F)$ est trivial.

Démonstration. (Indications) Soient $f : E \rightarrow F$ un morphisme tel que $\pi_{n+1}(E \xrightarrow{f} F) = 0$ et

$$\begin{array}{ccccc}
 \tau_{\geq d}S^n & \longrightarrow & \tau_{\geq d}S^n \wedge I_+ & \longleftarrow & \tau_{\geq d}S^n \\
 \downarrow j & & \downarrow & & \downarrow \beta \\
 \tau_{\geq d}e^{n+1} & \xrightarrow{\alpha} & F & \xleftarrow{f} & E
 \end{array}$$

un diagramme commutatif.

Par une généralisation du Lemme 8.7.7, ce diagramme est adjoint à un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{n+d} & \longrightarrow & S^{n+d} \wedge I_+ & \longleftarrow & S^{n+d} \\
 \downarrow j & & \downarrow & & \downarrow \beta \\
 e^{n+d+1} & \xrightarrow{\alpha} & F_d & \xleftarrow{f_d} & E_d.
 \end{array}$$

Ce diagramme définit une classe d'homotopie relative $\gamma \in \pi_{n+d+1}(E_d \xrightarrow{f_d} F_d)$ (vérifier ce point!). Si γ est triviale, alors la démonstration de la propriété HELP instable pour le morphisme $S^{n+d} \hookrightarrow e^{n+d+1}$ fournit le relèvement et l'homotopie recherchée. Dans le cas général, on stabilise à l'aide du lemme 9.1.4. \square

9.3. Equivalences d'homotopie stable.

Corollaire 9.3.1. Soient E un CW-spectre et $f : X \rightarrow Y$ une équivalence d'homotopie stable de la catégorie $\mathcal{S}p$. Alors f induit un isomorphisme

$$[E, X] \xrightarrow{\cong} [E, Y].$$

Démonstration. Surjectivité de $[E, f] : \text{soit } \alpha \in [E, Y]$ représenté par un morphisme de spectres $E' \rightarrow Y$, où $E' \subset E$ est cofinal. Alors, il existe un CW-spectre cofinal $E'' \subset E'$ et un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} E'' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \simeq & \downarrow f \\ E' & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

par le Théorème 9.2.3.

Supposons que $g, h \in [E, X]$ ont le même image sous $[E, f]$. Alors g, h sont représentés par morphismes $g : E_g \rightarrow X$ et $h : E_h \rightarrow X$, pour $E_g, E_h \subset E$ cofinaux, et il existe une homotopie $h : E''' \wedge I_+ \rightarrow Y$, pour E''' cofinal dans $E_f \cap E_g$ entre $f \circ g'$ et $f \circ h'$, où g', h' sont les restrictions de g, h respectivement à E''' . Considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E''' \vee E''' & \xrightarrow{g' \vee h'} & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ E''' \wedge I_+ & \xrightarrow{h} & Y, \end{array}$$

où $E''' \vee E''' \subset E''' \wedge I_+$ est l'inclusion canonique. Il existe un relèvement dans $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$ (par le Théorème 9.2.3), qui fournit une homotopie $g' \sim h'$ (dans $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$). \square

Remarque 9.3.2. Le corollaire 9.3.1 fournit une condition équivalente pour qu'un morphisme soit une équivalence d'homotopie stable.

9.4. Le théorème de Whitehead. Rappelons (de la Définition 8.4.6) que la notion d'équivalence d'homotopie stable se généralise à la catégorie $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$.

Théorème 9.4.1. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme de $\mathcal{S}p$, où E, F sont deux CW-spectres. Alors f est une équivalence d'homotopie dans $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$ si et seulement si f est une équivalence d'homotopie stable.

Démonstration. Si f est une équivalence d'homotopie, alors f est une équivalence d'homotopie stable (par une généralisation évidente de la Proposition 5.3.9). Il nous reste à démontrer la réciproque.

Soit

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow f \\ F & \xrightarrow{=} & F. \end{array}$$

un diagramme commutatif. Par Théorème 9.2.3, il existe un morphisme $s : F \rightarrow E$ dans $\mathbb{S}p^{\text{CW}}$ qui est une section à homotopie près de f . En particulier, s est une équivalence d'homotopie stable, puisque f en est une.

Par le même raisonnement, il existe une équivalence d'homotopie stable $f' : E \rightarrow F$ dans $\mathbb{S}p^{CW}$ tel que $s \circ f' \sim 1_E$ dans $\mathbb{S}p^{CW}$. On a

$$f \sim f \circ s \circ f' \sim f',$$

donc $f \sim f'$ dans $\mathbb{S}p^{CW}$, puisque \sim est une relation d'équivalence. \square

Corollaire 9.4.2. Soient $E \in \text{Ob } \mathcal{A}$ et $E_1 \xrightarrow{\simeq} E \xleftarrow{\simeq} E_2$ deux CW-résolutions. Alors

- (1) il existe un morphisme $\alpha : E_1 \rightarrow E_2$ dans $\mathbb{S}p^{CW}$, représenté par un morphisme $\alpha' : E'_1 \rightarrow E_2$ de \mathcal{A} , où $E'_1 \subset E_1$ est cofinal, qui figure dans un diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} & & E_2 \\ & \nearrow \alpha' & \downarrow \\ E'_1 & \longrightarrow & E \end{array};$$

- (2) α est une équivalence d'homotopie dans $\mathbb{S}p^{CW}$.

Remarque 9.4.3. Il y a une version relative de ce corollaire. Soient E, E_1, E_2 trois CW-spectres et F un spectre tel qu'il existe deux factorisations

$$\begin{aligned} E &\hookrightarrow E_1 \xrightarrow{\simeq} F \\ E &\hookrightarrow E_2 \xrightarrow{\simeq} F \end{aligned}$$

d'un morphisme de spectres $E \rightarrow F$ par une inclusion d'un sous-spectre suivi par une équivalence stable. Alors, il existe un sous-spectre cofinal $E \subset E'_1 \subset E_1$ et un relèvement $r : E'_1 \rightarrow E_2$ qui figurent dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E'_1 & \xrightarrow{\simeq} & E_2 \\ \downarrow & \nearrow r & \downarrow \simeq \\ E & \xrightarrow{\simeq} & F \end{array}$$

où le carré est commutatif, le triangle supérieur commute et le triangle inférieur est commutatif à homotopie près.

En particulier, r est une équivalence stable, donc une équivalence d'homotopie dans $\mathbb{S}p^{CW}$, par le théorème de Whitehead. Donc, à homotopie près dans $\mathbb{S}p^{CW}$, la factorisation du morphisme $f : E \rightarrow F$ est unique.

10. APPLICATIONS

10.1. Le foncteur Σ est une équivalence. On peut désormais démontrer que le foncteur $\Sigma := - \wedge S^1 : \mathcal{S}p \rightarrow \mathcal{S}p$ induit une équivalence de catégories $\Sigma : \mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}$. La Proposition 8.6.4 montre que le foncteur $[1] : \mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}$ est une équivalence de catégories, donc il suffit de montrer que les deux foncteurs $\Sigma, [1] : \mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}$ sont naturellement équivalents.

Soit E un spectre; rappelons que $(E \wedge S^1)_n = E_n \wedge S^1 \cong \Sigma E_n$ et que $(E[1])_n = E_{n+1}$. On ne peut pas définir un morphisme de spectres $E \wedge S^1 \rightarrow E[1]$ induit par les morphismes de structure, puisque les diagrammes ne commutent pas. En effet, le morphisme de structure de $E \wedge S^1$ est la composée suivante

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(E_n \wedge S^1) & \xrightarrow{\cong} & S^1 \wedge (S^1 \wedge E_n) \xrightarrow{\tau \wedge E_n} S^1 \wedge S^1 \wedge E_n \\ & & \downarrow S^1 \wedge \sigma_n \\ & & S^1 \wedge E_{n+1}, \end{array}$$

où $\tau : S^1 \wedge S^1 \rightarrow S^1 \wedge S^1$ est l'homéomorphisme qui échange les facteurs.

Ainsi on voit que le carré

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(E \wedge S^1)_n & \longrightarrow & (E \wedge S^1)_{n+1} \\ \sigma_n \downarrow & \swarrow \tau & \downarrow \sigma_{n+1} \\ \Sigma(E[1])_n & \longrightarrow & (E[1])_{n+1} \end{array}$$

commute à l'action de τ près. Le morphisme τ est de degré -1 , donc est homotope au morphisme $S^1 \wedge -1 : S^1 \wedge S^1 \rightarrow S^1 \wedge S^1$.

Donc, on peut définir un pseudo-morphisme (voir la section 5.6 pour cette notion) de spectres

$$f : (E \wedge S^1) \dashrightarrow E[1]$$

par

$$f_n = \begin{cases} \sigma_n & n \equiv 0 \pmod{2} \\ -\sigma_n & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Remarque 10.1.1. Soit $f : E \dashrightarrow F$ un pseudo-morphisme de spectres, alors f induit un morphisme $\pi_*(f) : \pi_*(E) \rightarrow \pi_*(F)$. Il existe un spectre $\mathfrak{Tel}(E)$ et un diagramme

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} & \mathfrak{Tel}(E) & \\ & \swarrow q & \searrow \tilde{f} \\ E & & F \end{array}$$

de morphismes de spectres tels que q est une équivalence stricte et le diagramme commute

$$\begin{array}{ccc} & \pi_*(\mathfrak{Tel}(E)) & \\ & \swarrow \pi_*(q) & \searrow \pi_*(\tilde{f}) \\ \pi_*(E) & \xrightarrow{\pi_*(f)} & \pi_*(F). \end{array}$$

Si E est un CW-spectre, $\mathfrak{Tel}(E)$ est un CW-spectre et q est cellulaire.

En utilisant ces observations, on a la généralisation suivante du théorème de Whitehead.

Proposition 10.1.2. Soient E, F deux CW-spectres, munis d'un pseudo-morphisme $f : E \dashrightarrow F$ tel que $\pi_*(f)$ est une bijection. Alors, E, F ont le même type d'homotopie dans la catégorie $\mathcal{S}p^{CW}$.

Démonstration. Le pseudo-morphisme f fournit un diagramme de la forme (3). Le morphisme q est une équivalence d'homotopie stable, donc \tilde{f} est une équivalence d'homotopie stable, par la propriété 2 sur 3. Le résultat découle du Théorème de Whitehead 9.4.1. \square

Comme cas particulier, on a le résultat suivant.

Proposition 10.1.3. *Soit E un spectre. Le pseudo-morphisme $f : (E \wedge S^1) \dashrightarrow E[1]$ induit une équivalence d'homotopie stable*

$$\mathfrak{Tel}(E \wedge S^1) \rightarrow E[1].$$

En particulier, si E est un CW-spectre, alors les spectres $E \wedge S^1$ et $E[1]$ ont le même type d'homotopie dans la catégorie $\mathbb{S}p^{CW}$.

Démonstration. Le pseudo-morphisme f induit un morphisme de spectres $\mathfrak{Tel}(E \wedge S^1) \rightarrow E[1]$, par Proposition 5.6.4. Pour démontrer que ce morphisme est une équivalence d'homotopie stable, il suffit de montrer que $\pi_*(f)$ est un isomorphisme, par Proposition 5.6.5. Pour cela il suffit de comparer les deux systèmes directs qui calculent les groupes d'homotopie stable via les morphismes $\pi_*(f_n)$.

Les groupes $\pi_t(E[1])$ est la colimite du système direct :

$$\dots \pi_{t+k}(E_{t+k+1}) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{t+k+1}(\Sigma E_{t+k+1}) \rightarrow \pi_{t+k+1}(E_{t+k+2}) \rightarrow \pi_{t+k+1}(\Sigma E_{t+k+2}) \rightarrow \dots$$

En considérant que les termes avec $t+k$ pair, on voit facilement que les morphismes f_n induisent l'isomorphisme recherché.

Si E est un CW-spectre, alors les spectres $E \wedge S^1$, $\mathfrak{Tel}(E \wedge S^1)$, $E[1]$ sont des CW-spectres. Par le théorème de Whitehead, Théorème 9.4.1, on a que les morphismes

$$(4) \quad E \wedge S^1 \leftarrow \mathfrak{Tel}(E \wedge S^1) \rightarrow E[1]$$

sont des équivalences d'homotopie dans la catégorie $\mathbb{S}p^{CW}$. \square

Proposition 10.1.4. *Les foncteurs $[1], \Sigma : \mathcal{L}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{H}$ sont naturellement équivalents.*

Démonstration. Le diagramme (4) est naturel en $E \in \text{Ob}\mathcal{S}p$. Les foncteurs $[1], \Sigma : \mathcal{L}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{H}$ sont induits par les foncteurs $[1], \Sigma : \mathbb{S}p^{CW} \rightarrow \mathbb{S}p^{CW}$ après passage à $\mathcal{L}\mathcal{H}$, ces foncteurs sont équivalents au foncteur induit par $\mathfrak{Tel}(- \wedge S^1) : \mathbb{S}p^{CW} \rightarrow \mathbb{S}p^{CW}$. \square

Corollaire 10.1.5. *Le foncteur $\Sigma : \mathcal{L}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{H}$ est une équivalence de catégories.*

Corollaire 10.1.6. *Soient E, F deux objets de $\mathcal{L}\mathcal{H}$. Alors $[E, F]$ possède une structure naturelle de groupe abélien et la composition est biadditive. (Autrement dit, $\mathcal{L}\mathcal{H}$ est une catégorie préadditive.)*

Démonstration. Exercice. (Le fait que $[E, F]$ est naturellement un groupe abélien est une conséquence du fait que $[\Sigma^2 X, Y]_{\mathcal{H}_\bullet}$ est naturellement un groupe abélien.) \square

10.2. Relation entre $\mathcal{S}\mathcal{W}$ et $\mathcal{L}\mathcal{H}$ ----- \times . Le foncteur $\Sigma : \mathcal{L}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{H}$ est naturellement équivalent au foncteur $[1] : \mathcal{L}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{H}$, donc le résultat suivant correspond à la factorisation canonique

Corollaire 10.2.1. *La restriction du foncteur $\Sigma^\infty : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{H}$ à \mathcal{H}_\bullet^f se factorise à équivalence naturelle près :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\bullet^f & \hookrightarrow & \mathcal{H}_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \Sigma^\infty \\ \mathcal{S}\mathcal{W} & \hookrightarrow & \mathcal{L}\mathcal{H} \end{array}$$

où le foncteur $\mathcal{S}\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{L}\mathcal{H}$ est le plongement pleinement fidèle qui envoie (X, a) à $\Sigma^\infty X[a]$, pour tout X CW-complexe pointé fini X et entier a .

Démonstration. Soient X, Y deux CW-complexes pointés, finis et a, b deux entiers. Par la Proposition 8.7.4 on a des isomorphismes naturels :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}}(\Sigma^\infty X[a], \Sigma^\infty Y[b]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}}(\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y[b-a]) \cong \mathrm{colim}_{d \rightarrow \infty} [\Sigma^d X, \Sigma^{d+b-a} Y]_{\mathcal{H}}.$$

Le terme à droite est naturellement isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathcal{H}}((X, a), (Y, b))$. \square

10.3. Suites cofibres.

Définition 10.3.1.

- (1) Une suite cofibre distinguée dans la catégorie $\mathcal{S}\mathcal{H}$ est une suite de morphismes induite par un diagramme de $\mathcal{S}p^{CW}$ de la forme :

$$X \xrightarrow{f} Y \rightarrow C_f,$$

(donc X, Y sont des CW-spectres, f est un morphisme cellulaire et C_f est la cofibre homotopique, qui est un CW-spectre).

- (2) Une suite cofibre est une suite de morphismes $A \rightarrow B \rightarrow C$ de $\mathcal{S}\mathcal{H}$ telle qu'il existe une suite cofibre distinguée $X \rightarrow Y \rightarrow C_f$ et un diagramme commutatif dans $\mathcal{S}\mathcal{H}$:

$$(5) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & C_f \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C, \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont des isomorphismes de $\mathcal{S}\mathcal{H}$.

Remarque 10.3.2. Le diagramme est commutatif dans $\mathcal{S}\mathcal{H}$; on peut le représenter par un diagramme de $\mathcal{S}p^{CW}$, quitte à passer à des sous-spectres cofinaux, mais, en général, le diagramme n'est pas commutatif dans $\mathcal{S}p^{CW}$, mais il est commutatif à homotopie près.

Exemple 10.3.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre naturel.

- (1) Le morphisme $n \in [S, S] \cong \pi_0(S) \cong \mathbb{Z}$ induit une suite cofibre distinguée :

$$S \xrightarrow{n} S \rightarrow S/n$$

où, par définition, S/n est la cofibre (un spectre de Moore).

- (2) Soit \mathbf{HZ} le spectre d'Eilenberg-MacLane. Multiplication par n induit un morphisme de spectres $n : \mathbf{HZ} \rightarrow \mathbf{HZ}$ qui figure dans une suite cofibre

$$\mathbf{HZ} \xrightarrow{n} \mathbf{HZ} \rightarrow \mathbf{HZ}/n.$$

qui correspond à la suite exacte courte de groupes abéliens :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n \rightarrow 0.$$

(La démonstration de ce fait utilise une caractérisation des spectres d'Eilenberg-MacLane.)

Lemme 10.3.4. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{S}\mathcal{H}$. Il existe une suite cofibre de la forme

$$A \xrightarrow{f} B \rightarrow C.$$

Démonstration. Exercice. \square

Lemme 10.3.5. *Soit*

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 \end{array}$$

un diagramme commutatif de \mathcal{SH} , tel que les flèches verticales soient des isomorphismes. Alors $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow C_1$ est une suite cofibre si et seulement si $A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow C_2$ est une suite cofibre.

Démonstration. Évident. \square

Lemme 10.3.6. *Soit $A \rightarrow B \rightarrow C$ une suite cofibre de \mathcal{SH} , alors la composée des morphismes est 0.*

Démonstration. Il suffit d'établir le résultat dans le cas d'une suite cofibre distinguée. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme cellulaire entre deux CW-spectres ; alors, par construction même, la composée $X \rightarrow Y \rightarrow C_f$ est homotopiquement trivial dans la catégorie des spectres, donc représente 0 dans \mathcal{SH} . \square

Lemme 10.3.7. *Soit $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow C_f$ une suite cofibre distinguée. Alors, il existe suite cofibres distinguées :*

$$\begin{array}{ccccc} Y & \rightarrow & C_f & \rightarrow & \Sigma X \\ & & C_f & \rightarrow & \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y. \end{array}$$

Soit $A \xrightarrow{g} B \rightarrow C$ une suite cofibre de \mathcal{SH} , alors il existe suites cofibres induites :

$$\begin{array}{ccccc} B & \rightarrow & C & \rightarrow & \Sigma A \\ & & C & \rightarrow & \Sigma A \xrightarrow{-\Sigma g} \Sigma B. \end{array}$$

Démonstration. Exercice. (Cf. la suite exacte de Puppe en \mathcal{H}_* pour le premier point.) \square

Remarque 10.3.8. On peut représenter les suites cofibres du lemme par un triangle

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow & \swarrow \\ & C, & \end{array}$$

où $C \xrightarrow{\circ} A$ représente un morphisme $C \rightarrow \Sigma A$. Ainsi on parle de *triangles* de la catégorie \mathcal{SH} .

Proposition 10.3.9. *Soit A un objet de \mathcal{SH} . Alors, il existe une suite cofibre représentée par le triangle :*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & 0 \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Sigma A, & \end{array}$$

Démonstration. Exercice. \square

Proposition 10.3.10. *Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ deux morphismes de \mathcal{SH} . Alors la suite $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ est une suite cofibre si et seulement si $\Sigma X \rightarrow \Sigma Y \rightarrow \Sigma Z$ est une suite cofibre.*

Démonstration. L'implication \Rightarrow est une conséquence du Lemme 10.3.7. Pour la réciproque, on utilise le fait que le foncteur $\Sigma : \mathcal{SH} \rightarrow \mathcal{SH}$ est une équivalence de catégories.

Supposons que la suite $\Sigma X \rightarrow \Sigma Y \rightarrow \Sigma Z$ est isomorphe à la suite cofibre distinguée $U \xrightarrow{k} V \rightarrow C_k$ dans la catégorie \mathcal{SH} . Alors, en appliquant le foncteur décalage $[-1]$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma X[-1] & \longrightarrow & \Sigma Y[-1] & \longrightarrow & \Sigma Z[-1] \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ U[-1] & \xrightarrow{k[-1]} & V[-1] & \longrightarrow & C_k[-1], \end{array}$$

dont la ligne inférieure est toujours une suite cofibre distinguée (exercice).

La ligne supérieure est isomorphe à la suite $X \rightarrow Y \rightarrow Z$, puisque le foncteur $[-1]$ est l'inverse de Σ , $[1]$ et Σ étant canoniquement équivalents. \square

Le lemme suivant est essentiellement une conséquence formelle de la définition de la cofibre homotopique.

Lemme 10.3.11. Soient $A \rightarrow B \rightarrow C$ une suite cofibre de \mathcal{SH} et Z un objet de \mathcal{SH} . Alors, la suite de groupes abéliens :

$$[C, Z] \rightarrow [B, Z] \rightarrow [A, Z]$$

est exacte.

Démonstration. On peut supposer que la suite cofibre est distinguée, donc est induite par un diagramme

$$X \xrightarrow{f} Y \rightarrow C_f$$

de $\mathcal{S}p^{CW}$; de même, on peut supposer que Z est représenté par un CW-spectre.

Soit $g \in [Y, Z]$ un élément du noyau de $[f, Z]$, alors g est représenté par un morphisme de spectres $g : Y' \rightarrow Z$, où $Y' \subset Y$ est cofinal ; il existe $X' \subset X$ cofinal tel que $f(X') \subset Y'$. L'hypothèse sur g entraîne qu'il existe $X'' \subset X'$ cofinal et une nul-homotopie $H : C_{1_{X''}} \rightarrow Z$ de $g \circ f_{X''}$ qui induit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_{1_{X''}} \cup_{X''} Y' & \xrightarrow{H \cup g} & Z \\ \text{cofinal} \downarrow & & \\ C_f & & \end{array}$$

Ce diagramme représente un élément de $[C_f, Z]$ qui étend l'élément g . \square

Théorème 10.3.12. Soient $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow C$, $X \xrightarrow{\chi} Y \rightarrow Z$ deux suites cofibres de \mathcal{SH} . Un carré commutatif de \mathcal{SH} :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

se complète en un diagramme commutatif de \mathcal{SH} :

$$(6) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \Sigma X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{g} & V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & \Sigma U, \end{array}$$

dont les lignes sont des suites cofibres (étendues).

Démonstration. On peut réduire au cas où les suites cofibres sont distinguées. De plus, on peut supposer que le carré commutatif est induit par un carré (strictement) commutatif de morphismes cellulaires entre CW-spectres. (Exercice !)

La construction de la suite de Puppe (et donc des suites cofibres) peut être rendue fonctorielle de la manière suivante. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme cellulaire entre CW-spectres, alors il existe un diagramme commutatif naturel de morphismes cellulaires entre CW-spectres :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & CY \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & C_f & \longrightarrow & CY \cup_Y C_f \end{array}$$

où CX , CY sont les cônes sur X , Y respectivement et les deux carrés sont des sommes amalgamées. En plus, il existe une équivalence d'homotopie : $CY \cup_Y C_f \simeq \Sigma X$ et la suite de Puppe correspond à la suite des morphismes

$$X \xrightarrow{f} Y \rightarrow C_f \rightarrow CY \cup_Y C_f.$$

Cette suite est naturelle en le morphisme f . En particulier, un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

de morphismes cellulaires entre CW-spectres induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & C_f & \longrightarrow & CY \cup_Y C_f \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{g} & V & \longrightarrow & C_g & \longrightarrow & CV \cup_V C_g \end{array}$$

Ce diagramme induit le morphisme recherché entre les suites cofibres. (Vérifier cette affirmation.) \square

Définition 10.3.13. Un morphisme entre deux suites cofibres de \mathcal{SH} est un diagramme commutatif de la forme (6).

Comme Corollaire du Théorème 10.3.12, on obtient le résultat suivant.

Proposition 10.3.14. Soient $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z$ une suite cofibre et A un CW-spectre. Alors, la suite de groupes abéliens :

$$[A, X] \rightarrow [A, Y] \rightarrow [A, Z]$$

est exacte.

Démonstration. Il est évident que la composée des morphismes

$$[A, X] \rightarrow [A, Y] \rightarrow [A, Z]$$

est triviale, dont il suffit de montrer qu'un élément $\alpha \in [A, Y]$ qui est dans le noyau de $[A, Y] \rightarrow [A, Z]$ est dans l'image de $[A, X] \rightarrow [A, Y]$; autrement dit, α se factorise par le morphisme $f : X \rightarrow Y$.

Soit α un élément du noyau et considérer le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma A & \xrightarrow{=} & \Sigma A \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow \Sigma\alpha \\
 Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \Sigma X & \xrightarrow{-\Sigma f} & \Sigma Y,
 \end{array}$$

dont les lignes sont des suites cofibres (Cf. Lemme 10.3.7) et le carré à gauche commute par l'hypothèse sur α .

La flèche en pointillé existe qui rend commutatif tout le diagramme, par le Théorème 10.3.12. En particulier, le carré commutatif à droite montre que l'élément $-h \in [\Sigma A, \Sigma X] \cong [A, X]$ fournit la factorisation de α recherchée. \square

Remarque 10.3.15. Ce résultat montre que les suites cofibres et les suites fibres coïncident dans la catégorie \mathcal{SH} . En particulier, on peut étendre la suite exacte de Puppe d'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ à gauche :

$$\dots \Sigma^{-1} X \xrightarrow{-\Sigma^{-1}f} \Sigma^{-1} Y \rightarrow \Sigma^{-1} C_f \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow C_f \rightarrow \dots$$

Donc la fibre homotopique de $f : X \rightarrow Y$ est $\Sigma^{-1} C_f$.

Remarque 10.3.16. Le morphisme h du Corollaire ?? n'est pas unique ; il n'est pas défini par une propriété universelle.

Proposition 10.3.17. (Utiliser la notation du Corollaire ??). Si f, g sont des isomorphismes de \mathcal{SH} , alors le morphisme h est un isomorphisme de \mathcal{SH} .

Démonstration. Ce résultat se déduit du lemme des cinq. Le morphisme h est un isomorphisme de \mathcal{SH} si et seulement si $[E, h]$ est un isomorphisme, pour tout CW-spectre E . Par la proposition 10.3.14, les deux suites cofibres induisent des suites exactes longues de groupes abéliens sous le foncteur $[E, -]$. On conclut la démonstration en appliquant le lemme des cinq. \square

Corollaire 10.3.18. Soient $A \xrightarrow{f} B \rightarrow C_1$ et $A \xrightarrow{f} B \rightarrow C_2$ deux suites cofibres de \mathcal{SH} . Alors, les objets C_1, C_2 sont isomorphes dans \mathcal{SH} .

Démonstration. Évident. \square

10.4. Structure additive.

Proposition 10.4.1. Soient X, Y deux objets de \mathcal{SH} . Alors $X \vee Y$ est le coproduit et le produit de X et Y dans \mathcal{SH} .

Démonstration. Les morphismes $0 \rightarrow Y$ et $X \rightarrow 0$ induisent une suite cofibre dans \mathcal{SH} :

$$X \rightarrow X \vee Y \rightarrow Y$$

qui est scindée naturellement (dans le sens évident). Alors, pour $Z \in \text{Ob } \mathcal{SH}$, le lemme 10.3.11 et la Proposition 10.3.14 fournissent des suites exactes scindées de groupes abéliens :

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow [Z, X] &\rightarrow [Z, X \vee Y] \rightarrow [Z, Y] \rightarrow 0 \\
 0 \rightarrow [X, Z] &\rightarrow [X \vee Y, Z] \rightarrow [Y, Z] \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

qui donnent des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}
 [Z, X \vee Y] &\cong [Z, X] \oplus [Z, Y] \\
 [X \vee Y, Z] &\cong [X, Z] \oplus [Y, Z].
 \end{aligned}$$

\square

Comme corollaire, on obtient le théorème suivant, qui généralise la Proposition 10.1.6, qui établit que la catégorie \mathcal{SH} est pré-additive.

Théorème 10.4.2. *La catégorie \mathcal{SH} est additive.*

Remarque 10.4.3. La catégorie \mathcal{SH} , munie du foncteur Σ et des suites cofibrées est une catégorie triangulée. (Voir par exemple [HPS97] ou [Mar83] pour les axiomes d'une catégorie triangulée.)

10.5. **Coproduits dans \mathcal{SH} .** Le foncteur \vee induit les coproduits arbitraires dans \mathcal{SH} .

Théorème 10.5.1. *Soit $\{X_i | i \in \mathcal{I}\}$ une famille de CW-spectres. Alors le spectre*

$$\bigvee_{i \in \mathcal{I}} X_i$$

est un CW-spectre qui représente le coproduit dans \mathcal{SH} .

Démonstration. Exercice. □

Proposition 10.5.2. *Soit $\{A_i \rightarrow B_i \rightarrow C_i | i \in \mathcal{I}\}$ une famille de suites cofibrées de \mathcal{SH} . Alors le diagramme*

$$\bigvee_{i \in \mathcal{I}} A_i \rightarrow \bigvee_{i \in \mathcal{I}} B_i \rightarrow \bigvee_{i \in \mathcal{I}} C_i$$

est une suite cofibrée dans \mathcal{SH} .

Démonstration. Exercice. □

Remarque 10.5.3. Pour les produits infinis, il faut en général utiliser une version dérivée du produit de la catégorie \mathcal{Sp} .

11. LE PRODUIT SMASH

Dans ces notes, on utilise l'approche classique au produit smash de $\mathcal{S}\mathcal{H}$, celle qui est exposée par exemple dans [Ada95, Part II]. Il existe de meilleures approches, à l'aide de catégories de spectres structurés. Le plus élémentaire est probablement la catégorie des spectres orthogonaux (voir [MMSS01]) mais il y a également la catégorie des spectres symétriques [HSS00] et la catégorie des S -modules [EKMM97]. Ces catégories fournissent la même catégorie $\mathcal{S}\mathcal{H}$ (à équivalence près), par [MMSS01].

11.1. Existence.

Théorème 11.1.1. *Le produit smash naïf de spectres $\wedge : \mathcal{S}\mathcal{H} \times \mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}$ induit un produit smash*

$$\wedge : \mathcal{S}\mathcal{H} \times \mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}$$

tel que $(\Sigma^\infty X) \wedge (\Sigma^\infty Y)$ est naturellement isomorphe à $\Sigma^\infty(X \wedge Y)$, pour X, Y deux CW-complexes pointés.

Le triplet $(\mathcal{S}\mathcal{H}, \wedge, S)$ est une structure symétrique monoïdale. En particulier, pour spectres E, F, G de $\mathcal{S}\mathcal{H}$, il existe isomorphismes naturels dans $\mathcal{S}\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \lambda_E & : S \wedge E \rightarrow E \\ \rho_E & : E \wedge S \rightarrow E \\ \alpha_{E,F,G} & : (E \wedge F) \wedge G \rightarrow E \wedge (F \wedge G) \\ \tau_{E,F} & : E \wedge F \rightarrow F \wedge E \end{aligned}$$

qui satisfont les relations de compatibilité habituelles.

Démonstration. Une démonstration de ce résultat est donnée dans [Ada95]. \square

Remarque 11.1.2. Soient p, q deux entiers. L'isomorphisme $\tau_{S^p, S^q} : S^p \wedge S^q \rightarrow S^q \wedge S^p$ est de degré -1^{pq} . Il s'agit de l'origine des signes qui apparaissent en topologie algébrique.

11.2. Propriétés du produit smash.

Proposition 11.2.1. *Soient $\{X_i | i \in \mathcal{I}\}$ une famille d'objets de $\mathcal{S}\mathcal{H}$ et Z un objet de $\mathcal{S}\mathcal{H}$. Alors, le morphisme canonique*

$$\bigvee_{i \in \mathcal{I}} (Z \wedge X_i) \rightarrow Z \wedge \bigvee_{i \in \mathcal{I}} X_i$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le bouquet $\bigvee_{i \in \mathcal{I}}$ est le coproduit dans $\mathcal{S}\mathcal{H}$, donc le morphisme canonique est induit par $Z \wedge (X_i \rightarrow \bigvee_{i \in \mathcal{I}} X_i)$. Ce morphisme est représenté par un isomorphisme au niveau des spectres, puisque le produit smash commute aux \bigvee dans la catégorie \mathcal{T}_\bullet . (Exercice.) \square

Proposition 11.2.2. *Soient $Z \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}$ un spectre et $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ une suite cofibre de $\mathcal{S}\mathcal{H}$. Alors*

$$A \wedge Z \xrightarrow{\alpha \wedge Z} B \wedge Z \xrightarrow{\beta \wedge Z} C \wedge Z$$

est une suite cofibre.

Démonstration. On peut supposer que la suite cofibre est distinguée, associée à un morphisme cellulaire $f : E \rightarrow F$ de CW-spectres. On démontre sans difficulté qu'il suffit de montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$X_n \wedge Z_n \xrightarrow{f_n} Y_n \wedge Z_n \rightarrow C_{f_n} \wedge Z_n$$

est une suite cofibre dans la catégorie \mathcal{T}_\bullet . Ceci découle du homéomorphisme $C_{f_n} \wedge Z_n \cong C_{f_n \wedge Z_n}$. \square

Exemple 11.2.3. Soient $n \in \mathbb{N}$ un nombre naturel et $E \in \text{Ob } \mathcal{SH}$ un spectre. Alors, la suite cofibre $S \xrightarrow{n} S \rightarrow S/n$ induit une suite cofibre

$$E \xrightarrow{n} E \rightarrow E \wedge S/n.$$

On écrit E/n pour la cofibre.

En particulier, pour $E = \mathbf{HZ}$, on obtient un isomorphisme

$$(\mathbf{HZ})/n \cong \mathbf{HZ}/n$$

dans \mathcal{SH} .

11.3. Le produit smash et morphismes. Le lemme suivant donne une manière explicite de comprendre les morphismes entre produits smash de spectres.

Lemme 11.3.1. Soient E, F, G trois spectres et soit $E \wedge F$ le produit smash naïf des spectres. Un morphisme de spectres

$$f : E \wedge F \rightarrow G$$

est la donnée d'une famille de morphismes d'espaces topologiques pointés :

$$\{f_{2n} : E_n \wedge F_n \rightarrow G_{2n} | n \in \mathbb{N}\}$$

tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^2(E_n \wedge F_n) & \xrightarrow{\cong} & \Sigma E_n \wedge \Sigma F_n \xrightarrow{\sigma_n^E \wedge \sigma_n^F} E_{n+1} \wedge F_{n+1} \\ \Sigma^2 f_{2n} \downarrow & & \downarrow f_{2(n+1)} \\ \Sigma^2 G_{2n} & \xrightarrow{\sigma_{2n+1}^G \circ \Sigma \sigma_{2n}^G} & G_{2(n+1)}, \end{array}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Exercice. □

Remarque 11.3.2. Plus généralement, on peut considérer une famille de morphismes

$$\{f_{\alpha,\beta} : E_\alpha \wedge F_\beta \rightarrow G_{\alpha+\beta}\}$$

(α, β) parcourant un sous-ensemble convenable de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, les morphismes étant compatibles au morphismes de structure des spectres.

12. HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE

12.1. Théories de cohomologie et d'homologie réduites. La notion de théorie d'homologie réduite est calquée sur les propriétés de l'homologie singulière. Cependant, on n'émet aucune hypothèse sur la valeur de la théorie sur S^0 . (Cf les axiomes d'Eilenberg-Steenrod.)

Définition 12.1.1. Une théorie d'homologie réduite est un foncteur $h_* : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ tel que

- (1) (Suspension) quelque soit $n \in \mathbb{Z}$, il existe un isomorphisme naturel $h_n \xrightarrow{\cong} h_{n+1} \circ \Sigma$;
- (2) (Exactitude) quelque soit $f : X \rightarrow Y$, morphisme de \mathcal{H}_\bullet , la suite cofibre $X \rightarrow Y \rightarrow C_f$ induit une suite exacte

$$h_n(X) \xrightarrow{h_n(f)} h_n(Y) \rightarrow h_n(C_f)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}.$$

La théorie h_* est additive si, pour toute famille $\{X_j | j \in \mathcal{J}\}$ d'espaces topologiques pointés, les morphismes $X_j \rightarrow \bigvee_j X_j$ induisent un isomorphisme

$$\bigoplus_j h_*(X_j) \xrightarrow{\cong} h_*(\bigvee_j X_j).$$

Une transformation naturelle de théories d'homologie réduite est une transformation naturelle $\eta_* : h_* \rightarrow k_*$ de foncteurs $\mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ qui commute aux isomorphismes de suspension :

$$\begin{array}{ccc} h_n & \longrightarrow & h_{n+1} \circ \Sigma \\ \eta_n \downarrow & & \downarrow \eta_{n+1} \circ \Sigma \\ k_n & \longrightarrow & k_{n+1} \circ \Sigma \end{array}$$

commute $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 12.1.2. L'axiome d'homotopie (soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes d'espaces pointés tels que $f \sim g$, alors $h_*(f) = h_*(g)$) est implicite dans l'hypothèse que h_* est un foncteur défini sur la catégorie homotopique \mathcal{H}_\bullet des espaces pointés.

La notion de théorie de cohomologie réduite est essentiellement duale à la notion d'homologie réduite.

Définition 12.1.3. Une théorie de cohomologie réduite est un foncteur $h^* : \mathcal{H}_\bullet^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ tel que

- (1) (Suspension) quelque soit $n \in \mathbb{Z}$, il existe un isomorphisme naturel $h^n \xrightarrow{\cong} h^{n+1} \circ \Sigma$;
- (2) (Exactitude) quelque soit $f : X \rightarrow Y$, morphisme de \mathcal{H}_\bullet , la suite cofibre $X \rightarrow Y \rightarrow C_f$ induit une suite exacte

$$h^n(C_f) \rightarrow h^n(Y) \xrightarrow{h^n(f)} h^n(X)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}.$$

La théorie h^* est additive si, pour toute famille $\{X_j | j \in \mathcal{J}\}$ d'espaces topologiques pointés, les morphismes $X_j \rightarrow \bigvee_j X_j$ induisent un isomorphisme

$$h^*(\bigvee_j X_j) \xrightarrow{\cong} \prod_j h^*(X_j).$$

Une transformation naturelle de théories de cohomologie réduite est une transformation naturelle $\eta^* : h^* \rightarrow k^*$ de foncteurs $\mathcal{H}_\bullet^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ qui commute aux isomorphismes de suspension :

$$\begin{array}{ccc} h^n & \longrightarrow & h^{n+1} \circ \Sigma \\ \eta^n \downarrow & & \downarrow \eta^{n+1} \circ \Sigma \\ k^n & \longrightarrow & k^{n+1} \circ \Sigma \end{array}$$

commute $\forall n \in \mathbb{Z}$.

La propriété *Mayer-Vietoris* ou la propriété d'*excision* pour une théorie d'homologie réduite additive (resp. cohomologie réduite additive) est une conséquence des axiomes (voir [May99, Section 14.5], par exemple).

Par exemple, on a le résultat suivant :

Proposition 12.1.4. *Soient $h_* : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ une théorie d'homologie réduite et X un CW-complexe pointé muni de sous-complexes pointés A_1, A_2 tels que $A_1 \cup A_2 = X$. Alors, il existe une suite exacte longue naturelle en homologie :*

$$\dots \rightarrow h_n(A_1 \cap A_2) \rightarrow h_n(A_1) \oplus h_n(A_2) \rightarrow h_n(X) \rightarrow h_{n-1}(A_1 \cap A_2) \rightarrow \dots$$

Démonstration. (Indications) Le triplet $(X; A_1, A_2)$ de complexes pointés induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A_1 \cup A_2 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_1/A_1 \cap A_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ A_2 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A_2 \end{array}$$

dont les lignes sont équivalentes (à homotopie près) à des suites cofibres, et le morphisme vertical à droite est un homéomorphisme.

Alors, en appliquant l'homologie, on obtient un morphisme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & h_n(A_1 \cap A_2) & \longrightarrow & h_n(A_1) & \longrightarrow & h_n(A_1/A_1 \cap A_2) \longrightarrow h_{n-1}(A_1 \cap A_2) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ \dots & \longrightarrow & h_n(A_2) & \longrightarrow & h_n(X) & \longrightarrow & h_n(X/A_2) \longrightarrow h_{n-1}(A_2) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Ce diagramme induit la suite exacte de Mayer-Vietoris (voir [Sel97], la suite exacte de Mayer-Vietoris algébrique). \square

Il y a également une version en cohomologie :

Proposition 12.1.5. *Soient $h^* : \mathcal{H}_\bullet^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ une théorie de cohomologie réduite et X un CW-complexe pointé muni de sous-complexes pointés A_1, A_2 tels que $A_1 \cup A_2 = X$. Alors, il existe une suite exacte longue naturelle en cohomologie :*

$$\dots \rightarrow h^n(X) \rightarrow h^n(A_1) \oplus h^n(A_2) \rightarrow h^n(A_1 \cap A_2) \rightarrow h^{n+1}(X) \rightarrow \dots$$

Démonstration. L'idée de la démonstration est identique. \square

12.2. Variantes stables. Il existe des variantes *stables* des notions d'homologie et de cohomologie : on remplace la catégorie \mathcal{H}_\bullet par \mathcal{SH} et la condition d'exactitude doit être satisfaite pour toute suite cofibre de \mathcal{SH} . Puisque le foncteur $\Sigma : \mathcal{SH} \rightarrow \mathcal{SH}$ est une équivalence de catégories, on peut se restreindre au degré zéro.

Définition 12.2.1. Une théorie d'homologie réduite sur la catégorie $\mathcal{S}\mathcal{H}$ est un foncteur $K_0 : \mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{A}b$ tel que, pour toute suite cofibre $A \rightarrow B \rightarrow C$ de la catégorie $\mathcal{S}\mathcal{H}$, la suite

$$K_0(A) \rightarrow K_0(B) \rightarrow K_0(C)$$

est exacte. La théorie est additive si, pour toute famille $\{X_i | i \in \mathcal{I}\}$ de spectres, il existe un isomorphisme canonique

$$\bigoplus_{\mathcal{I}} K_0(X_i) \xrightarrow{\cong} K_0(\bigvee_{\mathcal{I}} X_i).$$

Une transformation naturelle entre théories d'homologie K_0 et L_0 est une transformation naturelle de foncteurs $\mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{A}b$, $\eta_0 : K_0 \rightarrow L_0$.

Remarque 12.2.2. Soit K_0 une théorie d'homologie réduite sur $\mathcal{S}\mathcal{H}$. On étend K_0 canoniquement en un foncteur $K_* : \mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{A}b^{\text{gr}}$ par $K_n := K_0 \circ \Sigma^{-n}$.

Dans la définition d'une transformation naturelle entre foncteurs d'homologie, on n'a pas besoin d'imposer la compatibilité avec la suspension, qui est automatique.

Comme pour l'homologie réduite, il existe une définition de théorie de cohomologie réduite pour le cadre stable.

Définition 12.2.3. Une théorie de cohomologie réduite sur la catégorie $\mathcal{S}\mathcal{H}$ est un foncteur $L^0 : \mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{A}b$ tel que, pour toute suite cofibre $A \rightarrow B \rightarrow C$ de la catégorie $\mathcal{S}\mathcal{H}$, la suite

$$L^0(C) \rightarrow L^0(B) \rightarrow L^0(A)$$

est exacte. La théorie est additive si, pour toute famille $\{X_i | i \in \mathcal{I}\}$ de spectres, il existe un isomorphisme canonique

$$L^0(\bigvee_{\mathcal{I}} X_i) \xrightarrow{\cong} \prod_{\mathcal{I}} L^0(X_i).$$

Une transformation naturelle entre théories de cohomologie réduite K^0, L^0 est une transformation naturelle de foncteurs $\mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{A}b$, $\eta^0 : K^0 \rightarrow L^0$.

Remarque 12.2.4. On étend L^0 canoniquement en un foncteur $L : \mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{A}b^{\text{gr}}$ par $L^n := L^0 \circ \Sigma^{-n}$.

Proposition 12.2.5.

- (1) Soit $K_* : \mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{A}b^{\text{gr}}$ une théorie d'homologie réduite additive définie sur $\mathcal{S}\mathcal{H}$. Alors, la composée $K_* \circ \Sigma^\infty : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathfrak{A}b^{\text{gr}}$ est une théorie d'homologie réduite additive.
- (2) Soit $L^* : \mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{A}b^{\text{gr}}$ une théorie de cohomologie réduite additive définie sur $\mathcal{S}\mathcal{H}$. Alors, la composée $L^* \circ \Sigma^\infty : \mathcal{H}_\bullet^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{A}b^{\text{gr}}$ est une théorie de cohomologie réduite additive.

Démonstration. Exercice. □

Remarque 12.2.6. A priori, la réciproque ne paraît pas évidente; néanmoins, on peut montrer que toute théorie de cohomologie réduite additive $h^* : \mathcal{H}_\bullet^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{A}b^{\text{gr}}$ étend à une théorie de cohomologie réduite additive $\mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{A}b^{\text{gr}}$. Ce fait est une conséquence du théorème de représentabilité de Brown.

12.3. Le télescope (ou hocolim). Il y a une version de la construction du télescope pour les systèmes directs d'espaces topologiques pointés. Pour éviter de la confusion, on utilise la notation hocolim.

Définition 12.3.1. Soit $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots$ un système direct d'espaces topologiques pointés. Le télescope du système direct est l'espace

$$\text{hocolim}(X_\bullet) := \left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} X_n \wedge [n, n+1]_+ \right) / \sim$$

où on identifie $X_n \wedge \{n+1\}_+$ et $X_{n+1} \wedge \{n+1\}_+$, à l'aide du morphisme de structure $X_n \rightarrow X_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 12.3.2. Soit $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \dots$ un système direct d'inclusions fermés d'espaces topologiques pointés. Il existe un morphisme canonique :

$$\text{hocolim}(X_\bullet) \rightarrow \text{colim}(X_\bullet).$$

Proposition 12.3.3. Soit $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \dots$ un système direct d'inclusions de sous CW-complexes pointés et soit X le CW-complexe $\bigcup_n X_n \cong \text{colim} X_n$. Alors, le morphisme

$$\text{hocolim}(X_\bullet) \rightarrow X$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. (Indications.) On vérifie que $\pi_*(X) \cong \text{colim} \pi_*(X_n)$. De même, une application continue d'un espace compact vers $\text{hocolim}(X_n)$ se factorise à travers un sous-espace $(\bigvee_{n=0}^k X_n \wedge [n, n+1]_+) / \sim$, pour $k \gg 0$, qui est homotopiquement équivalent à X_k ; on en déduit que $\pi_*(\text{hocolim}(X_\bullet)) \cong \text{colim} \pi_*(X_n)$ et que le morphisme $\text{hocolim}(X_\bullet) \rightarrow X$ induit en isomorphisme en homotopie.

Pour terminer, on applique le théorème de Whitehead, car $\text{hocolim}(X_\bullet)$ et $\text{colim}(X_\bullet)$ sont des CW-complexes. \square

12.4. Limites inverses dans $\mathcal{A}b$. Un système inverse d'une catégorie \mathcal{C} est un objet de la catégorie $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^{\text{op}}}$; c'est à dire un diagramme de la forme

$$\dots \rightarrow Z_n \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_0.$$

La limite inverse de ce système (s'il existe) est un objet Z de \mathcal{C} muni de morphismes $Z \rightarrow Z_n$, $n \in \mathbb{N}$, tels que

- (1) le triangle

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ \downarrow & \searrow & \\ Z_{n+1} & \longrightarrow & Z_n \end{array}$$

commute, $\forall n \in \mathbb{N}$;

- (2) $\{Z \rightarrow Z_n\}$ est universel pour cette propriété.

Lemme 12.4.1. Soit $\{A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_n} A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un système inverse de groupes abéliens. Alors, il existe un morphisme naturel

$$\Delta_{A_\bullet} : \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

où la composante $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow A_t$ est la différence $p_t - \alpha_t \circ p_{t+1}$, où p_k est la projection sur la k -ième facteur du produit.

Démonstration. Exercice. (Le point important est que le morphisme est fonctoriel.) On n'utilise pas \square

Définition 12.4.2. Soit $\{A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_n} A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un système inverse de groupes abéliens. On définit

- (1) $\lim(A_\bullet) := \ker \Delta_{A_\bullet}$;
 (2) $\lim^1(A_\bullet) := \operatorname{coker} \Delta_{A_\bullet}$.

Proposition 12.4.3. *Les constructions \lim et \lim^1 définissent des foncteurs*

$$\lim, \lim^1 : \mathcal{A}b^{\mathbb{N}^{\text{op}}} \rightarrow \mathcal{A}b.$$

- (1) *Le foncteur \lim est adjoint à droite du foncteur système inverse constant $\mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{A}b^{\mathbb{N}^{\text{op}}}$. En particulier, $\lim(A_\bullet)$ est la limite inverse du système inverse (A_\bullet) .*
 (2) *Le foncteur $\lim : \mathcal{A}b^{\mathbb{N}^{\text{op}}} \rightarrow \mathcal{A}b$ est exact à gauche et admet des foncteurs dérivés à droite :*

$$\mathbb{R}^n \lim = \begin{cases} \lim & n = 0 \\ \lim^1 & n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Exercice. (Observer que le Lemme 12.4.1 entraîne que \lim et \lim^1 sont des foncteurs.) \square

12.5. Suites exactes de Milnor. Les suites exactes de Milnor fournissent un outil indispensable.

Théorème 12.5.1. *Soit $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots$ un système direct d'espaces topologiques pointés et soit T le télescope $\operatorname{hocolim}(X_\bullet)$.*

- (1) *Si $h_* : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathcal{A}b^{\text{gr}}$ est une théorie d'homologie réduite additive, alors il existe un isomorphisme naturel*

$$h_*(T) \cong \operatorname{colim}_{n \rightarrow \infty} h_*(X_n).$$

- (2) *Si $k^* : \mathcal{H}_\bullet^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}b^{\text{gr}}$ est une théorie de cohomologie réduite additive, alors il existe une suite exacte courte naturelle :*

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow n} k^{t-1}(X_n) \rightarrow k^t(T) \rightarrow \lim_{\leftarrow n} k^t(X_n) \rightarrow 0.$$

Démonstration. On peut supposer que les X_n sont des CW-complexes pointés et que les morphismes sont cellulaires, donc T est un CW-complexe. Il existe deux sous-complexes pointés, $T_1 := \bigvee_{s \in \mathbb{N}} X_{2s+1} \wedge [2s+1, 2s+2]_+$, $T_2 := \bigvee_{s \in \mathbb{N}} X_{2s} \wedge [2s, 2s+1]_+$, tels que $T_1 \simeq \bigvee_{s \geq 0} X_{2s+1}$, $T_2 \simeq \bigvee_{s \geq 0} X_{2s}$ et $T_1 \cap T_2 \simeq \bigvee_{s \geq 1} X_s$.

Dans les deux cas, le résultat découle de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris. En homologie, Proposition 12.1.4 fournit la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow h_n(T_1 \cap T_2) \rightarrow h_n(T_1) \oplus h_n(T_2) \rightarrow h_n(T) \rightarrow h_{n-1}(T_1 \cap T_2) \rightarrow \dots$$

qui s'identifie (par l'additivité de h_*) à la suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} h_n(X_s) \rightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} (h_n(X_{2s+1}) \oplus h_n(X_{2s})) \rightarrow h_n(T) \rightarrow \dots,$$

qui s'écrit comme :

$$\dots \rightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} h_n(X_s) \rightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} h_n(X_s) \rightarrow h_n(T) \rightarrow \dots$$

Par la construction de la suite exacte de Mayer-Vietoris, on identifie le morphisme $\bigoplus_{s \in \mathbb{N}} h_n(X_s) \rightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} h_n(X_s)$ comme le morphisme induit par

$$\{h_n(X_t) \rightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} h_n(X_s) \mid t \in \mathbb{N}\},$$

la différence entre l'inclusion i_t et la composée, $i_{t+1} \circ \delta_t$, où $\delta_t : h_n(X_t) \rightarrow h_n(X_{t+1})$ est induit par le morphisme de structure du système direct.

Alors, ce morphisme est injectif (exercice!) et son conoyau est isomorphe à $\operatorname{colim} h_n(X_\bullet)$, par construction. Mais, par la suite exacte longue en homologie, son conoyau est $h_n(T)$. Enfin, toutes ces constructions sont naturelles.

La démonstration en cohomologie est similaire, utilisant Proposition 12.1.5, et en faisant appel à l'identification explicite de \lim et de \lim^1 donné par la Proposition 12.4.3. (Exercice.) \square

Corollaire 12.5.2. Soit $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$ un système direct de sous CW-complexes et soit $X := \bigcup_n X_n$. Alors

- (1) Si $h_* : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ est une théorie d'homologie réduite additive, alors il existe un isomorphisme naturel

$$h_*(X) \cong \text{colim}_{n \rightarrow \infty} h_*(X_n).$$

- (2) Si $k^* : \mathcal{H}_\bullet^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ est une théorie de cohomologie réduite additive, alors il existe une suite exacte courte naturelle :

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow n}^1 k^{t-1}(X_n) \rightarrow k^t(X) \rightarrow \lim_{\leftarrow n} k^t(X_n) \rightarrow 0.$$

Démonstration. Par la Proposition 12.3.3, le morphisme canonique $\text{hocolim}(X_\bullet) \rightarrow X$ est une équivalence d'homotopie. \square

Corollaire 12.5.3.

- (1) Soit $\eta_* : h_* \rightarrow k_*$ une transformation naturelle entre deux théories d'homologie réduite additives $\mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$. Alors, η_* est une équivalence naturelle si et seulement si $\eta_*(S^0) : h_*(S^0) \rightarrow k_*(S^0)$ est un isomorphisme de groupes abéliens gradués.
- (2) Soit $\eta^* : h^* \rightarrow k^*$ une transformation naturelle entre deux théories d'homologie réduite additives $\mathcal{H}_\bullet^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$. Alors, η^* est une équivalence naturelle si et seulement si $\eta^*(S^0) : h^*(S^0) \rightarrow k^*(S^0)$ est un isomorphisme de groupes abéliens gradués.

Démonstration. L'implication \Rightarrow est évidente, donc il suffit d'établir la réciproque. Dans les deux cas, il suffit de montrer que l'hypothèse entraîne que, pour tout CW-complexe X pointé, $\eta_*(X)$ (respectivement $\eta^*(X)$) est un isomorphisme.

Une récurrence sur le nombre de cellules, en utilisant l'isomorphisme de suspension, l'exactitude et le lemme des cinq démontre le résultat pour X un complexe fini. Plus généralement, cet argument permet de conclure lorsque X est un complexe de dimension finie (on utilise l'hypothèse d'additivité et la filtration cellulaire).

Pour démontrer le cas général, on utilise la filtration cellulaire de X . En homologie, le résultat découle du passage à la colimite. En cohomologie, on utilise la suite exacte de Milnor du Corollaire 12.5.2, qui est naturelle ; le résultat découle du lemme des cinq. \square

Il existe une version stable du Corollaire 12.5.2 pour les CW-spectres.

Théorème 12.5.4. Soit $E[0] \subset E[1] \subset E[2] \subset \dots$ un système direct d'inclusions de sous CW-spectres et soit E le CW-spectre $\bigcup E[n]$.

- (1) Si $h_* : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ est une théorie d'homologie réduite additive, alors il existe un isomorphisme naturel

$$h_*(E) \cong \text{colim}_{n \rightarrow \infty} h_*(E[n]).$$

- (2) Si $k^* : \mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ est une théorie de cohomologie réduite additive, alors il existe une suite exacte courte naturelle :

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow n}^1 k^{t-1}(E[n]) \rightarrow k^t(E) \rightarrow \lim_{\leftarrow n} k^t(E[n]) \rightarrow 0.$$

Démonstration. L'idée de la démonstration est la même que pour celle du théorème 12.5.1. Voir [Rud98, Theorem III.3.4], par exemple. \square

Il y a une variante stable du Corollaire 12.5.3.

Corollaire 12.5.5.

- (1) Soit $\eta_0 : K_0 \rightarrow L_0$ une transformation naturelle entre deux théories d'homologie réduite additives $\mathcal{SH} \rightarrow \mathfrak{Ab}$. Alors, η_0 est une équivalence naturelle si et seulement si $\eta_0(S^n) : K_0(S^n) \rightarrow L_0(S^n)$ est un isomorphisme de groupes abéliens, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
- (2) Soit $\eta^0 : K^0 \rightarrow L^0$ une transformation naturelle entre deux théories de cohomologie réduite additives $\mathcal{SH}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}$. Alors, η^0 est une équivalence naturelle si et seulement si $\eta^0(S^n) : K^0(S^n) \rightarrow L^0(S^n)$ est un isomorphisme de groupes abéliens, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Rappel (voir Section 7.5) que les spectres partiels induisent une filtration d'un spectre E :

$$\Sigma E_0 \subset E_{\leq 1} \subset E_{\leq 2} \subset \dots \subset E$$

telle que $E = \text{colim} E_{\leq m}$, par la Proposition 7.5.2. En plus, pour $m \in \mathbb{N}$, il existe une transformation naturelle $\Sigma^\infty E[-m] \rightarrow E_{\leq m}$ qui est une équivalence d'homotopie stable.

À l'aide du Théorème 12.5.4, on déduit que, pour démontrer le résultat, il suffit de montrer que les transformations naturelles sont des isomorphismes sur les spectres de suspension. Ce résultat est conséquence du Corollaire 12.5.3. \square

Remarque 12.5.6. La démonstration du Corollaire 12.5.5 montre que les sphères $S^n \in \text{Ob} \mathcal{SH}$ ($n \in \mathbb{Z}$) engendrent la catégorie d'homotopie stable.

12.6. La théorie d'homologie associée à un spectre. La définition suivante correspond à une théorie d'homologie réduite.

Définition 12.6.1. Soit $E \in \text{Ob} \mathcal{SH}$ un spectre. La théorie d'homologie associée à E est le foncteur

$$E_* : \mathcal{SH} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$$

défini par

$$E_n(F) := [S^n, E \wedge F].$$

Par restriction le long du foncteur $\Sigma^\infty : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathcal{SH}$, on obtient une théorie d'homologie :

$$E_* : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$$

$E_n(X) := [S^n, E \wedge \Sigma^\infty X]$, pour X un CW-complexe pointé.

Lemme 12.6.2. Soit $E \in \text{Ob} \mathcal{SH}$ un spectre et $A \rightarrow B \rightarrow C$ une suite cofibre de \mathcal{SH} . Alors, il existe une suite exacte longue en homologie

$$\dots \rightarrow E_n(A) \rightarrow E_n(B) \rightarrow E_n(C) \rightarrow E_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

Démonstration. Conséquence de la Proposition 10.3.14 et de la Proposition 11.2.2. \square

Proposition 12.6.3. Soit E un spectre. Alors le foncteur $E_* : \mathcal{SH} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ est une théorie d'homologie réduite additive.

Démonstration. Exercice. \square

Remarque 12.6.4. La théorie d'homologie associée au spectre S est l'homotopie stable $\pi_*(-)$.

Le résultat suivant montre qu'on peut calculer l'homologie d'un spectre en termes de l'homologie des espaces du spectre.

Théorème 12.6.5. Soient $E, F \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}$ deux spectres et $n \in \mathbb{Z}$ un entier. Alors il existe un isomorphisme

$$E_n(F) \cong \text{colim}_{t \rightarrow \infty} E_{n+t}(F_t).$$

Démonstration. (Cf. [Rud98, Theorem III.4.21].) Le résultat est une conséquence du Théorème 12.5.4, en utilisant la filtration de la Proposition 7.5.2, comme dans la démonstration du Corollaire 12.5.5. \square

12.7. La théorie de cohomologie associée à un spectre.

Définition 12.7.1. Soit $E \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}$ un spectre. La théorie de cohomologie associée

$$E^* : \mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$$

est définie par $E^n(F) := [F, E[n]]$.

Par restriction le long du foncteur Σ^∞ on obtient

$$E^* : \mathcal{H}_\bullet^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}},$$

$$E^n(X) := [\Sigma^\infty X, E[n]].$$

Lemme 12.7.2. Soit $E \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}$ un spectre et $A \rightarrow B \rightarrow C$ une suite cofibre de $\mathcal{S}\mathcal{H}$. Alors, il existe une suite exacte longue en cohomologie induite :

$$\dots \rightarrow E^n(C) \rightarrow E^n(B) \rightarrow E^n(A) \rightarrow E^{n+1}(C) \rightarrow \dots$$

Démonstration. Conséquence du Lemme 10.3.11. \square

Proposition 12.7.3. Soit $E \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}$ un spectre. Alors le foncteur $E^* : \mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ est une théorie de cohomologie réduite additive.

Démonstration. Exercice. \square

Remarque 12.7.4. La théorie de cohomologie associée au spectre S est la cohomotopie, $\pi^* : \mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$.

Théorème 12.7.5. Soient $E, F \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}$ deux spectres et $n \in \mathbb{Z}$ un entier. Alors, il existe une suite exacte courte de groupes abéliens

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow k}^1 E^{k+n-1}(F_k) \rightarrow E^n(F) \rightarrow \lim_{\leftarrow k} E^{k+n}(F_k) \rightarrow 0$$

Démonstration. (Cf. [Rud98, Theorem III.4.21].) La démonstration est analogue à celle du Théorème 12.6.5. \square

12.8. Représentabilité (stable). Soit $Z \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}$ un spectre. Alors le foncteur représentable $[-, Z] : \mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}$ est une théorie de cohomologie réduite additive. On a le lemme de Yoneda dans le cadre additif :

Lemme 12.8.1. Soit $Z \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}$ un spectre et soit $f : \mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}$ un foncteur additif (le morphisme canonique $f(X_1 \vee X_2) \rightarrow f(X_1) \oplus f(X_2)$ est un isomorphisme). Alors, il existe un isomorphisme naturel

$$\text{Nat}([- , Z], f) \cong f(Z)$$

entre les transformations naturelles de foncteurs à valeurs dans les groupes abéliens et le groupe abélien $f(Z)$.

Démonstration. Une transformation naturelle $\eta : [-, Z] \rightarrow f$ fournit l'élément $\eta_Z(1_Z) \in f(Z)$. Réciproquement, un élément $\iota \in f(Z)$ définit une transformation naturelle de foncteurs à valeurs dans les ensembles, par $g \in [X, Z] \mapsto f(g)(\iota)$. Il reste à vérifier que la transformation naturelle est additive.

L'hypothèse que f soit additive entraîne que la codiagonale $Z \vee Z \rightarrow Z$ induit l'inclusion diagonale $f(Z) \rightarrow f(Z) \oplus f(Z)$ et que la diagonale $X \rightarrow X \vee X$ induit la codiagonale $f(X) \oplus f(X) \rightarrow f(X)$. (Exercice : vérifier ces affirmations.)

Soit $f, g : X \rightrightarrows Z$ deux morphismes, alors la somme $f + g$ est représentée par la composée :

$$X \rightarrow X \vee X \xrightarrow{f \vee g} Z \vee Z \rightarrow Z.$$

En appliquant le foncteur f , on obtient la composée suivante :

$$f(Z) \rightarrow f(Z) \oplus f(Z) \xrightarrow{f(f) \oplus f(g)} f(X) \oplus f(X) \rightarrow f(X)$$

dans la catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens. Ceci est précisément la somme $f(f) + f(g)$, ce qui montre que la transformation naturelle est additive (exercice : vérifier cette affirmation). \square

Définition 12.8.2. Une théorie de cohomologie réduite $L^0 : \mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}b$ est représentable s'il existe un spectre $Z_L \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}$ et un isomorphisme naturel $[-, Z_L] \xrightarrow{\cong} L^0(-)$.

Remarque 12.8.3. Toute théorie de cohomologie représentable est additive.

Proposition 12.8.4. Soit $K^0, L^0 : \mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}b$ deux théories de cohomologie représentables, représentées respectivement par spectres Z_K et Z_L . Alors

- (1) il existe un isomorphisme entre l'ensemble des transformations naturelles $K^0 \rightarrow L^0$ de théories de cohomologie réduites et $[Z_K, Z_L]$;
- (2) l'objet Z_K qui représente K^0 est unique à isomorphisme (non-canonique) près.

Démonstration. Exercice. \square

Le résultat suivant est une version stable du Théorème de représentabilité de Brown.

Théorème 12.8.5. Soit $L^0 : \mathcal{S}\mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}b$ une théorie de cohomologie réduite additive. Alors L^0 est représentable.

Démonstration. On construit par récurrence une suite de CW-spectres $\{E[n] | n \in \mathbb{N}\}$, munie d'éléments $\iota_n \in L^0(E[n])$ (donc ι_n définit une transformation naturelle $[-, E[n]] \rightarrow L^0(-)$) et inclusions $\phi_n : E[n] \hookrightarrow E[n+1]$ de CW-spectres, $\forall n \in \mathbb{N}$, tels que :

- (1) $\forall r \in \mathbb{Z}$, la transformation $\iota_0(S^r) : [S^r, E[0]] \rightarrow L^0(S^r)$ est surjective ;
- (2) $\phi_n^*(\iota_{n+1}) = \iota_n \in L^0(E[n])$, et donc, $\forall r \in \mathbb{Z}$, la transformation $\iota_n(S^r) : [S^r, E[0]] \rightarrow L^0(S^r)$ est surjective ;
- (3) $\ker(\iota_n(S^r) : [S^r, E[n]] \rightarrow L^0(S^r)) \subset \ker((\phi_n)_* : [S^r, E[n]] \rightarrow [S^r, E[n+1]])$.

La deuxième condition correspond à un diagramme commutatif de transformations naturelles :

$$\begin{array}{ccc} [-, E[n]] & & \\ \downarrow (\phi_n)_* & \searrow \iota_n & \\ & & L^0(-) \\ & \nearrow \iota_{n+1} & \\ [-, E[n+1]] & & \end{array}$$

On pose $E[0] := \bigvee_{r \in \mathbb{Z}} \bigvee_{\alpha \in L^0(S^r)} S^r$; en utilisant l'hypothèse que L^0 est additive, il existe un élément canonique $\iota_0 \in L^0(E[0])$. Par construction, la transformation naturelle ι_0 induit une surjection $\iota_0(S^r), \forall r \in \mathbb{Z}$.

Pour l'étape de récurrence, soit κ_r le noyau de $\iota_n(S^r) : [S^r, E[n]] \rightarrow L^0(S^r)$. Il existe un morphisme évident

$$\bigvee_{r \in \mathbb{Z}} \bigvee_{\beta \in \kappa_r} S^r \rightarrow E[n]$$

dans la catégorie \mathcal{SH} . On peut supposer que ce morphisme est représenté par un morphisme cellulaire de CW-spectres, et on prend pour $E[n+1]$ la cofibre homotopique du morphisme. Donc $E[n+1]$ est un CW-spectre et il existe une suite cofibre

$$\bigvee_{r \in \mathbb{Z}} \bigvee_{\beta \in \kappa_r} S^r \rightarrow E[n] \xrightarrow{\phi_n} E[n+1]$$

dans \mathcal{SH} , où ϕ_n est représenté par l'inclusion d'un sous CW-spectre. La suite cofibre induit une suite exacte

$$L^0(E[n+1]) \rightarrow L^0(E[n]) \rightarrow L^0\left(\bigvee_{r \in \mathbb{Z}} \bigvee_{\beta \in \kappa_r} S^r\right).$$

Par construction, l'image de $\iota_n \in L^0(E[n])$ dans $L^0(\bigvee_{r \in \mathbb{Z}} \bigvee_{\beta \in \kappa_r} S^r)$ est zéro, donc il existe $\iota_{n+1} \in L^0(E[n+1])$ qui relève ι_n . Également par construction, on a que le noyau de $\iota_n(S^r)$ est contenu dans le noyau de $(\phi_n)_* : [S^r, E[n]] \rightarrow [S^r, E[n+1]]$, car on a rattaché des cellules pour tuer ce noyau.

On pose $E := \bigcup E[n]$, donc E est un CW-spectre. La suite exacte de Milnor, Théorème 12.5.4, montre que le système des éléments ι_n définit un élément $\iota \in L^0(E)$, puisque $L^0(E) \rightarrow \lim_{\leftarrow} L^0(E[n])$ est surjectif.

Il existe un isomorphisme $[S^r, E] \cong \text{colim}[S^r, E[n]]$, donc les surjections $\iota_n(S^r) : [S^r, E[n]] \rightarrow L^0(S^r)$ induisent une surjection $\iota(S^r) : [S^r, E] \rightarrow L^0(S^r)$. Il reste à montrer que le morphisme $\iota(S^r)$ est injectif. Un élément du noyau est représenté par un élément $\kappa \in [S^r, E[n]]$, pour $n \gg 0$. Par construction, cet élément devient zéro dans $[S^r, E[n+1]]$.

On a construit une transformation naturelle $\iota : [-, E] \rightarrow L^0(-)$ qui est un isomorphisme sur les spectres S^r , donc est une équivalence naturelle, par le Corollaire 12.5.5. \square

Remarque 12.8.6. Il existe une version instable (plus générale) du théorème de représentabilité de Brown ; voir [Swi02, Chapter 9], par exemple. Il existe une autre approche à la démonstration du Théorème 12.8.5 qui construit un Ω -spectre qui représente la théorie de cohomologie (Cf. [Sel97, Theorem 13.4.2].)

12.9. Théories d'homologie et de cohomologie non-réduites. Rappeler que le rajout d'un point de base disjoint induit un foncteur

$$(-)_+ : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\bullet.$$

En particulier, une théorie d'homologie réduite $E_* : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ induit une théorie d'homologie non-réduite :

$$\begin{aligned} E_* & : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}} \\ X & \mapsto E_*(X_+). \end{aligned}$$

De même, une théorie de cohomologie réduite $E^* : \mathcal{H}_\bullet^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ induit une théorie d'homologie non-réduite :

$$\begin{aligned} E^* & : \mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}} \\ X & \mapsto E^*(X_+). \end{aligned}$$

Exercice 12.9.1. Préciser les axiomes d'une théorie d'homologie (resp. cohomologie) non-réduite.

13. Ω -SPECTRES -----*

13.1. Définitions et premiers résultats.

Définition 13.1.1. Un spectre $E \in \text{Ob } \mathcal{S}p$ est un Ω -spectre si tous les morphismes de structure $\tilde{\sigma}_n^E : E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$ sont des équivalences faibles (induisent des isomorphismes en groupes d'homotopie).

Remarque 13.1.2. Soit X un CW-complexe pointé ; alors, par Milnor, l'espace de lacets ΩX a le type d'homotopie d'un CW-complexe pointé. Donc, si E est un CW-spectre, alors E est un Ω -spectre si et seulement si $\tilde{\sigma}_n^E : E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$ est une équivalence d'homotopie, quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Noter que, pour plusieurs auteurs, un Ω -spectre est un spectre tel que tous les morphismes de structure $\tilde{\sigma}_n^E : E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$ sont des équivalences d'homotopie. Pour les CW-spectres, il n'y a pas d'ambiguïté.

Lemme 13.1.3. Soit E un Ω -spectre, alors le morphisme de structure σ_n^E induit un isomorphisme naturel $\pi_*(E_n) \xrightarrow{\cong} \pi_{*+1}(E_{n+1})$, quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, il existe des isomorphismes naturels :

$$\pi_s(E) \cong \begin{cases} \pi_s(E_0) & s \geq 0 \\ \pi_0(E_{-s}) & s < 0. \end{cases}$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 13.1.4. Soient E, F deux Ω -spectres et $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres. Alors le morphisme f est une équivalence d'homotopie stable si et seulement si f est une équivalence d'homotopie stricte ($\pi_*(E_n) \rightarrow \pi_*(F_n)$ est un isomorphisme, quelque soit $n \in \mathbb{N}$).

Démonstration. Les isomorphismes du Lemme 13.1.3 sont naturels. □

Proposition 13.1.5. Soient $g : E \rightarrow E'$ une équivalence stricte entre deux spectres. Alors, E est un Ω -spectre si et seulement si E' est un Ω -spectre.

Démonstration. Soit n un nombre naturel ; g est un morphisme de spectres, donc on dispose du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_n^E} & \Omega E_{n+1} \\ g_n \downarrow & & \downarrow \Omega g_{n+1} \\ E'_n & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_n^{E'}} & \Omega E'_{n+1} \end{array}$$

Par l'hypothèse sur g , les morphismes g_n et Ωg_{n+1} sont des équivalences faibles, d'où le résultat. □

Remarque 13.1.6.

- (1) On a utilisé le fait que le foncteur Ω préserve les équivalences faibles entre espaces topologiques pointés. Dans des situations plus générales, il faut utiliser la définition de l'espace de lacets qui passe à la catégorie homotopique (essentiellement le foncteur dérivé à droite, à la Quillen).
- (2) Si on utilise la définition plus forte de Ω -spectre (les équivalences sont des équivalences d'homotopie), il faut exiger que chaque g_n est une équivalence d'homotopie.

Théorème 13.1.7. Soit E un spectre. Il existe un Ω -spectre E' et une équivalence d'homotopie stable $E \rightarrow E'$.

Démonstration. (Indications) Soit n un nombre naturel ; les morphismes de structure $\tilde{\sigma}^E$ fournissent un système direct d'espaces topologiques pointés :

$$E_n \rightarrow \Omega E_{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^t E_{n+t} \rightarrow \dots$$

où $\Omega^t E_{n+t} \rightarrow \Omega^{t+1} E_{n+t+1}$ est le morphisme $\Omega^t \tilde{\sigma}_n^E$.

On définit $E'_n := \text{hocolim} \Omega^t E_{n+t}$; par construction (et la functorialité du foncteur télescope), les morphismes de structure du spectre E induisent les morphismes de structure $\tilde{\sigma}_n^{E'} : E'_n \rightarrow \Omega E'_{n+1}$, donc E' est un spectre ; de même, les morphismes de structure du spectre E induisent le morphisme de spectres $E \rightarrow E'$.

Il reste à vérifier les deux points suivants :

- (1) le spectre E' est un Ω -spectre ;
- (2) le morphisme $E \rightarrow E'$ est une équivalence d'homotopie stable.

(Exercice.) □

Remarque 13.1.8. Si on souhaite travailler dans la catégorie des CW-spectres, il faut modifier cette construction (voir par exemple [Rud98, Proposition II.1.21]). Soit E un CW-spectre, alors quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on peut construire un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} E_n & \hookrightarrow & \overline{\Omega E_{n+1}} & \hookrightarrow & \overline{\Omega^2 E_{n+1}} & \hookrightarrow & \overline{\Omega^3 E_{n+1}} \hookrightarrow \dots \\ \downarrow = & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ E_n & \longrightarrow & \Omega E_{n+1} & \longrightarrow & \Omega^2 E_{n+2} & \longrightarrow & \Omega^3 E_{n+3} \longrightarrow \dots \end{array}$$

dont les morphismes de la ligne supérieure sont des inclusions de sous CW-complexes et les morphismes verticaux sont des équivalences faibles, donc des équivalences d'homotopie, puisque chaque $\overline{\Omega^k E_{n+k}}$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe.

On définit $E''_n := \text{hocolim} \overline{\Omega^k E_{n+k}}$, de telle sorte que E''_n est un CW-complexe. Il reste à définir des morphismes de structure. Soit $k \in \mathbb{N}$ un nombre naturel, alors on a la composée :

$$\overline{\Omega^k E_{n+k}} \rightarrow \Omega^k E_{n+k} \xrightarrow{\Omega^k \tilde{\sigma}_n^{E''}} \Omega^{k+1} E_{n+k+1} \xrightarrow{\Omega \beta} \overline{\Omega \Omega^k E_{n+k+1}},$$

où β est une inverse à homotopie près de $\overline{\Omega^k E_{n+k+1}} \rightarrow \Omega^k E_{n+k+1}$. Ces morphismes induisent un morphisme

$$E''_n = \text{hocolim} \overline{\Omega^k E_{n+k}} \rightarrow \text{hocolim} (\overline{\Omega \Omega^k E_{n+k+1}}).$$

(Noter qu'il faut utiliser le foncteur télescope, car ces morphismes pour $k \in \mathbb{N}$ ne sont compatibles qu'à homotopie près.)

Enfin, il y a un morphisme $\text{hocolim} (\overline{\Omega \Omega^k E_{n+k+1}}) \rightarrow \Omega \text{hocolim} (\overline{\Omega^k E_{n+k+1}}) = \Omega E''_{n+1}$ (en général, il existe une transformation naturelle $\mathfrak{T}\epsilon! \circ \Omega \rightarrow \Omega \circ \mathfrak{T}\epsilon!$) qui fournit le morphisme de structure $E''_n \rightarrow \Omega E''_{n+1}$.

Par construction, E'' est un CW Ω -spectre et il y a un morphisme $E \rightarrow E''$ qui est une équivalence d'homotopie stable.

Ces indications démontrent le résultat suivant.

Corollaire 13.1.9. *Soit E un CW-spectre. Alors, il existe un CW Ω -spectre \tilde{E} et une équivalence d'homotopie stable $E \rightarrow \tilde{E}$.*

13.2. Le foncteur Ev_0^Ω . Le foncteur $\Sigma^\infty : \mathcal{T}_\bullet \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{p}$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'évaluation $\text{Ev}_0^\Omega : \mathcal{S}\mathcal{p} \rightarrow \mathcal{T}_\bullet$, $E \mapsto E_0$, et le foncteur Σ^∞ induit un foncteur $\Sigma^\infty : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}$. Le foncteur Ev_0^Ω n'induit pas directement un foncteur $\mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\bullet$, car il n'envoie pas les équivalences d'homotopie stable à des équivalences faibles en général. Par contre, le foncteur Ev_0^Ω envoie une équivalence d'homotopie stricte à une équivalence faible.

Lemme 13.2.1. Soit E un CW-spectre. La transformation naturelle $\Sigma^\infty E_0 \rightarrow E$ induit une transformation naturelle

$$\eta_X : [X, E_0]_{\mathcal{H}_\bullet} \rightarrow [\Sigma^\infty X, E]_{\mathcal{H}}$$

de foncteurs $\mathcal{H}_\bullet^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{E}ns_\bullet$, où $\mathcal{E}ns_\bullet$ est la catégorie des ensembles pointés.

Si E est un Ω -spectre, alors quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\eta_{S^n} : \pi_n(E_0) \rightarrow \pi_n(E)$ induit l'isomorphisme du Lemme 13.1.3

Démonstration. Le premier point est évident. Pour le deuxième point, il faut utiliser l'identification $\pi_n(E) \cong [S^n, E]_{\mathcal{H}}$ du Corollaire 8.7.5 \square

Théorème 13.2.2. Le foncteur $\Sigma^\infty : \mathcal{H}_\bullet \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}$ admet un adjoint à droite

$$\Omega^\infty : \mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\bullet.$$

Démonstration. (Indications) Théorème 13.1.7 fournit une construction fonctorielle d'un Ω -spectre \tilde{E} associé à un CW-spectre E . On définit $\Omega^\infty E := \tilde{E}_0$. (Le spectre \tilde{E} n'est pas un CW-spectre; cependant \tilde{E}_0 a le type d'homotopie d'un CW-complexe.) On peut montrer que cette définition fournit un foncteur

$$\Omega^\infty : \mathcal{S}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\bullet.$$

Il reste à montrer que le foncteur $X \mapsto [\Sigma^\infty X, E]_{\mathcal{H}}$ est naturellement équivalent au foncteur $X \mapsto [X, \Omega^\infty E]_{\mathcal{H}_\bullet}$. On vérifie que tous les deux correspondent à la partie de degré zéro d'une théorie de cohomologie réduite additive, de telle sorte que le morphisme fourni par le Lemme 13.2.1 est la partie de degré zéro d'une transformation naturelle entre théories de cohomologie.

Donc, pour démontrer le résultat, par le Corollaire 12.5.3, il suffit d'établir que la transformation naturelle soit un isomorphisme sur les sphères S^n , $n \in \mathbb{N}$. Ceci est une conséquence du Lemme 13.2.1. \square

14. TOURS DE POSTNIKOV

14.1. Spectres connexes.

Définition 14.1.1. Soient E un spectre et $n \in \mathbb{Z}$ un entier.

- (1) E est n -connexe si $\pi_i(E) = 0, \forall i \leq n$.
- (2) E est connexe s'il est (-1) -connexe.

Exemple 14.1.2. Les spectres suivants sont connexes :

- (1) S ;
- (2) $\Sigma^\infty X$, pour tout CW-complexe pointé X ;
- (3) $\mathbf{H}A$, A un groupe abélien;
- (4) MU .

Les spectres suivants ne sont pas connexes :

- (1) $\Sigma^{-1}S$;
- (2) KU ;
- (3) Plus généralement, si E est un spectre périodique (il existe un entier d tel que $\Sigma^d E \cong E$) alors E est connexe si et seulement si $E = 0$.

Définition 14.1.3. Soient

- (1) $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\geq 0} \subset \mathcal{S}\mathcal{H}$ la sous-catégorie pleine des spectres connexes;
- (2) $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\leq 0} \subset \mathcal{S}\mathcal{H}$ la sous-catégorie pleine des spectres E tel que $\pi_i(E) = 0 \forall i > 0$. (On pourrait parler de spectres coconnexes.)

Proposition 14.1.4. Soit $m, d \in \mathbb{Z}$ deux entiers.

- (1) Soit E un spectre m -connexe. Alors $\Sigma^d E$ est un spectre $m + d$ -connexe. En particulier, la sous catégorie $\mathcal{S}\mathcal{H}_{\geq 0}$ est stable par la suspension, Σ , qui induit un foncteur $\Sigma : \mathcal{S}\mathcal{H}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}_{\geq 0}$.
- (2) Le foncteur désuspension induit un foncteur $\Sigma^{-1} : \mathcal{S}\mathcal{H}_{\leq 0} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}_{\leq 0}$.
- (3) Soient $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ une suite cofibre alors :
 - (a) si X et Y sont m -connexes, alors Z est m -connexe;
 - (b) si X et Z sont m -connexes, alors Y est m -connexe.

Démonstration. Exercice. □

Lemme 14.1.5. Soit $E \in \mathcal{S}\mathcal{H}_{\geq 0}$ un spectre connexe. Alors, il existe un système direct d'inclusions de sous CW-spectres :

$$0 = E_{-1} \subset E_0 \subset E_1 \subset \dots$$

muni de morphismes $\phi_n : E_n \rightarrow E$ tel que

- (1) $\forall n \in \mathbb{N}, \phi_n|_{E_{n-1}} = \phi_{n-1}$;
- (2) $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe une suite cofibre de la forme :

$$\bigvee S^{n-1} \rightarrow E_{n-1} \rightarrow E_n;$$

- (3) le morphisme induit par les $\phi_n, \phi : \bigcup_n E_n \rightarrow E$ est un isomorphisme dans $\mathcal{S}\mathcal{H}$.

Démonstration. On construit les spectres E_n et les morphismes ϕ_n par récurrence afin que $\pi_i(\phi_n)$ est un isomorphisme pour $i < n$ et est surjectif pour $i = n$. Pour démarrer la récurrence, on prend $E_{-1} = 0$.

Pour l'étape de récurrence, soit K_n le noyau de la surjection $\pi_n(\phi_n) : \pi_n(E_n) \rightarrow \pi_n(E)$. Pour $k \in K_n$, on choisit un morphisme cellulaire de spectres $f_k : S^n \rightarrow E_n$ qui représente k dans $\mathcal{S}\mathcal{H}$. On définit E'_{n+1} la cofibre du morphisme

$$\bigvee_{k \in K_n} S^n \xrightarrow{f_k} E_n$$

induit par les morphismes E_n . Par construction, le morphisme ϕ_n se factorise à travers un morphisme $\phi'_{n+1} : E'_{n+1} \rightarrow E$ et le morphisme $\pi_*(\phi'_{n+1})$ est un isomorphisme pour $i \leq n$.

Pour terminer l'étape de récurrence, on rajoute des cellules afin d'obtenir une surjection : on pose

$$E_{n+1} := E'_{n+1} \vee \bigvee_{\lambda \in \pi_{n+1}(E)} S^{n+1}$$

muni du morphisme $\phi_{n+1} : E_{n+1} \rightarrow E$ induit par ϕ'_{n+1} et des représentants $S^{n+1} \rightarrow E$ des classes d'homotopie $\lambda \in \pi_{n+1}(E)$. On peut vérifier que (E_{n+1}, ϕ_{n+1}) satisfait l'hypothèse de récurrence. \square

Remarque 14.1.6. Ce résultat devrait être démontré sans faire intervenir la catégorie des spectres sous-jacents. En particulier, on peut éviter le choix d'un représentant cellulaire f_k , car k est un morphisme de $\mathcal{S}\mathcal{H}$. Les CW-spectres apparaissent simplement afin de pouvoir définir $\bigcup E_n$. Cette construction peut être remplacée par la colimite homotopique. (Voir la définition suivante.)

Définition 14.1.7. Soit $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots$ un système direct de la catégorie $\mathcal{S}\mathcal{H}$, muni de morphismes de structure $g_n : X_n \rightarrow X_{n+1}$. La colimite homotopique $\text{hocolim}(X_\bullet)$ de ce système direct est la cofibre du morphisme

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

qui est induit par $i_n - i_{n+1} \circ g_n : X_n \rightarrow \bigvee X_n$, où i_n est l'inclusion du n -ième facteur.

Proposition 14.1.8. Soient $E \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}_{\geq 0}$ un spectre connexe et F un spectre tel que $\pi_i(F) = 0, \forall i \geq 0$. Alors $[E, F] = 0$.

Démonstration. Il faut montrer que $[E, F] = F^0(E) = 0$.

Par le Lemme 14.1.5, on peut supposer que E est la colimite homotopique d'un système direct

$$0 = E_{-1} \subset E_0 \subset E_1 \subset \dots$$

qui correspond à une filtration cellulaire.

La suite exacte de Milnor donne une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \lim^1 \{F^{-1}(E_n)\} \rightarrow F^0(E) \rightarrow \lim F^0(E_n) \rightarrow 0,$$

donc il suffit de montrer que chaque groupe $F^0(E_n)$ et $F^{-1}(E_n)$ est trivial. La démonstration est par récurrence sur n . L'hypothèse sur F entraîne que, $\forall j \geq 0$:

$$F^0(\bigvee S^j) = 0 = F^{-1}(\bigvee S^j).$$

La suite cofibre

$$\bigvee S^n \rightarrow E_n \rightarrow E_{n+1}$$

induit une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow F^{a-1}(\bigvee S^n) \rightarrow F^a(E_{n+1}) \rightarrow F^a(E_n) \rightarrow F^a(\bigvee S^n) \rightarrow \dots$$

Si $F^0(E_n) = 0 = F^{-1}(E_n)$, alors la suite exacte montre que $F^0(E_{n+1}) = 0 = F^{-1}(E_{n+1})$. \square

Lemme 14.1.9. Soient E un spectre m -connexe et F un spectre n -connexe. Alors, le spectre $E \wedge F$ est $m + n + 1$ -connexe. En particulier, le produit smash de deux spectres connexes est connexe, donc induit un foncteur :

$$\wedge : \mathcal{SH}_{\geq 0} \times \mathcal{SH}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{SH}_{\geq 0}.$$

Démonstration. Exercice. (En utilisant le Lemme 14.1.5, on peut réduire au cas $F = S^j$, $j \geq n + 1$.) \square

14.2. Tours de Postnikov.

Théorème 14.2.1. Soit $E \in \text{Ob } \mathcal{SH}$ un spectre. Alors il existe une suite cofibre :

$$E_{\geq 0} \xrightarrow{i_{\geq 0}} E \xrightarrow{p_{< 0}} E_{< 0}$$

telle que

- (1) $E_{\geq 0}$ est connexe ;
- (2) $\pi_i(E_{< 0}) = 0, \forall i \geq 0$;
- (3) $\pi_s(i_{\geq 0})$ est un isomorphisme $\forall s \geq 0$ et $\pi_s(p_{< 0})$ est un isomorphisme $\forall s < 0$.

Si $F \in \mathcal{SH}_{\geq 0}$ est un spectre connexe, alors tout morphisme $F \rightarrow E$ se factorise canoniquement dans \mathcal{SH} à travers $E_{\geq 0} \rightarrow E$.

En particulier, si $G \in \text{Ob } \mathcal{SH}$ est un spectre et $g : E \rightarrow G$ est un morphisme de \mathcal{SH} , il existe un morphisme de suites cofibres :

$$\begin{array}{ccccc} E_{\geq 0} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E_{< 0} \\ g_{\geq 0} \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow g_{< 0} \\ G_{\geq 0} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G_{< 0} \end{array}$$

dont le morphisme $g_{\geq 0} : E_{\geq 0} \rightarrow G_{\geq 0}$ est la factorisation canonique de la composée : $E_{\geq 0} \rightarrow E \rightarrow G$.

Démonstration. On construit d'abord le morphisme $p_{< 0} : E \rightarrow E_{< 0}$; la suite cofibre est alors la suite cofibre associée. Comme indiquée dans la Remarque 14.1.6, la démonstration peut se faire entièrement dans la catégorie \mathcal{SH} . Pour rester plus explicite, on utilise ici les CW-spectres.

On construit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ des CW-spectres $E_{< 0, n}$ muni d'inclusions de CW-spectres $E_{< 0, n} \subset E_{< 0, n+1}$ tels que

- (1) $\pi_i(E_{< 0, n}) = 0, 0 \leq i < n$;
- (2) l'inclusion $E \hookrightarrow E_{< 0, n}$ induit un isomorphisme en groupes π_s , pour $s < 0$.

Pour démarrer la récurrence, on pose $E_{< 0, 0} = E$.

Pour l'étape de récurrence, on choisit pour chaque $\lambda \in \pi_n(E_{< 0, n})$ un représentant cellulaire $f_\lambda : S^n \rightarrow E_{< 0, n}$ et on prend pour $E_{< 0, n+1}$ la cofibre du morphisme

$$\bigvee_{\lambda \in \pi_n(E_{< 0, n})} S^n \xrightarrow{\bigvee_{\lambda \in \pi_n(E_{< 0, n})} f_\lambda} E_{< 0, n}.$$

Alors, la suite exacte longue en homotopie et le fait que S est connexe montre que $E_{< 0, n+1}$ a les propriétés requises.

On pose $E_{< 0} := \bigcup E_{< 0, n}$. Puisque homotopie stable commute aux colimites, le spectre $E_{< 0}$ et le morphisme $p_{< 0} : E \rightarrow E_{< 0}$ ont les propriétés recherchées.

Considérer un spectre connexe, F ; la Proposition 14.1.8 montre que $[F, E_{< 0}] = 0$ et $[F, \Sigma^{-1}E_{< 0}] = 0$. Alors, la suite exacte longue associée à la suite cofibre $E_{\geq 0} \rightarrow E \rightarrow E_{< 0}$:

$$0 = [F, \Sigma^{-1}E_{< 0}] \rightarrow [F, E_{\geq 0}] \rightarrow [F, E] \rightarrow [F, E_{< 0}] = 0$$

montre que $[F, E_{\geq 0}] \rightarrow [F, E]$ est un isomorphisme.

Soit G un spectre, alors par ce résultat, un morphisme de spectres $g : E \rightarrow G$ induit un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E_{\geq 0} & \longrightarrow & E \\ g_{\geq 0} \downarrow & & \downarrow g \\ G_{\geq 0} & \longrightarrow & G, \end{array}$$

dont le morphisme $g_{\geq 0}$ est unique, et donc un morphisme de suites cofibres. \square

Remarque 14.2.2. A l'aide de l'algèbre homotopique, on peut rendre cette construction fonctorielle.

On a toujours la propriété d'unicité à isomorphisme près suivant :

Corollaire 14.2.3. Soit $E \in \text{Ob } \mathcal{SH}$ un spectre et soient $E_{\geq 0} \rightarrow E \rightarrow E_{<0}$ et $E'_{\geq 0} \rightarrow E \rightarrow E'_{<0}$ deux suites cofibres qui satisfont les conditions du Théorème 14.2.1. Alors il existe un isomorphisme unique $E_{\geq 0} \rightarrow E'_{\geq 0}$ qui figure dans un isomorphisme de suites cofibres :

$$\begin{array}{ccccc} E_{\geq 0} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E_{<0} \\ \cong \downarrow & & \parallel & & \downarrow \cong \\ E'_{\geq 0} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E'_{<0}. \end{array}$$

En particulier, $E_{\geq 0} \rightarrow E$ est unique à isomorphisme canonique près et $E_{<0}$ est unique à isomorphisme près.

Démonstration. Exercice. (Pour l'unicité de $E_{\geq 0}$, on utilise la propriété d'unicité donnée dans le Théorème 14.2.1.) \square

Notation 14.2.4. Soient $E \in \text{Ob } \mathcal{SH}$ un spectre et n un entier. On écrit

- (1) $E_{\geq n}$ pour le spectre $\Sigma^n((E[-n])_{\geq 0})$;
- (2) $E_{< n}$ pour le spectre $\Sigma^n((E[-n])_{< 0})$;
- (3) $E_{\leq n}$ pour le spectre $\Sigma^{n-1}((E[1-n])_{< 0})$.

Corollaire 14.2.5. Soient $E \in \text{Ob } \mathcal{SH}$ un spectre et $n \in \mathbb{Z}$ un entier. Alors il existe une suite cofibre :

$$E_{\geq n} \xrightarrow{i_{\geq n}} E \xrightarrow{p_{< n}} E_{< n}$$

telle que

- (1) $E_{\geq n} = 0$ est $n - 1$ -connexe ;
- (2) $\pi_i(E_{< n}) = 0, \forall i \geq n$;
- (3) $\pi_s(i_{\geq n})$ est un isomorphisme $\forall s \geq n$ et $\pi_s(p_{< n})$ est un isomorphisme $\forall s < n$.

Démonstration. Exercice. \square

Corollaire 14.2.6. Soit $E \in \text{Ob } \mathcal{SH}$ un spectre. Il existe une tour de spectres en dessous de E :

$$\begin{array}{ccccccc} & & E & & & & \\ & & \downarrow p_{< n} & \searrow p_{< n-1} & & & \\ \cdots & \longrightarrow & E_{< n+1} & \longrightarrow & E_{< n} & \longrightarrow & E_{< n-1} & \longrightarrow & E_{< n-2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

et une tour de spectres au dessus de E :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & E_{\geq n+1} & \longrightarrow & E_{\geq n} & \longrightarrow & E_{\geq n-1} & \longrightarrow & E_{\geq n-2} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow i_{\geq n} & \swarrow i_{\geq n-1} & & & & & & & \\ & & E & & & & & & & & \end{array}$$

Le morphisme induit

$$\mathrm{hocolim}(E_{\geq n}) \rightarrow E$$

est un isomorphisme dans \mathcal{SH} .

Démonstration. Exercice. \square

14.3. L'isomorphisme de Hurewicz.

Exemple 14.3.1. La construction de la tour de Postnikov induit une suite cofibre :

$$S_{\geq 1} \rightarrow S \rightarrow \mathbf{HZ}$$

où le morphisme $S \rightarrow \mathbf{HZ}$ est le morphisme unique de \mathcal{SH} qui induit l'identité $\mathbb{Z} = \pi_0(S) \rightarrow \pi_0(\mathbf{HZ}) = \mathbb{Z}$.

Remarque 14.3.2. Le morphisme $S \rightarrow \mathbf{HZ}$ est l'unité

$$\eta_{\mathbf{HZ}} : S \rightarrow \mathbf{HZ}$$

de la structure de spectre en anneaux de \mathbf{HZ} . (Voir la section 15.)

On a la version stable de l'isomorphisme de Hurewicz :

Proposition 14.3.3. Soit $F \in \mathrm{Ob}\mathcal{SH}$ un spectre. Alors, il existe une suite cofibre

$$S_{\geq 1} \wedge F \rightarrow F \xrightarrow{\eta_{\mathbf{HZ}} \wedge F} \mathbf{HZ} \wedge F$$

où le morphisme $\eta_{\mathbf{HZ}} \wedge F$ induit le morphisme de Hurewicz

$$\pi_*(F) \rightarrow \mathbf{HZ}_*F$$

en homologie.

En particulier, si F est $n - 1$ -connexe (pour $n \in \mathbb{Z}$), alors le morphisme

$$\pi_n(F) \rightarrow \mathbf{HZ}_n F$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La suite cofibre est la suite $F \wedge (S_{\geq 1} \rightarrow S \rightarrow \mathbf{HZ})$.

Si F est $n - 1$ -connexe, alors $F \wedge S_{\geq 1}$ est n -connexe, par le Lemme 14.1.9 ; de même, le spectre $F \wedge \mathbf{HZ}$ est $n - 1$ -connexe. En particulier, la suite exacte longue en homotopie donne :

$$0 = \pi_n(F \wedge S_{\geq 1}) \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(F \wedge \mathbf{HZ}) = \mathbf{HZ}_n(F) \rightarrow 0 = \pi_{n-1}(F \wedge S_{\geq 1}),$$

donc le morphisme de Hurewicz, $\pi_n(F) \rightarrow \mathbf{HZ}_n(F)$, est un isomorphisme. \square

Corollaire 14.3.4. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{SH} entre deux spectres n -connexes, pour $n \in \mathbb{Z}$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\mathbf{HZ}_*(f)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z$ la suite cofibre associée à f (unique à isomorphisme non-unique près). Alors Z est un spectre n -connexe, par la Proposition 14.1.4, et f est un isomorphisme si et seulement si $Z = 0$ dans \mathcal{SH} , ce qui est équivalent à $\pi_*(Z) = 0$.

Par la suite exacte longue en homologie \mathbf{HZ}_* , il suffit de montrer que $\pi_*(Z) = 0$ si et seulement si $\mathbf{HZ}_*(Z) = 0$. L'implication \Rightarrow est évidente (car la première condition est équivalent à $Z = 0$) ; considérons la réciproque.

Supposons que $\pi_*(Z) \neq 0$, alors il existe un entier minimal s tel que $\pi_s(Z) \neq 0$, et par la n -connexité de Z , $s > n$. Quitte à remplacer n par $s - 1$, on peut supposer que $s = n + 1$. Mais, par la Proposition 14.3.3, on a l'isomorphisme de Hurewicz $\pi_s(Z) \cong \mathbf{HZ}_s(Z)$, donc $\mathbf{HZ}_s(Z) \neq 0$. \checkmark \square

14.4. Spectres de Moore et spectres d'Eilenberg-MacLane.

Définition 14.4.1. Soit $A \in \mathcal{Ab}$ un groupe abélien. Un spectre de Moore de type A est un spectre connexe $\mathbf{M}(A)$ tel que

$$\mathbf{HZ}_*(\mathbf{M}(A)) = \begin{cases} A & * = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 14.4.2. Soit A un groupe abélien. Il existe un spectre de Moore $\mathbf{M}(A)$ de type A et, si $\mathbf{M}(A)'$ en est un deuxième, il existe un isomorphisme dans \mathcal{SH}

$$\mathbf{M}(A) \cong \mathbf{M}(A)'$$

Démonstration. Soit A un groupe abélien ; il existe une présentation projective du groupe A de la forme :

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \rightarrow A \rightarrow 0,$$

où F est un groupe abélien libre, $F \cong \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} \mathbb{Z}$, $F \rightarrow A$ est surjectif et R est son noyau, qui est un groupe abélien libre $R \cong \bigoplus_{j \in \mathcal{J}'} \mathbb{Z}$.

Le morphisme α peut être réalisé dans \mathcal{SH} : il existe un morphisme

$$\alpha : \bigvee_{j \in \mathcal{J}'} S \rightarrow \bigvee_{i \in \mathcal{J}} S$$

tel que $\pi_0(\alpha)$ identifie à α via les isomorphismes $R \cong \pi_0(\bigvee_{j \in \mathcal{J}'} S)$ et $F \cong \pi_0(\bigvee_{i \in \mathcal{J}} S)$.

On définit $\mathbf{M}(A)$ par la suite cofibre :

$$\bigvee_{j \in \mathcal{J}'} S \xrightarrow{\alpha} \bigvee_{i \in \mathcal{J}} S \rightarrow \mathbf{M}(A).$$

Par construction, le spectre $\mathbf{M}(A)$ est connexe (par la Proposition 14.1.4) et la suite exacte longue en homologie montre que $\mathbf{M}(A)$ est bien un spectre de Moore de type A .

Soit $\mathbf{M}(A)'$ un deuxième spectre de Moore de type A . Alors, l'isomorphisme $A \cong \mathbf{HZ}_0(\mathbf{M}(A)')$ induit un isomorphisme $A \cong \pi_0(\mathbf{M}(A)'),$ par l'isomorphisme de Hurewicz, Proposition 14.3.3. En particulier, on obtient une surjection $F \cong \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} \mathbb{Z} \rightarrow \pi_0(\mathbf{M}(A)').$ Cette surjection est réalisée dans la catégorie \mathcal{SH} par un morphisme $g : \bigvee_{i \in \mathcal{J}} S \rightarrow \mathbf{M}(A)',$ qui induit un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{j \in \mathcal{J}'} S & \xrightarrow{\alpha} & \bigvee_{i \in \mathcal{J}} S & \longrightarrow & \mathbf{M}(A) \\ & & \downarrow g & \swarrow g' & \\ & & \mathbf{M}(A)' & & \end{array}$$

où la suite horizontale est la suite cofibre qui définit $\mathbf{M}(A)$ et le morphisme g' en pointillés existe puisque la composée $g \circ \alpha$ est trivial en homotopie.

On vérifie que $\mathbf{HZ}_*(g')$ est un isomorphisme (essentiellement par construction), donc g' est un isomorphisme, par Corollaire 14.3.4. \square

Remarque 14.4.3. Noter que la Proposition montre que la classe d'isomorphisme de $\mathbf{M}(A)$ construit explicitement dans la démonstration ne dépend pas du choix de présentation.

Exemple 14.4.4. Pour les groupes abéliens cycliques, on a les modèles suivants :

- (1) $\mathbf{M}(\mathbb{Z})$ le spectre S ;
- (2) pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathbf{M}(\mathbb{Z}/n)$ la cofibre du morphisme $S \xrightarrow{n} S$.

Exemple 14.4.5. Soit A un groupe abélien finiment engendré. Il existe un isomorphisme $A \cong \mathbb{Z}^d \oplus \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{Z}/n_i$, où d est un nombre naturel $\{n_i \in \mathbb{N} | i \in \mathcal{I}\}$ est un ensemble fini.

Il y a un isomorphisme dans \mathcal{SH} :

$$\mathbf{M}(A) \cong \mathbf{M}(\mathbb{Z})^{\vee d} \vee \bigvee_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{M}(\mathbb{Z}/n_i).$$

Proposition 14.4.6. Soient A, B deux groupes abéliens. Alors l'homologie $\mathbf{HZ}_0 : \mathcal{SH} \rightarrow \mathfrak{Ab}$ induit une surjection de groupes abéliens.

$$\mathbf{HZ}_0 : \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\mathbf{M}(A), \mathbf{M}(B)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Ab}}(A, B).$$

Tout élément du noyau de \mathbf{HZ}_0 se factorise

$$\mathbf{M}(A) \rightarrow \bigvee S^1 \rightarrow \mathbf{M}(B).$$

Démonstration. La surjectivité se démontre par l'argument utilisé dans la démonstration de la Proposition 14.4.2.

On peut supposer que $\mathbf{M}(A)$ est défini par une suite cofibre de la forme :

$$\bigvee_{j \in \mathcal{J}} S \xrightarrow{\alpha} \bigvee_{i \in \mathcal{I}} S \rightarrow \mathbf{M}(A).$$

Alors, soit $f : \mathbf{M}(A) \rightarrow \mathbf{M}(B)$ un élément du noyau de \mathbf{HZ}_0 . Par l'isomorphisme de Hurewicz, $\pi_0(f)$ est trivial et on déduit facilement que f se factorise :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}(A) & \longrightarrow & \bigvee_{j \in \mathcal{J}} S^1 \\ \downarrow f & \swarrow f' & \\ \mathbf{M}(B) & & \end{array}$$

à travers la cofibre de $\bigvee_{i \in \mathcal{I}} S \rightarrow \mathbf{M}(A)$. □

Remarque 14.4.7. Au fait, si B est un groupe fini, sans 2-torsion, alors

$$\mathbf{HZ}_0 : \text{Hom}_{\mathcal{SH}}(\mathbf{M}(A), \mathbf{M}(B)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Ab}}(A, B)$$

est un isomorphisme. Pour démontrer ce fait, il suffit de montrer que l'hypothèse entraîne que $\pi_1(\mathbf{M}(B))$ est trivial. Pour effectuer ce calcul, on a besoin du fait que $\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}/2 \cong \pi_2(S)$.

On prend la définition suivante des spectres d'Eilenberg-MacLane (qui est compatible avec la définition explicite qu'on a utilisée jusqu'à présent).

Définition 14.4.8. Soit A un groupe abélien. Un spectre d'Eilenberg-MacLane de type A est un spectre \mathbf{HA} tel que

$$\pi_*(\mathbf{HA}) = \begin{cases} A & * = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 14.4.9. Soit $\mathbf{M}(A)$ un spectre de Moore de type $A \in \mathfrak{Ab}$. Alors $\mathbf{M}(A)_{\leq 0}$ est un spectre d'Eilenberg-MacLane \mathbf{HA} .

Démonstration. Exercice. □

Théorème 14.4.10. Soient A, B deux groupes abéliens. Le foncteur π_0 induit un isomorphisme

$$[\mathbf{HA}, \mathbf{HB}] \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathfrak{Ab}}(A, B).$$

Démonstration. (Indications). Surjectivité : par la Proposition 14.4.6 un morphisme de groupes abéliens $f : A \rightarrow B$ est induit par un morphisme de spectres de Moore $\tilde{f} : \mathbf{M}(A) \rightarrow \mathbf{M}(B)$. Alors, ce morphisme induit

$$\tilde{f}_{\leq 0} : \mathbf{M}(A)_{\leq 0} = \mathbf{H}A \rightarrow \mathbf{H}B = \mathbf{M}(A)_{\leq 0}$$

qui induit f en homotopie. A priori, ce morphisme n'est pas unique.

Pour l'injectivité, en utilisant le fait que \mathcal{SH} est une catégorie additive, il suffit de montrer que tout morphisme $g : \mathbf{H}A \rightarrow \mathbf{H}B$ qui induit le morphisme 0 en homotopie est trivial. Soit Z la cofibre de g . Alors, par la suite exacte longue en homotopie, la suite cofibre

$$\mathbf{H}B \rightarrow Z \rightarrow \Sigma \mathbf{H}A$$

induit isomorphismes $\pi_0(Z) = B$ et $\pi_1(Z) = A$, tous les autres groupes d'homotopie de Z étant triviaux. (On utilise le fait que $\pi_0(g) = 0$.)

En particulier, $Z_{\leq 0} \cong \mathbf{H}B$ dans \mathcal{SH} et la suite cofibre est scindée par le morphisme $Z \rightarrow Z_{\leq 0}$, donc $Z \cong \mathbf{H}B \vee \Sigma \mathbf{H}A$. Ceci entraîne que g est le morphisme trivial. (Exercice!) \square

Remarque 14.4.11. Un morphisme g de \mathcal{SH} qui est trivial en homotopie n'est pas nécessairement le morphisme trivial. Par exemple, l'opérateur Bockstein en homologie à coefficients \mathbb{Z}/p est induit par un morphisme de spectres

$$\beta : \mathbf{H}\mathbb{Z}/p \rightarrow \Sigma \mathbf{H}\mathbb{Z}/p.$$

Pour définir le Bockstein, on utilise la suite cofibre de spectres

$$\mathbf{H}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{H}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{H}\mathbb{Z}/p$$

induit par la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow 0$. La suite de Puppe fournit $\tilde{\beta} : \mathbf{H}\mathbb{Z}/p \rightarrow \mathbf{H}\mathbb{Z}[1]$, le Bockstein intègre. Le morphisme β est obtenu en prenant la composition avec $\mathbf{H}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{H}\mathbb{Z}/p$ (après suspension).

Ce morphisme est évidemment trivial en homotopie. Par contre, β n'est pas le morphisme 0 de \mathcal{SH} . (Exercice : démontrer ce fait en considérant l'homologie $\mathbf{H}\mathbb{Z}/p_*$ du spectre de Moore $\mathbf{M}(\mathbb{Z}/p)$).

14.5. La t -structure homotopique. Les tours de Postnikov munissent la catégorie \mathcal{SH} d'une t -structure : ceci est une notion générale en théorie de catégories triangulées (voir, par exemple, [GM03, GM99]). En particulier, on peut considérer la catégorie $\mathcal{SH}_{\geq 0} \cap \mathcal{SH}_{\leq 0}$, qui est une sous-catégorie pleine de \mathcal{SH} . Dans le langage des t -structures, $\mathcal{SH}_{\geq 0} \cap \mathcal{SH}_{\leq 0}$ est le coeur de la t -structure.

Lemme 14.5.1. *Un spectre $E \in \text{Ob } \mathcal{SH}$ appartient à $\mathcal{SH}_{\geq 0} \cap \mathcal{SH}_{\leq 0}$ si et seulement si $\pi_s(E) = 0 \forall s \neq 0$.*

Démonstration. Évident. \square

Ceci mène à une propriété d'unicité des spectres d'Eilenberg-MacLane.

Proposition 14.5.2. *Soit $E \in \text{Ob } \mathcal{SH}_{\geq 0} \cap \mathcal{SH}_{\leq 0}$ un spectre dans le coeur de \mathcal{SH} . Alors il existe un isomorphisme canonique dans \mathcal{SH} :*

$$\gamma_E : \mathbf{M}(\pi_0 E)_{\leq 0} \rightarrow E$$

tel que $\pi_0(\gamma_E) : \pi_0(\mathbf{M}(\pi_0 E)_{\leq 0}) = \pi_0 E \rightarrow \pi_0 E$ est le morphisme identité.

Démonstration. (Indications). Par la construction des espaces de Moore, il existe un morphisme de spectres

$$\mathbf{M}(\pi_0 E) \rightarrow E$$

qui induit l'identité en $\pi_0(-)$.

Mais le spectre E appartient à $\mathcal{SH}_{\leq 0}$, donc ce morphisme se factorise canoniquement comme

$$\mathbf{M}(\pi_0 E) \rightarrow (\mathbf{M}(\pi_0 E))_{\leq 0} \rightarrow E.$$

□

Théorème 14.5.3. *Le foncteur π_0 induit une équivalence de catégories :*

$$\pi_0 : \mathcal{SH}_{\geq 0} \cap \mathcal{SH}_{\leq 0} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{Ab}.$$

Le foncteur inverse est le foncteur d'Eilenberg-MacLane

$$\mathbf{H} : \mathfrak{Ab} \rightarrow \mathcal{SH}_{\geq 0} \cap \mathcal{SH}_{\leq 0}$$

qui associe à un groupe abélien, A , le spectre d'Eilenberg MacLane $\mathbf{H}A$.

Démonstration. (Indications). L'ingrédient essentiel est Théorème 14.4.10 qui montre que \mathbf{H} induit un foncteur $\mathfrak{Ab} \rightarrow \mathcal{SH}$. Ce foncteur prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine $\mathcal{SH}_{\geq 0} \cap \mathcal{SH}_{\leq 0}$. □

Corollaire 14.5.4. *Soit $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3$ une suite dans la catégorie $\mathcal{SH}_{\geq 0} \cap \mathcal{SH}_{\leq 0}$ (donc la composition est triviale). Alors la suite est une suite cofibre si et seulement si*

$$\pi_*(X_1) \rightarrow \pi_*(X_2) \rightarrow \pi_*(X_3)$$

est une suite exacte courte de groupes abéliens.

Réciproquement, une suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ de groupes abéliens induit une suite cofibre

$$\mathbf{H}A \rightarrow \mathbf{H}B \rightarrow \mathbf{H}C$$

de la catégorie $\mathcal{SH}_{\geq 0} \cap \mathcal{SH}_{\leq 0}$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 14.5.5. *Soit n un entier positif. Alors, la suite exacte courte $\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n$ induit une suite cofibre*

$$\mathbf{H}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{H}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{H}\mathbb{Z}/n.$$

En particulier, il existe un isomorphisme $\mathbf{H}\mathbb{Z}/n \cong (S/n) \wedge \mathbf{H}\mathbb{Z}$.

On peut préciser le résultat sur les tours de Postnikov.

Proposition 14.5.6. *Soient $E \in \text{Ob}\mathcal{SH}$ un spectre et $n \in \mathbb{Z}$ un entier. Alors il existe suites cofibres*

$$\Sigma^n \mathbf{H}\pi_n(E) \rightarrow E_{\leq n} \rightarrow E_{\leq n-1}$$

et

$$E_{\geq n+1} \rightarrow E_{\geq n} \rightarrow \Sigma^n \mathbf{H}\pi_n(E).$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 14.5.7. *Ce résultat montre que chaque spectre peut être construit à partir des spectres d'Eilenberg-MacLane.*

Remarque 14.5.8. *La catégorie $\mathcal{SH}_{\leq 0}$ n'est pas stable par rapport au produit smash. De même, la catégorie $\mathcal{SH}_{\geq 0} \cap \mathcal{SH}_{\leq 0}$ n'est pas stable par le produit smash. Par exemple, soit p un nombre premier, alors l'homotopie du spectre $\mathbf{H}\mathbb{Z}/p \wedge \mathbf{H}\mathbb{Z}/p$ est duale (en tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{Z}/p) à l'algèbre de Steenrod, \mathcal{A} . L'espace vectoriel $\pi_*(\mathbf{H}\mathbb{Z}/p \wedge \mathbf{H}\mathbb{Z}/p)$ est hautement non-trivial en degrés positifs !*

Exercice 14.5.9. *Soient A, B deux groupes abéliens. Montrer que $(\mathbf{H}A \wedge \mathbf{H}B)_{\leq 0} \cong \mathbf{H}(A \otimes B)$. (Remarque : il suffit de montrer que $(\mathbf{M}(A) \wedge \mathbf{M}(B))_{\leq 0} \cong \mathbf{H}(A \otimes B)$.)*

Troisième partie 3. Structures multiplicatives et applications

15. STRUCTURES MULTIPLICATIVES

15.1. **Spectres en anneaux.** Rappel que S est le spectre des suspensions $\Sigma^\infty S^0$.

Définition 15.1.1. Un spectre en anneaux est un spectre $E \in \text{Ob } \mathcal{SH}$ muni de morphismes $\eta : S \rightarrow E$ (unité) et $\mu : E \wedge E \rightarrow E$ (produit) tels que les diagrammes suivants commutent dans \mathcal{SH} :

$$\begin{array}{ccc} E \cong S \wedge E & \xrightarrow{\eta \wedge E} & E \wedge E \xleftarrow{E \wedge \eta} E \wedge S \cong E \\ & \searrow E & \downarrow \mu \\ & & E \end{array} \quad (\text{Unité})$$

et

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E \wedge E & \xrightarrow{\mu \wedge E} & E \wedge E \\ E \wedge \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ E \wedge E & \xrightarrow{\mu} & E. \end{array} \quad (\text{Associativité})$$

Le spectre en anneaux (E, μ, η) est commutatif si le morphisme $\tau : E \wedge E \rightarrow E \wedge E$ d'interchange de facteurs induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E & \xrightarrow{\tau} & E \wedge E \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & & E. \end{array}$$

Exemple 15.1.2. Le spectre S est canoniquement un spectre en anneaux, puisqu'on dispose de l'isomorphisme canonique $S \wedge S \cong S$ dans \mathcal{SH} .

Exemple 15.1.3.

- (1) Soit R un anneau. Alors, le spectre d'Eilenberg-MacLane $\mathbf{H}R$ est un spectre en anneaux, commutatif si R l'est. Le morphisme $\mu : \mathbf{H}R \wedge \mathbf{H}R \rightarrow \mathbf{H}R$ induit le produit de R en homotopie, $\pi_0(\mu)$.
- (2) Le spectre KU qui représente la K -théorie complexe est un spectre en anneaux commutatif. Le produit est induit par le produit tensoriel de fibrés vectoriels.
- (3) Le spectre MU de cobordisme complexe est un spectre en anneaux commutatif. Le produit est d'origine géométrique, suivant les indications du Lemme 11.3.1. Rappel que l'espace MU_{2n} est l'espace de Thom $\text{Thom}(\gamma_n)$, où γ_n est le \mathbb{C} -fibré universel sur $BU(n)$. La somme directe de fibrés vectoriels est représenté par des morphismes $BU(m) \times BU(n) \rightarrow BU(m+n)$. En particulier, on obtient des morphismes induits :

$$\text{Thom}(\gamma_m) \wedge \text{Thom}(\gamma_n) \cong \text{Thom}(\gamma_m \boxplus \gamma_n) \rightarrow \text{Thom}(\gamma_{m+n}),$$

où $\gamma_m \boxplus \gamma_n$ est la somme directe extérieure. Donc, on dispose de morphismes

$$MU_{2m} \wedge MU_{2n} \rightarrow MU_{2(m+n)}$$

qui sont compatibles aux morphismes de suspension, donc fournissent un produit $MU \wedge MU \rightarrow MU$. (Il vaut vérifier l'associativité et la commutativité de ce produit.)

De même, l'unité $S \rightarrow MU$ est d'origine géométrique : l'inclusion d'un point $* \rightarrow BU(n)$ induit un morphisme de fibrés vectoriels $\theta^n /_* \rightarrow \gamma_n / BU(n)$. Au niveau des espaces de Thom, on obtient $S^{2n} \rightarrow \text{Thom}(\gamma_n)$. Ces morphismes définissent un morphisme de spectres $S \rightarrow MU$.

Proposition 15.1.4. Soient (E, μ_E, η_E) , (F, μ_F, η_F) deux spectres en anneaux. Alors $E \wedge F$ est un spectre en anneaux, muni des morphismes de structure $\eta_{E \wedge F} := \eta_S \wedge \eta_F$ et $\mu_{E \wedge F}$ donné par la composée :

$$(E \wedge F) \wedge (E \wedge F) \cong (E \wedge E) \wedge (F \wedge F) \xrightarrow{\mu_E \wedge \mu_F} E \wedge F.$$

Si E, F sont commutatifs, alors $(E \wedge F, \mu_{E \wedge F}, \eta_{E \wedge F})$ est commutatif.

Démonstration. (Indications.) La démonstration est formellement équivalente à la démonstration que le produit tensoriel de deux anneaux est un anneau, commutatif si les deux anneaux de départ sont commutatifs. \square

Définition 15.1.5. Soient (E, μ_E, η_E) , (F, μ_F, η_F) deux spectres en anneaux. Un morphisme de spectres en anneaux de E à F est un morphisme $f : E \rightarrow F$ de la catégorie \mathcal{SH} qui est compatible avec les morphismes de structure : les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \eta_E \swarrow & & \searrow \eta_F \\ E & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E & \xrightarrow{f \wedge f} & F \wedge F \\ \mu_E \downarrow & & \downarrow \mu_F \\ E & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

commutent.

Exemple 15.1.6.

- (1) Soit E un spectre en anneaux ; le morphisme de structure $\eta_S : S \rightarrow E$ est un morphisme de spectres en anneaux.
- (2) La K -théorie complexe est une théorie *complexe orientée*. Ceci se traduit par l'existence d'un morphisme de spectres en anneaux :

$$MU \rightarrow KU.$$

- (3) La cohomologie intégrale est une théorie *complexe orientée* ; l'orientation complexe correspond au morphisme de Thom

$$MU \rightarrow \mathbf{HZ}$$

qui est un morphisme de spectres en anneaux.

Le morphisme de Thom correspond au morphisme $MU \rightarrow MU_{\leq 0}$, car le calcul élémentaire de l'homologie $\mathbf{HZ}_0 MU$ du spectre connexe MU montre que $MU_{\leq 0} \cong \mathbf{HZ}$. Ces morphismes figurent dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} MU & \xleftarrow{\eta_{MU}} & S \\ \downarrow & & \downarrow \eta_{\mathbf{HZ}} \\ MU_{\leq 0} & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{HZ}. \end{array}$$

Remarque 15.1.7. Soit (E, μ_E, η_E) un spectre en anneaux. Alors le spectre E possède une deuxième structure de spectre en anneaux, $E^{\text{op}} = (E, \mu_E \circ \tau, \eta_E)$, la structure opposée. La structure de E est commutative si et seulement si E et E^{op} sont isomorphes en tant que spectres en anneaux via le morphisme identité.

Le spectre en anneaux $(E^{\text{op}})^{\text{op}}$ s'identifie canoniquement à E .

Proposition 15.1.8. Les spectres en anneaux forment une catégorie, $\mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}}$, muni d'un foncteur oubli :

$$\mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{H}.$$

La catégorie $\mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}}$ possède les propriétés suivantes :

- (1) La construction du spectre en anneaux opposé induit un foncteur ${}^{\text{op}} : \mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}}$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}} & \xrightarrow{{}^{\text{op}}} & \mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{S}\mathcal{H} & \end{array}$$

- (2) Le spectre S est l'objet initial de la catégorie $\mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}}$.
 (3) Le produit smash induit un foncteur $\wedge : \mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}} \times \mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}}$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}} \times \mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}} & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}\mathcal{H} \times \mathcal{S}\mathcal{H} & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{S}\mathcal{H} \end{array}$$

La catégorie $(\mathcal{R}ing_{\mathcal{S}\mathcal{H}}, \wedge, S)$ est une catégorie monoïdale symétrique.

Démonstration. Exercice. □

15.2. Spectres en modules.

Définition 15.2.1. Soit (E, μ_E, η_E) un spectre en anneaux. Un E -module (à gauche) est un spectre $M \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}$ muni d'un morphisme de structure $\psi_M : E \wedge M \rightarrow M$ tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} M \cong S \wedge M & \xrightarrow{\eta_E \wedge M} & E \wedge M \\ & \searrow M & \downarrow \psi_M \\ & & M \end{array} \quad (\text{Unité})$$

et

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E \wedge M & \xrightarrow{\mu_E \wedge M} & E \wedge M \\ \downarrow E \wedge \psi_M & & \downarrow \psi_M \\ E \wedge M & \xrightarrow{\psi_M} & E. \end{array} \quad (\text{Associativité})$$

Remarque 15.2.2. Tout spectre $X \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}$ est canoniquement un S -module.

Exemple 15.2.3. Soient R un anneau et M un R -module à gauche. Alors, le spectre $\mathbf{H}M$ est un $\mathbf{H}R$ -module. En particulier, pour tout groupe abélien A , $\mathbf{H}A$ est un $\mathbf{H}\mathbb{Z}$ -module.

Exemple 15.2.4. Soit E un spectre en anneaux. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le spectre $\Sigma^n E$ est un E -module, muni du morphisme $\Sigma^n \mu_E$.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 15.2.5. Soient (E, μ_E, η_E) un spectre en anneaux et $X \in \text{Ob } \mathcal{S}\mathcal{H}$ un spectre. Alors, le spectre $E \wedge X$ est un E -module, muni du morphisme de structure $\mu_E \wedge X : E \wedge E \wedge X \rightarrow E \wedge X$.

Démonstration. Conséquence immédiate de l'associativité du produit smash \wedge de la catégorie \mathcal{SH} . \square

Remarque 15.2.6. Cette proposition se généralise : soient E, F deux spectres en anneaux et M un F -module. Alors, le spectre $E \wedge M$ est un $E \wedge F$ -module.

Définition 15.2.7. Soient E un spectre en anneaux et (M, ψ_M) (N, ψ_N) deux E -modules. Un morphisme de E -modules est un morphisme $g : M \rightarrow N$ de \mathcal{SH} qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E \wedge M & \xrightarrow{E \wedge g} & E \wedge N \\ \psi_M \downarrow & & \downarrow \psi_N \\ M & \xrightarrow{g} & N. \end{array}$$

Proposition 15.2.8. Soit E un spectre en anneaux. Alors les E -modules forment une catégorie \mathcal{SH}_E , munie d'un foncteur oubli vers la catégorie \mathcal{SH} .

Démonstration. Exercice. \square

Proposition 15.2.9. Soient E, F deux spectres en anneaux.

(1) Le foncteur $E \wedge - : \mathcal{SH} \rightarrow \mathcal{SH}$ induit un foncteur

$$E \wedge - : \mathcal{SH}_F \rightarrow \mathcal{SH}_{E \wedge F}.$$

(2) Un morphisme de spectres en anneaux $f : E \rightarrow F$ induit un foncteur de restriction :

$$\mathcal{SH}_F \rightarrow \mathcal{SH}_E.$$

Démonstration. Exercice. \square

Il existe une notion évidente de E -module à droite. Il n'est pas nécessaire de développer cette théorie de manière indépendante, à cause du résultat suivant.

Proposition 15.2.10. Soit E un spectre en anneaux. Alors la catégorie des E -modules à droite est canoniquement équivalente à la catégorie des E^{op} -modules à gauche. En particulier, si E est commutatif, alors les catégories de E -modules à gauche (respectivement à droite) sont canoniquement équivalentes.

Démonstration. Exercice. \square

15.3. Produits induits en homologie et cohomologie. Une structure de spectre en anneaux sur un spectre E induit un produit en E -cohomologie. Par exemple, le produit sur \mathbf{HR} induit le cup-produit en cohomologie. Comme d'habitude, ces structures sont commutatifs au sens gradué, en raison du lemme suivant :

Lemme 15.3.1. Soient p, q deux entiers. Alors le morphisme d'échange de facteurs

$$S^{p+q} \cong S^p \wedge S^q \rightarrow S^q \wedge S^p \cong S^{p+q}$$

est de degré $(-1)^{pq}$.

Démonstration. Exercice. (Rappeler que $[S^0, S^0] \cong \mathbb{Z}$ et l'isomorphisme correspond au degré d'un morphisme.) \square

Définition 15.3.2. Soit R^\bullet un anneau \mathbb{Z} -gradué (rappel : le produit est défini par les morphismes $R^s \otimes R^t \rightarrow R^{s+t}$). L'anneau R est gradué commutatif si, pour tout couple d'éléments homogènes x, y , $xy = (-1)^{|x||y|}yx$.

Notation 15.3.3. Soit X un spectre. On écrit

$$\begin{aligned} X_* &:= \pi_*(X) \\ X^* &:= X_{-*}. \end{aligned}$$

Lemme 15.3.4. Soient A, B, X, Y des spectres. Alors, le produit smash induit un morphisme de groupes abéliens :

$$[A, X] \otimes [B, Y] \rightarrow [A \wedge B, X \wedge Y].$$

En particulier, le produit smash induit un morphisme de groupes abéliens :

$$\pi_s(X) \otimes \pi_t(Y) \rightarrow \pi_{s+t}(X \wedge Y),$$

$\forall s, t \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Exercice. Précisons la structure dans le cas particulier : soient $f : S^s \rightarrow X$ et $g : S^t \rightarrow Y$ deux morphismes de \mathcal{SH} . Alors le morphisme $f \wedge g$ induit un morphisme

$$S^{s+t} \cong S^s \wedge S^t \xrightarrow{f \wedge g} X \wedge Y.$$

□

Les structures multiplicatives qu'on introduit en (co)homologie proviennent tous des produits extérieurs. Dans la suite, le produit tensoriel d'objets gradués désigne le produit tensoriel gradué.

Définition 15.3.5. Soient E un spectre en anneaux et M un E -module. Pour objets $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{SH}$, les produits extérieurs sont définis de la manière suivante :

(1) en M -homologie :

$$E_*(X) \otimes M_*(Y) \rightarrow M_*(X \wedge Y)$$

qui envoie $(f : S^s \rightarrow E \wedge X, g : S^t \rightarrow M \wedge Y)$ à la composée :

$$S^{s+t} \cong S^s \wedge S^t \xrightarrow{f \wedge g} E \wedge X \wedge M \wedge Y \cong E \wedge M \wedge X \wedge Y \xrightarrow{\psi_M \wedge X \wedge Y} M \wedge X \wedge Y.$$

(2) en M -cohomologie :

$$E^*(X) \otimes M^*(Y) \rightarrow M^*(X \wedge Y)$$

qui envoie $(f : X \rightarrow \Sigma^s E, g : Y \rightarrow \Sigma^t M)$ à la composée :

$$X \wedge Y \xrightarrow{f \wedge g} \Sigma^s E \wedge \Sigma^t M \cong \Sigma^{s+t} E \wedge M \xrightarrow{\Sigma^{s+t} \psi_M} \Sigma^{s+t} M.$$

En particulier, on peut prendre $E = M$ pour obtenir les produits extérieurs en E -(co)homologie.

Exercice 15.3.6. Montrer que ces produits extérieurs sont naturels en X et Y et également en E, M .

Proposition 15.3.7. Soit (E, μ_E, η_E) un spectre en anneaux. Alors :

(1) E_* est canoniquement un anneau gradué, commutatif si E l'est, dont l'unité est induit par $\mathbb{Z} \cong \pi_0(S) \xrightarrow{\pi_0(\eta_E)} \pi_0(E)$ et le produit par la composée

$$\pi_*(E) \otimes \pi_*(E) \rightarrow \pi_*(E \wedge E) \xrightarrow{(\mu_E)^*} \pi_*(E).$$

(2) La théorie d'homologie $E_* : \mathcal{SH} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ prend ses valeurs naturellement dans la catégorie des E_* -modules gradués, où, pour $F \in \text{Ob } \mathcal{SH}$, le morphisme de structure de $E_*(F)$ est la composée :

$$E_* \otimes E_*(F) \rightarrow \pi_*(E \wedge E \wedge F) \xrightarrow{(\mu_E \wedge F)^*} \pi_*(E \wedge F) = E_*(F).$$

(3) La E -cohomologie $E^* : \mathcal{SH}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ prend ses valeurs dans la catégorie des E^* -modules, où, pour F un spectre, le morphisme de structure est induit par

$$E^m \otimes E^n(F) = [S, E[m]] \otimes [F, E[n]] \rightarrow [S \wedge F, E[m] \wedge E[n]] \xrightarrow{[F, \mu_E]^{[m+n]}} [F, E[m+n]] = E^{m+n}(F).$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 15.3.8. La naturalité dans l'énoncé de la Proposition 15.3.7 se comprend comme suit : un morphisme $f : E \rightarrow F$ induit un morphisme d'anneaux

$$f_* : E_* \rightarrow F_*$$

et, pour X un spectre, le morphisme $f_*(X) : E_*(X) \rightarrow F_*(X)$ est un morphisme de E_* -modules, où $F_*(X)$ est considéré comme un E_* module par la restriction de structure le long du morphisme $E_* \rightarrow F_*$. En particulier, il y a un morphisme induit de F_* -modules :

$$F_* \otimes_{E_*} E_*(X) \rightarrow F_*(X).$$

En cohomologie, le morphisme $E^*(X) \rightarrow F^*(X)$ est un morphisme de E^* -modules, qui induit un morphisme de F^* -modules :

$$F^* \otimes_{E^*} E^*(X) \rightarrow F^*(X).$$

Rappeler (voir Section 12.9) qu'il existe une notion de théorie de cohomologie non-réduite associée à un spectre. Explicitement, pour $X \in \text{Ob}\mathcal{H}$, on pose

$$\underline{E}^n(X) := E^n(\Sigma^\infty(X_+)).$$

Proposition 15.3.9. *Soit E un spectre en anneaux. Alors, la théorie de cohomologie non-réduite :*

$$\underline{E}^* : \mathcal{H}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$$

prend ses valeurs naturellement dans la catégorie des E^ -algèbres graduées commutatives.*

Démonstration. Par la Proposition 15.3.7, \underline{E}^* prend ses valeurs dans la catégorie des E^* -modules gradués. Il faut montrer que, pour $X \in \text{Ob}\mathcal{H}$, $\underline{E}^*(X)$ possède une structure naturelle de E^* -algèbre graduée commutative.

L'unité est induit par la projection canonique $X \rightarrow *$, qui induit $\Sigma^\infty(X_+) \rightarrow S$ et donc $E^* = E^*(S) \rightarrow E^*(\Sigma^\infty(X_+))$. Le produit est induit par le morphisme diagonal $X \rightarrow X \times X$, qui donne $X_+ \rightarrow (X \times X) \cong X_+ \wedge X_+$ et donc

$$\Delta : \Sigma^\infty(X_+) \rightarrow \Sigma^\infty(X_+) \wedge \Sigma^\infty(X_+).$$

En cohomologie (réduite), le produit des classes de cohomologie $f \in [\Sigma^\infty(X_+), E[p]]$ et $g \in [\Sigma^\infty(X_+), E[q]]$ est donnée par la composée

$$\Sigma^\infty(X_+) \xrightarrow{\Delta} \Sigma^\infty(X_+) \wedge \Sigma^\infty(X_+) \xrightarrow{f \wedge g} E[p] \wedge E[q] \xrightarrow{\mu_E} E[p+q].$$

La vérification des axiomes d'une E^* -algèbre commutative ne pose aucune difficulté. \square

Remarque 15.3.10. Le point clé pour pouvoir définir le produit est l'existence du morphisme diagonal. En général, pour un spectre F , il n'existe ni un morphisme unité $S \rightarrow F$ ni un morphisme diagonal $F \rightarrow F \wedge F$ naturels.

Par contre, on peut toujours définir un produit *extérieur*

$$E^*(F_1) \otimes E^*(F_2) \rightarrow E^*(F_1 \wedge F_2)$$

pour deux spectres F_1 et F_2 .

Proposition 15.3.11. *Soient E un spectre en anneaux et M un E -module. Alors*

- (1) *La M -homologie prend ses valeurs dans la catégorie des E_* -modules gradués.*
- (2) *La M -cohomologie prend ses valeurs dans la catégorie des E^* -modules gradués.*

Démonstration. Exercice. \square

15.4. Changement de coefficients. On supposera dans cette section que E est un spectre en anneaux commutatif, afin que les catégories de E -modules à gauche (respectivement à droite) soient équivalentes.

Corollaire 15.4.1. Soient E un spectre en anneaux commutatif et M un E -module, alors il existe morphismes naturels de changement de coefficients :

$$(7) \quad M_* \otimes_{E_*} E_*(X) \rightarrow M_*(X)$$

$$(8) \quad M^* \otimes_{E^*} E^*(X) \rightarrow M^*(X),$$

qui sont des morphismes de E_* -modules (respectivement de E^* -modules).

Démonstration. Exercice. □

15.5. Le produit /. Il existe plusieurs variantes des structures multiplicatives (voir [Ada95, Section II.9], par exemple - notamment pour les propriétés de et les compatibilités entre ces structures).

Exemple 15.5.1. Soient E un spectre en anneaux et M un E -module. Il existe un produit *slant* naturel

$$/ : E^p(X \wedge Y) \otimes M_q(Y) \rightarrow M^{p-q}(X)$$

qui envoie $f \otimes g$, pour $f \in [X \wedge Y, E[p]]$ et $g \in [S[q], M \wedge Y]$ à f/g , représenté par la composée :

$$X \wedge S[q] \xrightarrow{X \wedge g} X \wedge M \wedge Y \cong X \wedge Y \wedge M \xrightarrow{f \wedge M} E[p] \wedge M \xrightarrow{\mu_M[p]} M[p].$$

Exemple 15.5.2. Soit E un spectre en anneaux. En prenant $X = S$ dans l'exemple précédent, on obtient l'accouplement de Kronecker :

$$E^p(X) \otimes E_q(X) \rightarrow E^{p-q}.$$

Par une adjonction dans la catégorie des E -modules, l'accouplement de Kronecker correspond à la construction suivante :

Proposition 15.5.3. Soient E un spectre en anneaux commutatif et M un E -module. Il existe un morphisme naturel de E_* -modules :

$$M^d(Y) \rightarrow \text{Hom}_{E_*}(E_*(Y), M_{*-d})$$

induit par évaluation en E -homologie : l'image de $f : X \rightarrow \Sigma^d M$ est le morphisme de E_* -modules :

$$E_*(Y) \xrightarrow{E_*(f)} E_*(\Sigma^d M) \cong \pi_{*-d}(E \wedge M) \xrightarrow{(\psi_M)_{s-d}} M_{*-d}.$$

Si E est un spectre en anneaux commutatif, le produit extérieur figure dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E^s(X) \otimes M^t(Y) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & M^{s+t}(X \wedge Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{Hom}_{E_*}(E_*(X \wedge Y), M_{*-(s+t)}) \\ & & \downarrow \zeta \\ \text{Hom}_{E_*}(E_*(X), E_{*-s}) \otimes \text{Hom}_{E_*}(E_*(Y), M_{*-t}) & \xrightarrow{\theta} & \text{Hom}_{E_*}(E_*(X) \otimes_{E_*} E_*(Y), M_{*-(s+t)}), \end{array}$$

où $\theta(\alpha : E_*(X) \rightarrow E_{*-s}, \beta : E_*(Y) \rightarrow M_{*-t})$ est le morphisme

$$E_*(X) \otimes_{E_*} E_*(Y) \xrightarrow{f \otimes g} E_{*-s} \otimes_{E_*} M_{*-t} \cong E_{*-(s+t)}$$

et le morphisme ζ est induit par le produit extérieur $E_*(X) \otimes E_*(Y) \rightarrow E_*(X \wedge Y)$.

Démonstration. (Indications.) On vérifie facilement que la recette donnée fournit une transformation naturelle

$$M^d(Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{A}b}(E_*(Y), M_{*-d}).$$

Il faut vérifier que l'image d'une classe de $M^d(Y)$ est un morphisme de E_* -modules ; ceci est une vérification élémentaire, en utilisant le fait que $E_*(f)$ est un morphisme de E_* -modules. (Ici, on n'a pas besoin de la commutativité de E .)

Ensuite, en supposant que E est commutatif, on voit que la transformation naturelle est un morphisme de E_* -modules ; pour définir la structure de E_* -module sur $M^*(Y)$, on utilise l'identification $E_* = E^{-*}$.

La démonstration de la propriété de compatibilité pour le produit extérieur est un exercice en utilisant les définitions. \square

15.6. Structures multiplicatives et tours de Postnikov. Si E est un spectre, le spectre $E_{\geq 0}$ est unique à isomorphisme près. Désormais, pour un spectre E , on fixe un choix de $E_{\geq 0}$.

Proposition 15.6.1. *Soient E un spectre en anneaux et M un E -module. Alors*

- (1) $E_{\geq 0}$ a une structure canonique de spectre en anneaux ;
- (2) $\forall n \in \mathbb{Z}, M_{\geq n}$ possède une structure canonique de $E_{\geq 0}$ -module.

Démonstration. Le spectre $E_{\geq 0} \wedge E_{\geq 0}$ est connexe, donc le morphisme de structure $\mu_E : E \wedge E \rightarrow E$ se factorise canoniquement à travers $E_{\geq 0} \rightarrow E$, par le théorème 14.2.1. De même, l'unité $\eta_E : S \rightarrow E$ se factorise canoniquement : $S \rightarrow E_{\geq 0} \rightarrow E$. On vérifie par des arguments similaires que ces morphismes induisent une structure (canonique) de spectre en anneaux sur $E_{\geq 0}$.

La démonstration que $M_{\geq n}$ est canoniquement un $E_{\geq 0}$ -module procède de la même manière. \square

Exemple 15.6.2. Soit KU le spectre qui représente la K -théorie complexe. Alors, le spectre $KU_{\geq 0}$ est le spectre de K -théorie complexe connexe, qui est dénoté fréquemment par ku (parfois par bu).

16. SPECTRES \mathbb{C} -ORIENTÉS

16.1. Orientations.

Définition 16.1.1. Soit E un spectre en anneaux commutatifs. Une orientation complexe du spectre E est une classe de cohomologie $x_E \in E^2(\mathbb{C}P^\infty)$ tel que restriction de la classe le long $S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ induite

$$\begin{aligned} E^2(\mathbb{C}P^\infty) &\rightarrow E^2(S^2) \cong E^0 \\ x_E &\mapsto 1 \in E^0. \end{aligned}$$

Un spectre \mathbb{C} -orienté est un spectre en anneaux commutatifs, muni d'une orientation x_E .

Remarque 16.1.2. Il existe un isomorphisme canonique de E^* -modules

$$E^*(\mathbb{C}P_+^\infty) \cong E^*(\mathbb{C}P^\infty) \oplus E^*.$$

Cet isomorphisme est induit par la suite cofibre $S^0 \rightarrow \mathbb{C}P_+^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ d'espaces pointés, associés à un choix de point de base de $\mathbb{C}P^\infty$. (Puisque $\mathbb{C}P^\infty$ est connexe par arcs, le choix d'un point de base est anodin). En cohomologie, on obtient une suite exacte courte de E^* -modules

$$0 \rightarrow E^*(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow E^*(\mathbb{C}P_+^\infty) \rightarrow E^*(S^0) \rightarrow 0.$$

Cette suite ne dépend pas du choix de point de base et elle est scindée canoniquement par le morphisme induit par la projection $\mathbb{C}P_+^\infty \rightarrow S^0$.

Une orientation complexe x_E d'un spectre en anneaux commutatifs induit une classe canonique dans $E^2(\mathbb{C}P_+^\infty)$ qu'on dénotera toujours x_E , dont la composante dans E^* est triviale.

Exemple 16.1.3. Le spectre MU est muni d'une orientation canonique x_{MU} . En effet, par la construction explicite du spectre MU , on a $MU_2 \cong \mathbb{C}P^\infty$ (l'espace de Thom du fibré canonique λ sur $\mathbb{C}P^\infty$ est homéomorphe à $\mathbb{C}P^\infty$). Il y a un morphisme de spectres canonique induit

$$\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty \rightarrow MU[2]$$

qui correspond à la classe x_{MU} .

Exemple 16.1.4. Les spectres \mathbf{HZ} , \mathbf{HF}_p , KU sont tous \mathbb{C} -orientés. Par contre, le spectre KO qui représente la K -théorie définie par les \mathbb{R} -fibrés vectoriels n'est pas \mathbb{C} -orienté.

Proposition 16.1.5. Soit E un spectre \mathbb{C} -orienté et F un spectre en anneaux commutatifs, muni d'un morphisme de spectres en anneaux $f : E \rightarrow F$. Alors, F est \mathbb{C} -orienté par la classe $f_*(x_E) \in F^2(\mathbb{C}P^\infty)$.

Démonstration. On vérifie directement que la classe $f_*(x_E)$ est une orientation complexe de F . \square

Exemple 16.1.6. Soient E, F deux spectres en anneaux commutatifs. Si E est \mathbb{C} -orienté, alors l'orientation complexe induit une orientation complexe de $E \wedge F$. En particulier, si E, F sont tous les deux \mathbb{C} -orientés, alors $E \wedge F$ est muni de deux orientations complexes distincts.

Corollaire 16.1.7. Soit E un spectre en anneaux commutatifs. Alors, le spectre $E \wedge MU$ est \mathbb{C} -orienté.

Démonstration. Évident. \square

Le résultat suivant montre qu'on peut toujours se ramener à l'étude des orientations de spectres connexes.

Proposition 16.1.8. Soit E un spectre \mathbb{C} -orienté. L'orientation $x_E : \Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty \rightarrow E[2]$ se factorise canoniquement

$$\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty \xrightarrow{x_E \geq 0} E_{\geq 0}[2] \xrightarrow{i \geq 0[2]} E[2].$$

Démonstration. Le spectre $\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty$ est 1-connexe et le spectre $E_{\geq 0}[2]$ est 1-connexe. En particulier $[\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty, E_{< 0}[2]] = 0 = [\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty, E_{< 0}[1]]$. Donc, la suite exacte longue induite par $[\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty, -]$ appliquée à la suite cofibre $E_{\geq 0}[2] \rightarrow E[2] \rightarrow E_{< 0}[2]$ fournit l'orientation recherchée. (On vérifie la propriété de restriction par essentiellement le même argument.) \square

16.2. Calculs.

Proposition 16.2.1. Soit E un spectre \mathbb{C} -orienté. Alors, l'orientation x_E induit un isomorphisme de E^* -algèbres :

$$E^*[[x_E]] \xrightarrow{\cong} E^*(\mathbb{C}P_+^\infty).$$

La structure de H -space de $\mathbb{C}P^\infty$, $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ (qui classifie le produit tensoriel de fibrés en droites complexes) induit une structure de loi de groupe formel sur E^* .

Démonstration. Le calcul de $E^*(\mathbb{C}P_+^\infty)$ en tant que E^* -module est facile, à l'aide de la filtration cellulaire et la suite exacte de Milnor. Il faut vérifier que la structure multiplicative est celle annoncé dans la Proposition. Ceci découle de la suite exacte de Gysin. (Ou voir [Ada95, Part I, Lemma 2.5]). \square

L'accouplement de Kronecker

$$\langle -, - \rangle : E^*(\mathbb{C}P_+^\infty) \otimes E_*(\mathbb{C}P_+^\infty) \rightarrow E_*$$

permet la définition d'une base canonique pour l'homologie $E_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$ en tant que E_* -module.

Proposition 16.2.2. Soit E un spectre \mathbb{C} -orienté. Alors, il existe un isomorphisme canonique de E_* -modules

$$E_*(\mathbb{C}P_+^\infty) \cong E_* \langle \beta_i^E \mid i \geq 0 \rangle$$

où β_i^E est l'élément unique tel que $\langle x_E^j, \beta_i^E \rangle = \delta_{ij}$.

Démonstration. Exercice. (Conséquence élémentaire de la Proposition 16.2.1.) (Voir également [Ada95, Part I, Lemma 2.14].) \square

L'orientation complexe $x_M U$ induit un morphisme de spectres

$$\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty \rightarrow MU[2]$$

(on n'a pas besoin du point de base disjoint) et, donc, pour tout spectre E , on dispose d'un morphisme

$$E_*(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow E_{*-2} MU.$$

Notation 16.2.3. Pour E un spectre \mathbb{C} -orienté, soit $b_i^E \in E_{2i} MU$ l'image de l'élément $\beta_{i+1}^E \in E_{2(i+1)}(\mathbb{C}P^\infty)$. Par construction, l'élément $b_0^E \in E_0 MU$ est l'élément neutre de l'anneau $E_* MU$.

Théorème 16.2.4. Soit E un spectre \mathbb{C} -orienté. Alors, le morphisme canonique de E_* -algèbres

$$E_*[b_j^E \mid j \geq 1] \rightarrow E_* MU$$

est un isomorphisme.

Démonstration. (Indications) On peut calculer l'homologie de $E_* MU$ en tant que E_* -module en calculant $E_*(MU_{2n})$, pour $n \in \mathbb{N}$. Par l'isomorphisme de Thom (qui est une conséquence de l'existence d'une orientation complexe), cette homologie est isomorphe à $E_*(BU(n))$. Ce dernier, on peut calculer comme pour le cas $E = \mathbf{HZ}$. Il reste à vérifier que la structure multiplicative est correcte.

(Voir [Ada95, Part I, Lemme 4.5].) \square

Exemple 16.2.5. Le théorème fournit un isomorphisme

$$MU_*MU \cong MU_*[b_j^{MU} | j \geq 1].$$

Corollaire 16.2.6. Soit E un spectre \mathbb{C} -orienté. Alors, il existe un isomorphisme canonique de E_* -algèbres

$$E_*MU \otimes_{E_*} E_*MU \xrightarrow{\cong} E_*(MU \wedge MU).$$

Démonstration. Exercice. □

Par la Proposition 15.5.3, la E -homologie donne un morphisme de E_* -modules de la E^* -cohomologie vers des morphismes de E_* -modules.

Corollaire 16.2.7. Soient E un spectre \mathbb{C} -orienté et $d \in \mathbb{Z}$ un entier. Alors, les morphismes de E_* -modules :

$$\begin{aligned} E^d(\mathbb{C}P^\infty) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{E_*}(E_*(\mathbb{C}P^\infty), E_{*-d}) \\ E^d MU &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{E_*}(E_*MU, E_{*-d}) \\ E^d(MU \wedge MU) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{E_*}(E_*(MU \wedge MU), E_{*-d}) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. Ce résultat est essentiellement une conséquence formelle du Théorème 16.2.4. (Voir [Ada95, Part I, Lemma 4.2 et Lemma 4.6].) □

Corollaire 16.2.8. Soit E un spectre \mathbb{C} -orienté. L'orientation $x_{MU} : \mathbb{C}P^\infty \rightarrow MU[2]$ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E^0(MU) & \longrightarrow & E^2(\mathbb{C}P^\infty) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Hom}_{E_*}(E_*(MU), E_*) & \longrightarrow & \text{Hom}_{E_*}(E_*(\mathbb{C}P^\infty), E_{*-2}). \end{array}$$

Démonstration. Naturalité. □

16.3. Orientations et morphismes de spectres en anneaux.

Notation 16.3.1. Pour E un spectre en anneaux commutatif, soit $\text{Orient}_{\mathbb{C}}(E)$ l'ensemble des orientations complexes de E . (Cet ensemble est non-vide si et seulement si E admet une orientation complexe.)

Notation 16.3.2. Pour A un anneau commutatif gradué, soit $\widetilde{A[[x]]}$ le sous-ensemble de $A[[x]]$ des séries formelles $\sum_{i \geq 0} a_i x^{i+1}$, où $a_0 = 1$.

Lemme 16.3.3. Soit E un spectre en anneaux commutatif, muni de deux orientations complexes $x_1, x_2 \in E^2(\mathbb{C}P^\infty)$. Alors, il existe $f_2^1, f_1^2 \in \widetilde{E^*[[x]]}$ tels que, dans $E^*(\mathbb{C}P_+^\infty)$:

$$\begin{aligned} x_2 &= f_2^1(x_1) \\ x_1 &= f_1^2(x_2). \end{aligned}$$

En particulier, f_2^1 et f_1^2 sont inverses l'un à l'autre pour la composition de séries formelles.

Démonstration. On peut identifier $E^*(\mathbb{C}P^\infty)$ avec le sous E^* -modules de $E^*[[x_1]]$, des séries dont le terme constant est trivial. Ainsi, il existe une telle série formelle f_2^1 telle que $f_2^1(x_1) = x_2$. La condition sur la restriction de l'orientation complexe à la cohomologie de S^2 entraîne que le coefficient du terme linéaire est 1. □

En particulier, on a le résultat suivant.

Lemme 16.3.4. Soient $(E, x_E), (F, x_F)$ deux spectres \mathbb{C} -orientés et $f : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres en anneaux. Alors, il existe une série formelle $\phi_f(y) = \sum_i \phi_i y^{i+1} \in F^*[[y]]$ telle que $\phi_0 = 1$ et $f(x_E) = \phi_f(x_F)$.

Démonstration. Évident. \square

Le résultat suivant est une motivation pour le résultat principal de cette section.

Lemme 16.3.5. *Soit E un spectre \mathbb{C} -orienté. Alors, il existe un isomorphisme naturel d'ensembles :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}lg_{E_*}}(E_*MU, E_*) \cong \mathrm{Orient}_{\mathbb{C}}(E).$$

Démonstration. Il existe un isomorphisme naturel d'algèbres $E_*MU \cong E_*[b_j^E | j \geq 1]$, donc par la propriété universelle des algèbres de polynômes, un morphisme d'algèbres est déterminé uniquement par l'image des générateurs. Donc, par restriction le long du morphisme $E_*(x_{MU})$ (voire le Corollaire 16.2.8) on déduit que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}lg_{E_*}}(E_*MU, E_*)$ est isomorphe au sous-ensemble des morphismes dans

$$\mathrm{Hom}_{E_*}(E_*(\mathbb{C}P^\infty), E_{*-2})$$

tels que l'image de β_1^E est $1 \in E_0$. Sous l'isomorphisme du Corollaire 16.2.7, cet sous-ensemble est isomorphe à $\mathrm{Orient}_{\mathbb{C}}(E)$. \square

Soit E un spectre en anneaux commutatif. Un morphisme de spectres $\rho : MU \rightarrow E$ induit un morphisme de E_* -modules

$$E_*MU \rightarrow E_*$$

par le Corollaire 16.2.7. Si ρ est un morphisme de spectres en anneaux, alors ce morphisme est un morphisme de E_* -algèbres.

Théorème 16.3.6. *Soit E un spectre \mathbb{C} -orienté. Alors le morphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}ing_{\mathcal{H}}}(MU, E) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}lg_{E_*}}(E_*MU, E_*)$$

est un isomorphisme.

La composition avec la bijection du Lemme 16.3.5 fournit une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}ing_{\mathcal{H}}}(MU, E) \cong \mathrm{Orient}_{\mathbb{C}}(E).$$

qui associe à un morphisme de spectres en anneaux $\rho : MU \rightarrow E$ l'orientation $\rho_(x_{MU})$.*

Démonstration. Un morphisme de \mathcal{H} , $g : MU \rightarrow E$ est un élément de E^0MU , donc, par Corollaire 16.2.7, est donné par un morphisme de E_* -modules, $\alpha_g : E_*MU \rightarrow E_*$. De manière similaire, un morphisme $MU \wedge MU \rightarrow E$ correspond à un morphisme de E_* -modules $E_*(MU \wedge MU) \rightarrow E_*$.

En particulier, la composition

$$MU \wedge MU \xrightarrow{\mu_{MU}} MU \xrightarrow{g} E$$

correspond à la composition

$$E_*MU \otimes_{E_*} E_*MU \rightarrow E_*MU \xrightarrow{\alpha_g} E_*$$

où le premier morphisme est la multiplication de l'algèbre E_*MU .

Par la Proposition 15.5.3, la composition de morphismes

$$MU \wedge MU \xrightarrow{g \wedge g} E \wedge E \xrightarrow{\mu_E} E$$

correspond au morphisme

$$E_*(MU \wedge MU) \cong E_*MU \otimes_{E_*} E_*MU \xrightarrow{\alpha_g \otimes \alpha_g} E_* \otimes_{E_*} E_* \cong E_*.$$

Un morphisme de spectres $g : MU \rightarrow E$ est un morphisme de spectres en anneaux si et seulement si les deux diagrammes suivant commutent :

$$\begin{array}{ccc} S & & MU \wedge MU \xrightarrow{g \wedge g} E \wedge E \\ \eta_{MU} \downarrow & \searrow \eta_E & \downarrow \mu_E \\ MU & \xrightarrow{g} & E \end{array} \quad \begin{array}{ccc} MU \wedge MU & \xrightarrow{g \wedge g} & E \wedge E \\ \mu_{MU} \downarrow & & \downarrow \mu_E \\ MU & \xrightarrow{g} & E \end{array}$$

Par les remarques précédentes, le carré commute si et seulement si le carré suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 E_*(MU \wedge MU) & \xrightarrow{\cong} & E_*MU \otimes_{E_*} E_*MU & \xrightarrow{\alpha_g \otimes \alpha_g} & E_* \otimes E_* \\
 & \searrow^{E_*\mu_{MU}} & \downarrow & & \downarrow \\
 & & E_*MU & \xrightarrow{\alpha_g} & E_*,
 \end{array}$$

dont les morphismes verticaux correspondent aux produits des algèbres E_*MU et E_* respectivement.

De même, le triangle commute si et seulement si le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z} & & \\
 \eta_{E_*MU} \downarrow & \searrow \eta_{E_*} & \\
 E_*MU & \xrightarrow{\alpha_g} & E_*
 \end{array}$$

commute, car le morphisme $g_* : MU_* \rightarrow E_*$ se factorise $MU_* \rightarrow E_*MU \xrightarrow{\alpha_g} E_*$. En particulier, g est un morphisme de spectres en anneaux si et seulement si α_g est un morphisme de E_* -algèbres.

L'identification entre $\text{Hom}_{\mathcal{R}ing_{\mathcal{H}}}(MU, E)$ et $\text{Orient}_{\mathbb{C}}(E)$ est une conséquence immédiate de la commutativité du diagramme du Corollaire 16.2.8. \square

Exemple 16.3.7. Le spectre \mathbf{HZ} est \mathbb{C} -orienté et est muni d'une orientation canonique, car $\text{Hom}_{\mathcal{A}lg_{\mathbb{Z}}}(\mathbf{HZ}_*MU, \mathbb{Z}) = \{*\}$. Cette orientation correspond au morphisme de Thom

$$MU \rightarrow \mathbf{HZ}.$$

Le même argument établit que le spectre \mathbf{HF}_p , p un premier, admet une orientation canonique

$$MU \rightarrow \mathbf{HF}_p.$$

Définition 16.3.8. Soit $\mathcal{R}ing_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}}$ la catégorie des spectres \mathbb{C} -orientés :

objets couples (E, x_E) , E un spectre en anneaux commutatif, x_E une orientation complexe ;

morphismes $(E, x_E) \rightarrow (F, x_F)$, un morphisme de spectres en anneaux $f : E \rightarrow F$ tel que $f_*(x_E) = x_F$.

Corollaire 16.3.9. Il y a une équivalence de catégories :

$$\mathcal{R}ing_{\mathcal{H}}^{\mathbb{C}} \cong MU/\mathcal{R}ing_{\mathcal{H}},$$

où $MU/\mathcal{R}ing_{\mathcal{H}}$ est la catégorie des spectres en anneaux en dessous de MU .

17. COOPÉRATIONS HOMOLOGIQUES

17.1. Les morphismes de structure. Soit (E, μ, η) un spectre en anneaux commutatif. On dispose des morphismes de structure suivants

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{E \wedge \eta} & E \wedge E \\ \eta \wedge E \uparrow & \circlearrowleft \tau & \downarrow E \wedge \eta \wedge E \\ E & \xrightarrow{\mu} & E \wedge E \wedge E \end{array}$$

Après passage aux groupes d'homotopie, utilisant les identifications $E_* = \pi_*(E)$ et $E_*E = \pi_*(E \wedge E)$, on obtient les morphismes d'algèbres commutatives graduées suivants :

$$\begin{array}{ccc} E_* & \xrightarrow{\eta_L} & E_*E \\ \eta_R \uparrow & \circlearrowleft \chi & \downarrow \Delta \\ E_* & \xrightarrow{\eta_R} & E_*E \end{array} \xrightarrow{\Delta} \pi_*(E \wedge E \wedge E).$$

Remarque 17.1.1. On a deux morphismes d'algèbres $\eta_L, \eta_R : E_* \rightrightarrows E_*E$ qui, en général, ne coïncident pas. Les deux correspondent via le morphisme χ , qui induit un diagramme commutatif de morphismes d'algèbres :

$$\begin{array}{ccc} & & E_*E \\ & \nearrow \eta_L & \downarrow \chi \\ E_* & & E_*E \\ & \searrow \eta_R & \downarrow \chi \\ & & E_*E \end{array}$$

En plus, χ est un isomorphisme d'algèbres - en fait une involution - car $\chi^2 = 1_{E_*E}$.

Par restriction de structure, on peut considérer E_*E comme un E_* -bimodule : la structure de module à gauche est induites par η_L et la structure à droite par η_R . Le morphisme $\chi : E_*E \rightarrow E_*E$ n'est pas un isomorphisme de bimodules car il échange les structures. Par contre, $\chi : (E_*E)_g \rightarrow (E_*E)_d$ est un isomorphisme de E_* -modules où les indexes $_g$ et $_d$ indiquent quelle structure est utilisée.

17.2. Spectres en anneaux plats. On va considérer l'anneau E_*E comme l'anneau des *coopérations homologiques* pour la théorie E . Cependant, afin de pouvoir utiliser cette structure, on a besoin de pouvoir exprimer $\pi_*(E \wedge E \wedge E)$ en termes de E_* et E_*E .

Définition 17.2.1. Soit E un spectre en anneaux commutatif. Alors E est plat si E_*E est plat en tant que E_* -module à gauche (ou, condition équivalente par Remarque 17.1.1, E_*E est plat en tant que E_* -module à droite).

Soit X un spectre ; il existe isomorphismes naturels

$$E_*(E \wedge X) \cong \pi_*(E \wedge E \wedge X) \cong (E \wedge E)_*(X)$$

et, en particulier $E_*(E \wedge X)$ est un E_*E -module. Donc, on dispose (par induction) d'un morphisme naturel de E_*E -modules

$$E_*E \otimes_{E_*} E_*(X) \rightarrow (E \wedge E)_*(X) \cong E_*(E \wedge X).$$

Proposition 17.2.2. Soit E un spectre en anneaux commutatif et plat. Alors, pour tout objet $X \in \text{Ob } \mathcal{LH}$, le morphisme naturel

$$E_*E \otimes_{E_*} E_*(X) \rightarrow \pi_*(E \wedge E \wedge X)$$

est un isomorphisme de E_*E -modules.

Démonstration. Par un argument évident de passage à la colimite, il suffit de démontrer le résultat lorsque X est un CW-spectre qui admet une filtration cellulaire de longueur finie. Le cas d'une filtration cellulaire de longueur une correspond au cas $X = \bigvee_i S^{n_i}$, un bouquet de sphères. Le résultat est établi en ce cas par l'additivité des théories de cohomologie considérées et le fait que le produit tensoriel commute aux sommes directes.

Pour démontrer le cas général, on utilise un argument de récurrence standard, basé sur la longueur de la filtration cellulaire. Soit $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ une suite cofibre, et supposer que la transformation naturelle est un isomorphisme pour X et Y . Alors, il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots (E_*E \otimes_{E_*} E_*(X))_n & \longrightarrow & (E_*E \otimes_{E_*} E_*(Y))_n & \longrightarrow & (E_*E \otimes_{E_*} E_*(Z))_n & \longrightarrow & \dots \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots (E \wedge E)_n(X) & \longrightarrow & (E \wedge E)_n(Y) & \longrightarrow & (E \wedge E)_n(Z) & \longrightarrow & \dots, \end{array}$$

dont les lignes sont exactes, par les suites exactes longues en homologie pour E et pour $E \wedge E$ et le fait que le foncteur $E_*E \otimes_{E_*} -$ est exact, par hypothèse.

Par l'hypothèse sur X, Y , les morphismes verticaux qui correspondent à ces spectres sont des isomorphismes. Ainsi, par le lemme des cinq, le morphisme $(E_*E \otimes_{E_*} E_*Z)_n \rightarrow (E \wedge E)_n(Z)$ est un isomorphisme. \square

Corollaire 17.2.3. Soit E un spectre en anneaux commutatifs et plats. Alors, il existe des isomorphismes naturels, pour $1 \leq n \in \mathbb{Z}$:

$$\pi_* \underbrace{(E \wedge \dots \wedge E)}_{n+1} \cong \underbrace{E_*E \otimes_{E_*} E_*E \otimes_{E_*} \dots \otimes_{E_*} E_*E}_n,$$

où chaque produit tensoriel $E_*E \otimes_{E_*} E_*E$ correspond au produit tensoriel $(E_*E)_d \otimes_{E_*} (E_*E)_g$.

Exemple 17.2.4. Les spectres en anneaux commutatifs suivants sont plats :

- (1) \mathbf{HF}_p , p un nombre premier
- (2) KU
- (3) MU .

Par contre, le spectre \mathbf{HZ} n'est pas plat.

17.3. La structure algébrique. Soit E un spectre en anneaux commutatifs et plats. Alors, les morphismes de structure s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} E_* & \xrightarrow{\eta_L} & E_*E \\ & \searrow \eta_R & \uparrow \epsilon \\ & & E_*E \end{array} \xrightarrow{\Delta} E_*E \otimes_{E_*} E_*E.$$

(avec un arc X de E_*E à E_*E et un arc ϵ de E_*E à E_*)

Ces morphismes définissent une structure algébrique qu'on appelle un algébroïde de Hopf. Pour expliquer la forme de cette structure, on considère d'abord les algèbres de Hopf.

Définition 17.3.1. Soit R un anneau commutatif. Une algèbre de Hopf commutative graduée est une R -algèbre commutative graduée (unité $\eta : R \rightarrow A$, munie de morphismes d'algèbres $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes_R A$ (coproduit), $A \xrightarrow{X} A$ (conjugaison), $A \xrightarrow{\epsilon} R$ (augmentation) tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \text{counité} \\ & \swarrow = & \downarrow \Delta & \searrow = & \\ A & \xleftarrow{A \otimes \epsilon} & A \otimes_R A & \xrightarrow{\epsilon \otimes A} & A, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes_R A & \text{coassociativité} \\
 \Delta \downarrow & & \downarrow A \otimes \Delta \\
 A \otimes_R A & \xrightarrow{\Delta \otimes A} & A \otimes_R A \otimes_R A
 \end{array}$$

et la conjugaison donne :

$$\begin{aligned}
 1_A &= \mu \circ (\chi \otimes 1_A) \circ \Delta \\
 &= \mu \circ (1_A \otimes \chi) \circ \Delta.
 \end{aligned}$$

Notation 17.3.2. Pour R un anneau commutatif, soit $\mathcal{A}lg_R$ la catégorie des R -algèbres graduées commutatives.

Lemme 17.3.3. Soit R un anneau commutatif. Le produit tensoriel (gradué) est le coproduit dans la catégorie $\mathcal{A}lg_R$.

Démonstration. Soient B, C deux algèbres commutatives graduées. Alors $B \otimes_R C$ a la structure d'une R -algèbre commutative graduée, et les morphismes $R \rightarrow B, R \rightarrow C$ induisent des morphismes naturels $B \rightarrow B \otimes_R C \leftarrow C$ d'algèbres commutatives graduées.

Soient $f : B \rightarrow D, g : C \rightarrow D$ deux morphismes de R -algèbres commutatives graduées, alors le morphisme $f \otimes g : B \otimes_R C \rightarrow D$, défini par $(f \otimes g)(b \otimes c) = f(b)g(c)$ est un morphisme de R -algèbres graduées commutatives. On vérifie que cette construction est universelle. \square

Proposition 17.3.4. Une R -algèbre de Hopf graduée commutative est équivalente à un objet cogroupe de la catégorie $\mathcal{A}lg_R$. En particulier $A \in \text{Ob} \mathcal{A}lg_R$ est une algèbre de Hopf commutative graduée si et seulement si le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{A}lg_R}(A, -)$ prend ses valeurs dans la catégorie des groupes.

Démonstration. Exercice. \square

Définition 17.3.5. Un groupoïde est une catégorie dont chaque morphisme est inversible ; un groupoïde est petit si les objets forment un ensemble.

Remarque 17.3.6. Un groupoïde petit est défini par un couple d'ensembles (O, M) , qui représentent l'ensemble des objets et l'ensemble de tous les morphismes. La structure du groupoïde est donnée par les applications :

$$M^t \times_O {}^s M \xrightarrow{m} M \begin{array}{c} \xrightarrow{s} O \\ \xleftarrow{t} O \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{c} \\ \curvearrowright \\ \text{i} \end{array}$$

où m est la composition, $s, t : M \rightrightarrows O$ la source et but d'un morphisme, c l'inverse d'un morphisme et i le morphisme identité associé à un objet. Noter que le produit fibré $M^t \times_O {}^s M$ correspond à l'ensemble de couples de morphismes qui sont composables.

Ces morphismes satisfont les axiomes évidents (exercice : préciser les axiomes !).

Définition 17.3.7. Un R -algébroïde de Hopf est un couple d'objets (A, Γ) de la catégorie $\mathcal{A}lg_R$ muni de morphismes de structure $\Delta : \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes_A \Gamma, \eta_L, \eta_R : A \rightrightarrows \Gamma, \chi : \Gamma \rightarrow \Gamma, \epsilon : \Gamma \rightarrow A$ qui définissent un objet cogroupoïde de la catégorie $\mathcal{A}lg_R$.

L'algébroïde de Hopf (A, Γ) est plat si Γ est un A -module plat par rapport à la structure donnée par η_L .

Remarque 17.3.8. Une R -algèbre de Hopf graduée commutative est un exemple d'un R -algébroïde de Hopf. (Observer qu'on peut considérer un groupe comme un groupoïde à un seul objet.)

Théorème 17.3.9. Soit E un spectre en anneaux commutatif et plat. Alors (E_*, E_*E) admet une structure canonique d'algébroïde de Hopf plat.

Démonstration. Exercice. \square

Exemple 17.3.10.

- (1) Soit p un nombre premier. Alors $\mathcal{A}_* := \mathbf{HF}_{p*}\mathbf{HF}_p$ est une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf graduée commutative. Cette algèbre de Hopf est la duale de l'algèbre de Steenrod.
- (2) L'algébroïde de Hopf (MU_*, MU_*MU) représente, par le théorème de Quillen, le groupoïde des lois de groupe formel et leurs isomorphismes stricts.

17.4. Comodules.

Définition 17.4.1. Soient R un anneau commutatif et (A, Γ) un algébroïde de Hopf dans $\mathcal{A}lg_R$.

- (1) Un Γ -comodule à gauche est un A -modules M muni d'un morphisme de structure $\psi_M : M \rightarrow \Gamma \otimes_A M$ qui est un morphisme de A -modules tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi_M} & \Gamma \otimes_A M \\ & \searrow & \downarrow \epsilon \otimes M \\ & = & M, \end{array} \quad \text{Counité}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi_M} & \Gamma \otimes_A M \\ \psi_M \downarrow & & \downarrow \Gamma \otimes \psi_M \\ \Gamma \otimes_A M & \xrightarrow[\Delta \otimes M]{} & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A M. \end{array} \quad \text{Coassociativité}$$

- (2) Soient M, N deux Γ -comodules à gauche. Un morphisme de Γ -comodules $f : M \rightarrow N$ est un morphisme f des A -modules sous-jacents tel que $\psi_N \circ f = (\Gamma \otimes f) \circ \psi_M$.

Remarque 17.4.2. Si l'algébroïde de Hopf (A, Γ) a la forme (A, H) , où H est une R -algèbre de Hopf gradué commutative, alors un H -comodule en tant qu'algébroïde de Hopf est équivalent à un H -comodule (au sens habituel).

Proposition 17.4.3. Soient R un anneau commutatif et (A, Γ) un algébroïde de Hopf dans $\mathcal{A}lg_R$.

- (1) Les Γ -comodules à gauche forment une catégorie ${}_{\Gamma}\mathbf{Comod}$.
- (2) Si (A, Γ) est plat, il existe une structure unique de catégorie abélienne sur ${}_{\Gamma}\mathbf{Comod}$ telle que le foncteur oubli

$${}_{\Gamma}\mathbf{Comod} \rightarrow {}_A\mathbf{Mod}$$

est exact.

Démonstration. Exercice. \square

Théorème 17.4.4. Soit E un spectre en anneaux commutatif et plat. Alors l'homologie $E_* : \mathcal{L}\mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$ prend ses valeurs dans la catégorie ${}_{E_*E}\mathbf{Comod}$. Pour $X \in \text{Ob}\mathcal{L}\mathcal{H}$ un spectre, le morphisme de structure de $E_*(X)$ est donné par

$$\begin{array}{ccc} E_*(X) & \xrightarrow{\psi} & E_*E \otimes_{E_*} E_*(X) \\ \cong \downarrow & & \uparrow \cong \\ \pi_*(E \wedge X) & \xrightarrow[\pi_*(E \wedge \eta \wedge X)]{} & \pi_*(E \wedge E \wedge X). \end{array}$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 17.4.5. Par le Théorème 17.4.4, la théorie d'homologie associée à un spectre en anneaux commutatif et plat induit un foncteur

$$E_* : \mathcal{SH} \rightarrow {}_{E_*E}\mathcal{Comod}.$$

Ce foncteur conserve bien plus de renseignements sur la catégorie \mathcal{SH} que le foncteur naïf :

$$E_* : \mathcal{SH} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}.$$

Par exemple, le morphisme de Hopf $\eta : S^3 \rightarrow S^2$ induit une suite cofibre

$$S^3 \xrightarrow{\eta} S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2.$$

Le morphisme η induit le morphisme trivial $\mathbf{HF}_{2*}(\eta)$ et, donc, on obtient une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbf{HF}_{2*}(S^2) \rightarrow \mathbf{HF}_{2*}(\mathbb{C}P^2) \rightarrow \mathbf{HF}_{2*}(S^4) \rightarrow 0.$$

En tant que suite exacte courte de groupes abéliens gradués, cette suite se scinde. Par contre, elle n'est pas scindée dans la catégorie $\mathbf{HF}_{2*}\mathbf{HF}_2\mathcal{Comod}$ - donc les coopérations permettent la détection du morphisme η !

18. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE MU_*MU

18.1. **Rappels.** On n'a pas encore déterminé la structure de MU_* ; par contre, on sait que, en tant que MU_* -algèbre (par rapport à la structure de MU_* -module à gauche), il existe un isomorphisme

$$MU_*MU \cong MU_*[b_i | i \geq 1],$$

où on écrit b_i pour la classe b_i^{MU} qui est, par définition, l'image de la classe $\beta_{i+1}^{MU} \in MU_*(\mathbb{C}P^\infty)$ par l'application induite par l'orientation complexe, $MU_*(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow MU_{*-2}MU$.

Remarque 18.1.1. Cette observation entraîne que MU est un spectre en anneaux commutatifs qui est plat, donc (MU_*, MU_*MU) a la structure d'un algébroïde de Hopf. Le morphisme diagonal est le morphisme en homotopie induit par $MU \wedge \eta \wedge MU : MU \wedge MU \rightarrow MU \wedge MU \wedge MU$, et il est de la forme :

$$MU_*MU \cong MU_*[b_i] \rightarrow MU_*MU \otimes_{MU_*} MU_*MU \cong MU_*[b_i] \otimes \mathbb{Z}[b'_i] \cong MU_*[b_i, b'_i],$$

qui est un morphisme de MU_* -algèbres.

Donc, le morphisme diagonal est déterminé par l'image des générateurs $b_i \in MU_{2i}MU$ dans $MU_*[b_i, b'_i]$.

18.2. **Résultats généraux sur les spectres \mathbb{C} -orientés.** Soit (E, x_E) un spectre \mathbb{C} -orienté; l'orientation complexe induit un isomorphisme d'algèbres $E^*(\mathbb{C}P_+^\infty) \cong E^*[[x_E]]$. L'homologie $E_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$ est un E_* -module gradué libre, et il existe un isomorphisme canonique de E_* -modules

$$E_*(\beta_i^E | i \geq 0) \xrightarrow{\cong} E_*(\mathbb{C}P_+^\infty),$$

où la classe β_i^E est duale, par rapport à l'accouplement de Kronecker $E_*(\mathbb{C}P_+^\infty) \otimes E^*(\mathbb{C}P_+^\infty) \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle^E} E_*$, à la classe x_E^i . En particulier, l'accouplement de Kronecker induit un isomorphisme

$$E^d(\mathbb{C}P_+^\infty) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{E_*}(E_*(\mathbb{C}P_+^\infty), E_{*-d})$$

qui envoie une classe de cohomologie $f : \mathbb{C}P_+^\infty \rightarrow \Sigma^d E$ à la composition :

$$E_*(\mathbb{C}P_+^\infty) \xrightarrow{E_*f} E_*(\Sigma^d E) \cong E_{*-d}E \xrightarrow{\epsilon} E_*.$$

En particulier, cet isomorphisme envoie la classe $x_E^i \in E^{2i}(\mathbb{C}P_+^\infty)$ au morphisme de E_* -modules défini par :

$$\beta_n^E \mapsto \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

par définition des classes β_i^E .

Lemme 18.2.1. Soient (E, x_E) un spectre \mathbb{C} -orienté et $g : E \rightarrow F$ un morphisme de spectres en anneaux. Alors, g induit une structure de spectre \mathbb{C} -orienté $(F, x_F := g_*x_E)$ et, par rapport à l'orientation x_F de F , on a

$$\begin{aligned} \beta_i^F &= g_*(\beta_i^E) \in F_{2i}(\mathbb{C}P_+^\infty) \\ b_i^F &= g_*(b_i^E) \in F_{2i}MU. \end{aligned}$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 18.2.2. Le morphisme $g_* : E_*MU \rightarrow F_*MU$ est le morphisme unique de E_* -algèbres tel que $b_i^E \mapsto b_i^F$.

Si (E, x_E) est un spectre \mathbb{C} -orienté, alors le spectre $E \wedge MU$ est muni de deux orientations différentes, qui sont induits par les morphismes de spectres en anneaux

$$MU \xrightarrow[\eta_{E \wedge MU}]{x_E \wedge \eta_{MU}} E \wedge MU,$$

et qu'on dénotera (par abus de notation) $(E \wedge MU, x_E)$ et $(E \wedge MU, x_{MU})$.

Le résultat suivant est fondamental.

Proposition 18.2.3. *Soit (E, x_E) un spectre \mathbb{C} -orienté. Alors le morphisme*

$$(E \wedge MU)^d(\mathbb{C}P_+^\infty) \rightarrow \text{Hom}_{E_*}(E_*(\mathbb{C}P_+^\infty), (E \wedge MU)_{*-d})$$

qui envoie une classe de cohomologie $f : \mathbb{C}P_+^\infty \rightarrow \Sigma^d E \wedge MU$ à la composition

$$\begin{array}{ccc} E_*(\mathbb{C}P_+^\infty) & \xrightarrow{E_* f} & E_*(\Sigma^d E \wedge MU) \\ & & \downarrow \cong \\ & & (E \wedge E \wedge MU)_{*-d} \xrightarrow{\mu_{E \wedge MU}} (E \wedge MU)_{*-d} \end{array}$$

est un isomorphisme.

Cet isomorphisme envoie la classe $x_E^i \in (E \wedge MU)^{2i}(\mathbb{C}P_+^\infty)$ au morphisme de E_* -modules induit par

$$\beta_n^E \mapsto \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. (Indications.) L'isomorphisme correspond à l'isomorphisme

$$(E \wedge MU)^d(\mathbb{C}P_+^\infty) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{(E \wedge MU)_*}((E \wedge MU)_*(\mathbb{C}P_+^\infty), (E \wedge MU)_{*-d})$$

(le morphisme ne dépend pas du choix d'orientation complexe).

On utilise le fait qu'il existe un isomorphisme canonique de $(E \wedge MU)_*$ -modules

$$(E \wedge MU)_* \otimes_{E_*} E_*(\mathbb{C}P_+^\infty) \xrightarrow{\cong} (E \wedge MU)_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$$

qui envoie β_i^E à la classe β_i^E de $(E \wedge MU)_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$ qui correspond à l'orientation $(E \wedge MU, x_E)$. Le foncteur $(E \wedge MU)_* \otimes_{E_*} -$ est l'adjoint à gauche du foncteur oubli de la catégorie des $(E \wedge MU)_*$ -modules vers les E_* -modules, donc on obtient l'isomorphisme recherché.

Le calcul de l'image de la classe $x_E^i \in (E \wedge MU)^{2i}(\mathbb{C}P_+^\infty)$ est élémentaire. \square

Corollaire 18.2.4. *Soit (E, x_E) un spectre \mathbb{C} -orienté et soient $(E \wedge MU, x_E)$, $(E \wedge MU, x_{MU})$ les deux orientations de $E \wedge MU$ associées. Alors, dans $(E \wedge MU)^2(\mathbb{C}P_+^\infty)$, on a*

$$x_{MU} = b^E(x_E) := \sum_{i \geq 0} b_i^E x_E^{i+1}.$$

Démonstration. Par définition des classes b_i^E , on voit que x_{MU} correspond au morphisme de $\text{Hom}_{E_*}(E_*(\mathbb{C}P_+^\infty), (E \wedge MU)_{*-2})$ qui envoie β_0^E à zéro et $\beta_{i+1}^E \mapsto b_i^E$ pour $i \geq 0$. Le résultat en découle. (Exercice!) \square

Remarque 18.2.5. Les générateurs b_i^E de $E_* MU$ définissent une série formelle $b^E(t) := \sum_{i \geq 0} b_i^E t^{i+1}$ sans terme constant et telle que $(b^E)'(0) = 1$. Ceci explique la notation utilisée dans l'énoncé du Corollaire.

Notation 18.2.6. Soit $\phi(t) \in R[[t]]$ une série formelle. On écrit $\phi_{[s]}$ pour le coefficient de t^s dans la série formelle. Donc, pour tout nombre naturel $j \in \mathbb{N}$, $\phi_{[s]}^j$ est le coefficient de t^s dans la série formelle $\phi(t)^j$.

Le corollaire 18.2.4 fournit une relation entre les générateurs β_i^E et β_i^{MU} de $(E \wedge MU)_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$, par dualité.

Proposition 18.2.7. Soit (E, x_E) un spectre \mathbb{C} -orienté et soient $(E \wedge MU, x_E)$, $(E \wedge MU, x_{MU})$ les deux orientations de $E \wedge MU$ associées, qui fournissent les systèmes de générateurs $\{\beta_i^E | i \geq 0\}$, $\{\beta_i^{MU} | i \geq 0\}$ de $(E \wedge MU)_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$. Alors

$$\beta_s^E = \sum_{j \geq 0} (b^E)_{[s]}^j \beta_j^{MU} = \sum_{j=0}^s (b^E)_{[s]}^j \beta_j^{MU}.$$

Démonstration. Par le corollaire 18.2.4, on a

$$x_{MU}^j = b^E(x_E)^j$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$.

On sait qu'on peut écrire $\beta_s^E = \sum_{j \geq 0} c_s^j \beta_j^{MU}$, où les coefficients $\{c_s^j\}$ de $(E \wedge MU)_*$ sont donnés par $c_s^j = \langle \beta_s^E, x_{MU}^j \rangle$. Le résultat s'en déduit immédiatement. \square

18.3. Coproduits pour MU . Le coproduit de l'algèbroïde de Hopf (MU_*, MU_*MU) peut être déterminé à l'aide des résultats de la section précédente. D'abord, on considère le morphisme de structure ψ pour le comodule $MU_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$. Par définition, ce morphisme figure dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} MU_*(\mathbb{C}P_+^\infty) & \xrightarrow{(MU \wedge \eta)_*} & (MU \wedge MU)_*(\mathbb{C}P_+^\infty) \\ & \searrow \psi & \uparrow \cong \\ & & MU_*MU \otimes_{MU_*} MU_*(\mathbb{C}P_+^\infty) \end{array}$$

où le morphisme vertical est l'isomorphisme de MU_*MU -modules qui est induit par le morphisme de MU_* -modules $MU_*(\mathbb{C}P_+^\infty) \rightarrow (MU \wedge MU)_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$ induit par $MU \wedge \eta$ (en particulier, on utilise la structure de module à droite sur $(MU \wedge MU)_*$).

Pour calculer le morphisme ψ , qui est un morphisme de MU_* -modules, il suffit de préciser l'image des générateurs β_i^{MU} dans $(MU \wedge MU)_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$. Par functorialité, $\beta_i^{MU} \mapsto \beta_i^{MU,L}$, le générateur défini par rapport à l'orientation à gauche de $MU \wedge MU$. Par contre, par rapport à l'isomorphisme vertical, il faut l'exprimer en termes des générateurs $\beta_*^{MU,R}$, qui correspondent à l'orientation à droite.

Notation 18.3.1. Pour simplifier la notation, écrivons $\beta_s \in MU_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$ et $b_t \in MU_*MU$ pour les éléments β_s^{MU} et b_t^{MU} respectivement. La série formelle $\sum_{j \geq 0} b_j t^{j+1}$ sera toujours dénotée $b^{MU}(t)$, pour éviter de la confusion éventuelle.

Proposition 18.3.2. Le morphisme de structure $\psi : MU_*(\mathbb{C}P_+^\infty) \rightarrow MU_*MU \otimes_{MU_*} MU_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$ est déterminé par

$$\psi \beta_s = \sum_{j \geq 0} (b^{MU})_{[s]}^j \otimes \beta_j.$$

Démonstration. Conséquence immédiate de la Proposition 18.2.7. \square

Remarque 18.3.3. On peut considérer b^{MU} comme une somme formelle graduée $\sum_{i \geq 0} b_i$, où $|b_i| = i$ et $(b^{MU})^j$ comme la somme formelle graduée $(\sum_{i \geq 0} b_i)^j$. (La graduation remplace le variable de la série formelle). Alors, le coefficient $(b^{MU})_{[s]}^j$ est égal au terme de degré $s - j$ de $(\sum_{i \geq 0} b_i)^j$. C'est cette notation qui est utilisée par exemple dans [Ada95, Section II.11].

Corollaire 18.3.4. Le morphisme diagonal

$$\Delta : MU_*MU \rightarrow MU_*MU \otimes_{MU_*} MU_*MU$$

est déterminé par

$$\Delta b_n = \sum (b^{MU})_{[n+1]}^{j+1} \otimes b_j.$$

Démonstration. Exercice! □

Remarque 18.3.5. Si on utilise la graduation introduite dans la remarque 18.3.3, cette expression devient

$$\Delta b_n = \sum (b^{MU})_{n-j}^{j+1} \otimes b_j.$$

19. L'ALGÈBRE DE STEENROD

19.1. Opérations stables cohomologiques.

Définition 19.1.1. Soit p un nombre premier. L'algèbre de Steenrod (sur \mathbb{F}_p) est la \mathbb{F}_p -algèbre graduée

$$\mathcal{A} := [\Sigma^* \mathbf{H}\mathbb{F}_p, \mathbf{H}\mathbb{F}_p]$$

des opérations cohomologiques stables. La structure d'algèbre est donnée par la composition des morphismes.

Remarque 19.1.2. Cette algèbre n'est pas graduée commutative.

Exercice 19.1.3. Démontrer que \mathcal{A} est une \mathbb{F}_p -algèbre associative.

Proposition 19.1.4. La cohomologie modulo p , $\mathbf{H}\mathbb{F}_p^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{Ab}^{\text{gr}}$, prend ses valeurs dans la catégorie des \mathcal{A} -modules (gradués). En particulier, si X est un spectre, alors $\mathbf{H}\mathbb{F}_p^* X$ est muni d'une structure naturelle de \mathcal{A} -module :

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbf{H}\mathbb{F}_p^* X \rightarrow \mathbf{H}\mathbb{F}_p^* X.$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 19.1.5. L'algèbre de Steenrod est de type fini : en chaque degré d , l'espace vectoriel \mathcal{A}^d est de dimension finie. On en déduit que l'homologie $(\mathbf{H}\mathbb{F}_p)_* \mathbf{H}\mathbb{F}_p$ est isomorphe (en tant qu'espace vectoriel gradué) à $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{A}, \mathbb{F}_p)$, l'espace vectoriel dual de \mathcal{A} . (Exercice : préciser les graduations.)

Rappeler que $\mathbf{H}\mathbb{F}_p$ est un spectre en anneaux commutatif et donc $\mathbf{H}\mathbb{F}_p \wedge \mathbf{H}\mathbb{F}_p$ l'est aussi. Par conséquent, $(\mathbf{H}\mathbb{F}_p)_* \mathbf{H}\mathbb{F}_p$ est une \mathbb{F}_p -algèbre graduée commutative.

Notation 19.1.6. On écrit \mathcal{A}^* pour la \mathbb{F}_p -algèbre graduée commutative $(\mathbf{H}\mathbb{F}_p)_* \mathbf{H}\mathbb{F}_p$, l'algèbre de Steenrod duale.

Lemme 19.1.7. Soit X un spectre. Il existe un isomorphisme naturel

$$\mathbf{H}\mathbb{F}_p^*(\mathbf{H}\mathbb{F}_p \wedge X) \cong \mathcal{A}^* \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbf{H}\mathbb{F}_p^* X.$$

Démonstration. Exercice. □

19.2. Algèbres de Hopf (graduées commutatives). On fixe un anneau commutatif unitaire R (non-gradué). (Par exemple, on peut prendre $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{F}_p$).

Notation 19.2.1. Pour R un anneau commutatif, soit $\mathcal{A}l\mathfrak{g}_R$ la catégorie des R -algèbres graduées commutatives.

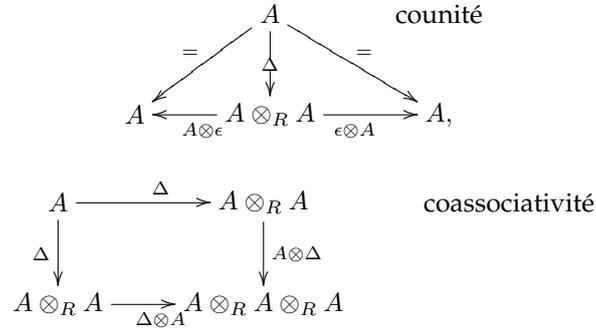
Lemme 19.2.2. Soit R un anneau commutatif. Le produit tensoriel (gradué) est le coproduit dans la catégorie $\mathcal{A}l\mathfrak{g}_R$.

Démonstration. Soient B, C deux algèbres commutatives graduées. Alors $B \otimes_R C$ a la structure d'une R -algèbre commutative graduée, et les morphismes $R \rightarrow B$, $R \rightarrow C$ induisent des morphismes naturels $B \rightarrow B \otimes_R C \leftarrow C$ d'algèbres commutatives graduées.

Soient $f : B \rightarrow D$, $g : C \rightarrow D$ deux morphismes de R -algèbres commutatives graduées, alors le morphisme $f \otimes g : B \otimes_R C \rightarrow D$, défini par $(f \otimes g)(b \otimes c) = f(b)g(c)$ est un morphisme de R -algèbres graduées commutatives. On vérifie que cette construction est universelle. □

Définition 19.2.3. Soit R un anneau commutatif. Une algèbre de Hopf commutative graduée est une R -algèbre commutative graduée (unité $\eta : R \rightarrow A$, munie de

morphismes d'algèbres $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes_R A$ (coproduit), $A \xrightarrow{\chi} A$ (conjugaison), $A \xrightarrow{\epsilon} R$ (augmentation) tels que les diagrammes suivants commutent :



et la conjugaison donne :

$$\begin{aligned}
 1_A &= \mu \circ (\chi \otimes 1_A) \circ \Delta \\
 &= \mu \circ (1_A \otimes \chi) \circ \Delta.
 \end{aligned}$$

Notation 19.2.4. Pour A une R -algèbre de Hopf graduée commutative, on écrit \bar{A} pour le noyau de l'augmentation $\epsilon : A \rightarrow R$, de telle sorte que $A \cong \bar{A} \oplus R$ en tant que R -modules (exercice !).

Exemple 19.2.5. L'algèbre de Steenrod duale, \mathcal{A}^* , est une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf graduée commutative. Par le lemme 19.1.7, il existe un isomorphisme $\pi_*(\mathbf{H}\mathbb{F}_p \wedge \mathbf{H}\mathbb{F}_p \wedge \mathbf{H}\mathbb{F}_p) \cong \mathcal{A}^* \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{A}^*$ et les morphismes de structure sont les morphismes induits en homotopie suivants

- augmentation : induit par le produit $\mathbf{H}\mathbb{F}_p \wedge \mathbf{H}\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbf{H}\mathbb{F}_p$;
- conjugaison : induit par la transposition des facteurs $\tau : \mathbf{H}\mathbb{F}_p \wedge \mathbf{H}\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbf{H}\mathbb{F}_p \wedge \mathbf{H}\mathbb{F}_p$;
- coproduit : induit par $\mathbf{H}\mathbb{F}_p \wedge \eta \wedge \mathbf{H}\mathbb{F}_p : \mathbf{H}\mathbb{F}_p \wedge \mathbf{H}\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbf{H}\mathbb{F}_p \wedge \mathbf{H}\mathbb{F}_p \wedge \mathbf{H}\mathbb{F}_p$.

(Exercice : vérifier que ces morphismes induisent une structure d'algèbre de Hopf.)

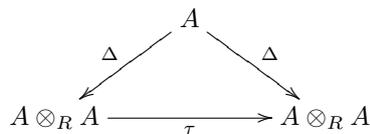
Proposition 19.2.6. Une R -algèbre de Hopf graduée commutative est équivalente à un objet cogroupe de la catégorie $\mathcal{A}lg_R$. En particulier $A \in \text{Ob}\mathcal{A}lg_R$ est une algèbre de Hopf graduée commutative si et seulement si le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{A}lg_R}(A, -)$ prend ses valeurs dans la catégorie des groupes.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 19.2.7. Soient A_1, A_2 deux R -algèbres de Hopf graduées commutatives. Alors l'algèbre $A_1 \otimes_R A_2$ est muni d'une structure naturelle d'algèbre de Hopf graduée commutative qui représente le foncteur $S \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}lg_R}(A_1, S) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}lg_R}(A_2, S)$ à valeurs dans la catégorie des groupes.

Démonstration. Exercice. □

Définition 19.2.8. Une R -algèbre de Hopf graduée commutative A est graduée co-commutative (et donc graduée bicommutative) si le diagramme suivant commute :



où τ transpose les facteurs (utilisant les signes de Koszul associées à la graduation).

Exercice 19.2.9. Soient $R = \mathbb{F}$ un corps (quelconque) et A une \mathbb{F} -algèbre de Hopf graduée bicommutative de type fini. Montrer que $A^* := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(A, \mathbb{F})$ a une structure canonique d'algèbre de Hopf graduée bicommutative de type fini.

Montrer que A est isomorphe, en tant qu'algèbre de Hopf graduée bicommutative, à $(A^*)^*$.

Remarque 19.2.10. Le morphisme diagonal est un morphisme d'algèbres, donc est déterminé par sa restriction à un sous R -module gradué $Q \subset \bar{A}$ tel que les éléments de Q engendrent A en tant qu'algèbre.

Définition 19.2.11. Soit A une \mathbb{F} -algèbre de Hopf graduée commutative.

- (1) Un élément homogène de A est primitif si $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.
- (2) L'algèbre de Hopf A est primitivement engendrée s'il existe un sous-espace vectoriel gradué $V \leq \bar{A}$ qui engendre A et tel que tout élément homogène $x \in V$ est primitif.

Exercice 19.2.12. Soit A une \mathbb{F} -algèbre de Hopf graduée commutative. Montrer que

- (1) les éléments primitifs de A forment un sous-espace vectoriel gradué $PA \leq \bar{A}$;
- (2) l'algèbre A est primitivement engendrée si et seulement si les éléments de l'espace PA engendrent A ;
- (3) si A est primitivement engendrée, alors A est graduée bicommutative.

Exemple 19.2.13. Soit \mathbb{F} un corps.

- (1) L'algèbre graduée polynomiale $\mathbb{F}[x]$, x un élément homogène de degré pair, est munie d'une structure canonique d'algèbre de Hopf graduée commutative pour laquelle x est primitif.
- (2) L'algèbre extérieure $\Lambda(y)$, y un élément de degré impair, est munie d'une structure canonique d'algèbre de Hopf graduée commutative pour laquelle y est un élément primitif. (L'espace vectoriel gradué sous-jacent à $\Lambda(y)$ est $\mathbb{F} \oplus \mathbb{F}\langle y \rangle$).

Les algèbres ci-dessus sont des algèbres graduées commutatives libres. En général, pour tout espace vectoriel gradué V , l'algèbre graduée commutative libre sur V , $\mathbb{L}(V)$, est canoniquement une algèbre de Hopf primitivement engendrée. (L'algèbre $\mathbb{L}(V)$ est isomorphe au produit tensoriel de l'algèbre symétrique $S^*(V_{\text{pair}})$ et de l'algèbre extérieure $\Lambda(V_{\text{impair}})$, où $V \cong V_{\text{pair}} \oplus V_{\text{impair}}$ est la décomposition évidente de l'espace vectoriel gradué V .)

Exercice 19.2.14. Soit \mathbb{F} un corps.

- (1) Soient A, B deux \mathbb{F} -algèbres de Hopf graduées commutatives connexes et de type fini (de dimension finie en chaque degré et trivial en degrés négatifs). Montrer que l'algèbre de Hopf $(A \otimes_{\mathbb{F}} B)^*$ est naturellement équivalente à $A^* \otimes_{\mathbb{F}} B^*$.
- (2) Montrer que la \mathbb{F} -algèbre de Hopf duale $\Lambda(y)^*$ est une algèbre extérieure $\Lambda(y^*)$.
- (3) Soit p un nombre premier. Montrer que l'espace vectoriel des primitifs de l'algèbre de Hopf graduée commutative $\Lambda(y) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p[x]$ est l'espace vectoriel

$$\langle y, x, x^p, x^{p^2}, \dots, x^{p^n}, \dots \rangle.$$

- (4) Montrer que l'algèbre de Hopf duale $\mathbb{F}_p[x]^*$ est isomorphe en tant qu'algèbre graduée commutative à

$$\mathbb{F}_p[x]^* \cong \bigotimes_{i \geq 0} \mathbb{F}_p[x_i]/x_i^p,$$

où x_i est dual au primitif x^{p^i} dans la base duale. (Les primitifs de A sont duaux aux indécomposables de A^* .)

19.3. Homologie de quelques espaces classifiants.

Remarque 19.3.1. L'espace $\mathbb{C}P^\infty$ est un H -espace commutatif. On peut l'identifier avec

- $BU(1)$, l'espace classifiant du groupe unitaire $U(1)$, qui est homéomorphe à S^1 , considéré comme le sous groupe topologique de \mathbb{C}^* des éléments de norme 1 ;
- $K(\mathbb{Z}, 2)$, l'espace d'Eilenberg-MacLane. (En effet, $\Omega BU(1) \simeq U(1) \cong S^1$, et le cercle est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}, 1)$.)

Remarque 19.3.2. Soit p un nombre premier. L'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}/p, 1)$ est l'espace classifiant $B\mathbb{Z}/p$ du groupe abélien \mathbb{Z}/p ; il possède la structure d'un H -espace commutatif. Par la théorie des revêtements finis, il existe un modèle explicite pour $B\mathbb{Z}/p$:

considérer S^{2n-1} comme les éléments de norme 1 dans \mathbb{C}^n . Le groupe topologique $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ agit sur \mathbb{C} et donc, par l'action diagonale, sur \mathbb{C}^n . Le groupe $\mathbb{Z}/p \subset S^1 \subset \mathbb{C}^*$ des p -ième racines d'unité agit par restriction sur $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ et ces actions sont compatibles pour les différents $n \in \mathbb{N}$, en particulier $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ induit un morphisme \mathbb{Z}/p -équivariant :

$$S^{2n-1} \hookrightarrow S^{2n+1}.$$

On définit $B\mathbb{Z}/p := \text{colim}(S^{2n-1}/(\mathbb{Z}/p))$.

Remarque 19.3.3. Lorsque p vaut 2, il existe une équivalence d'homotopie $B\mathbb{Z}/2 \simeq \mathbb{R}P^\infty$.

Exercice 19.3.4.

- (1) A l'aide du modèle de $B\mathbb{Z}/p$ donné ci-dessus, montrer qu'il existe un morphisme $B\mathbb{Z}/p \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. (On peut considérer que ce morphisme est induit par le foncteur $B-$ 'espace classifiant' appliqué à l'inclusion de groupes $\mathbb{Z}/p \hookrightarrow S^1$.)
- (2) Montrer que $\mathbf{H}\mathbb{F}_p^*(\mathbb{C}P_+^\infty)$ et $\mathbf{H}\mathbb{F}_p^*(B\mathbb{Z}/p_+)$ sont des \mathbb{F}_p -algèbres de Hopf graduées bicommutatives.

Proposition 19.3.5. Soit p un nombre premier. Alors, il existe des isomorphismes d'algèbres de Hopf graduées commutatives primitivement engendrées :

- (1) $\mathbf{H}\mathbb{F}_p^*(\mathbb{C}P_+^\infty) \cong \mathbb{F}_p[x]$, $|x| = 2$;
- (2) si $p > 2$, $\mathbf{H}\mathbb{F}_p^*(B\mathbb{Z}/p_+) \cong \Lambda(y) \otimes \mathbb{F}_p[x]$, $|x| = 2$, $|y| = 1$, où $B\mathbb{Z}/p \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ induit l'inclusion de l'algèbre polynomiale $\mathbb{F}_p[x]$ en cohomologie ;
- (3) si $p = 2$, $\mathbf{H}\mathbb{F}_2^*(B\mathbb{Z}/2_+) \cong \mathbb{F}_2[u]$, $|u| = 1$, où $B\mathbb{Z}/p \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ induit l'inclusion de l'algèbre polynomiale $\mathbb{F}_2[x] \cong \mathbb{F}_2[u^2]$ en cohomologie.

Démonstration. (Indications). Le premier énoncé est une conséquence immédiate du fait que $\mathbf{H}\mathbb{F}_p$ est \mathbb{C} -orienté. Le deuxième point découle du fait que le morphisme $B\mathbb{Z}/p \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ est un S^1 -fibré principal, donc on peut utiliser la suite exacte de Gysin associée à

$$S^1 \rightarrow B\mathbb{Z}/p \rightarrow \mathbb{C}P^\infty.$$

□

Corollaire 19.3.6. Soit p un nombre premier. Alors, il existe des isomorphismes d'algèbres graduées commutatives :

- (1) $\mathbf{H}\mathbb{F}_p^*(\mathbb{C}P_+^\infty) \cong \bigotimes_{i \geq 0} \mathbb{F}_p[\beta_{p^i}]/\beta_{p^i}^p$, où β_{p^i} est dual à x^{p^i} , donc est de degré $2p^i$;
- (2) si $p > 2$, $\mathbf{H}\mathbb{F}_p^*(B\mathbb{Z}/p_+) \cong \Lambda(w) \otimes \bigotimes_{i \geq 0} \mathbb{F}_p[\beta_{p^i}]/\beta_{p^i}^p$, où $|w| = 1$;

- (3) si $p = 2$, $\mathbf{HF}_{2*}(B\mathbb{Z}/2_+) \cong \bigotimes_{i \geq 0} \mathbb{F}_2[\zeta_{2^i}]/\zeta_{2^i}^2$, où ζ_{2^i} est dual à u^{2^i} , donc est de degré 2^i .

Démonstration. Exercice. □

19.4. L'algèbre de Steenrod duale. Par construction du spectre d'Eilenberg-MacLane, l'espace classifiant $B\mathbb{Z}/p$ est l'espace $(\mathbf{HF}_p)_1$, donc il y a un morphisme canonique de spectres

$$\Sigma^\infty B\mathbb{Z}/p \rightarrow \mathbf{HF}_p[1] = \Sigma \mathbf{HF}_p.$$

Le morphisme de groupes $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p$ induit un morphisme

$$\mathbb{C}P^\infty \simeq K(\mathbb{Z}, 2) \rightarrow K(\mathbb{Z}/p, 2) = (\mathbf{HF}_p)_2$$

et donc on dispose d'un morphisme

$$\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbf{HF}_p[2]$$

qui correspond à l'orientation complexe canonique du spectre d'Eilenberg-MacLane \mathbf{HF}_p . Ce morphisme se factorise à travers le morphisme canonique

$$\Sigma^\infty K(\mathbb{Z}/p, 2) \rightarrow \mathbf{HF}_p[2].$$

Ces morphismes induisent en homologie

$$\begin{aligned} (\mathbf{HF}_p)_*(\mathbb{C}P^\infty) &\rightarrow (\mathbf{HF}_p)_{*-2} \mathbf{HF}_p \\ (\mathbf{HF}_p)_*(B\mathbb{Z}/p) &\rightarrow (\mathbf{HF}_p)_{*-1} \mathbf{HF}_p. \end{aligned}$$

Remarque 19.4.1. Les morphismes canoniques

$$\begin{aligned} (\mathbf{HF}_p)_*(K(\mathbb{Z}/p, 1)) &\rightarrow (\mathbf{HF}_p)_{*-1} \mathbf{HF}_p \\ (\mathbf{HF}_p)_*(K(\mathbb{Z}/p, 2)) &\rightarrow (\mathbf{HF}_p)_{*-2} \mathbf{HF}_p. \end{aligned}$$

se factorise respectivement à travers les morphismes 'suspension homologique' :

$$\begin{aligned} (\mathbf{HF}_p)_*(K(\mathbb{Z}/p, 1)) &\rightarrow (\mathbf{HF}_p)_{*+1}(K(\mathbb{Z}/p, 2)) \\ (\mathbf{HF}_p)_*(K(\mathbb{Z}/p, 2)) &\rightarrow (\mathbf{HF}_p)_{*+1}(K(\mathbb{Z}/p, 3)) \end{aligned}$$

respectivement. (Exercice : vérifier cette affirmation en utilisant le calcul de l'homologie d'un spectre en termes de l'homologie des espaces du spectre.)

La suspension homologique, pour X un espace pointé, est le morphisme naturel $\mathbf{HF}_p*(\Omega X) \rightarrow \mathbf{HF}_p*_{-1}(X)$ qui est induit par la counité d'adjonction $\Sigma \Omega X \rightarrow X$.

L'espace de lacets ΩX est un H -espace, donc $\mathbf{HF}_p*((\Omega X)_+)$ est une algèbre, munie du produit dit de Pontrjagin. Il est un fait fondamental que l'image des éléments décomposables pour ce produit par le morphisme suspension homologique est triviale.

Pour simplifier la présentation, on suppose désormais que $p > 2$. Le cas $p = 2$ peut être traité par des arguments similaires.

Notation 19.4.2. Soit $p > 2$ un nombre premier. Pour $i \geq 0$,

- (1) soit $\xi_i \in (\mathbf{HF}_p)_{2(p^i-1)} \mathbf{HF}_p$ l'image de l'élément $\beta_{p^i} \in (\mathbf{HF}_p)_{2p^i}(\mathbb{C}P^\infty)$.
- (2) soit $\tau_i \in (\mathbf{HF}_p)_{2p^i-1} \mathbf{HF}_p$ l'image de l'élément $\beta_{p^i} \in (\mathbf{HF}_p)_{2p^i}(B\mathbb{Z}/p)$.

Lemme 19.4.3. L'élément $\xi_0 = 1$ dans $\mathbf{HF}_p* \mathbf{HF}_p$.

Démonstration. Exercice. □

Remarque 19.4.4. Par la remarque 19.4.1, les images de $(\mathbf{HF}_p)_*(B\mathbb{Z}/p)$ et de $(\mathbf{HF}_p)_*(\mathbb{C}P^\infty)$ dans $(\mathbf{HF}_p)_* \mathbf{HF}_p$ sont contenues dans

$$\langle \tau_i, \xi_i \mid i \geq 0 \rangle.$$

(L'image de l'élément $w \in (\mathbf{HF}_p)_1(B\mathbb{Z}/p)$ est l'unité, donc coïncide avec l'image de ξ_0 .)

L'algèbre de Steenrod duale $(\mathbf{HF}_p)_* \mathbf{HF}_p$ est une \mathbb{F}_p -algèbre graduée commutative et donc, par la propriété universelle de l'algèbre graduée commutative libre, il existe un morphisme canonique d'algèbres :

$$\mathbb{F}_p[\xi_i | i \geq 1] \otimes \Lambda(\tau_j | j \geq 0) \rightarrow (\mathbf{HF}_p)_* \mathbf{HF}_p.$$

Théorème 19.4.5. Soit $p > 2$ un nombre premier. Le morphisme

$$\mathbb{F}_p[\xi_i | i \geq 1] \otimes \Lambda(\tau_j | j \geq 0) \rightarrow (\mathbf{HF}_p)_* \mathbf{HF}_p.$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Démonstration. (Indications.) Pour démontrer ce résultat, normalement on calcule l'homologie $\mathbf{HF}_p(K(\mathbb{Z}/p, n))$ des espaces d'Eilenberg-MacLane $\forall n$. Une approche élégante est due à Ravenel et Wilson, en utilisant la théorie des 'anneaux de Hopf' (voir [Wil82, Section II.8]). Le calcul par Serre est en cohomologie en utilisant la suite spectrale de Serre et Cartan a fait des calculs au niveau des chaînes. \square

Remarque 19.4.6. Pour $p = 2$, il existe une construction similaire. Le morphisme canonique $\Sigma^\infty \mathbb{R}P^\infty \rightarrow \mathbf{HF}_2[1]$ induit un morphisme en homologie et on définit ξ_i comme l'image de la classe ζ_{2^i} , donc $|\xi_i| = 2^i - 1$. Alors, il existe un morphisme canonique d'algèbres

$$\mathbb{F}_2[\xi_i | i \geq 1] \xrightarrow{\cong} \mathbf{HF}_2_* \mathbf{HF}_2.$$

Rappeler que MU est un spectre connexe et que $\pi_0(MU) \cong \mathbb{Z}$, par l'isomorphisme d'Hurewicz et donc il existe une augmentation canonique d'anneaux gradués commutatifs : $MU_* \rightarrow \mathbb{Z}$.

Corollaire 19.4.7. Soit $p > 2$ un nombre premier. Le morphisme de Thom $\Theta : MU \rightarrow \mathbf{HF}_p$ induit le morphisme d'anneaux commutatifs : $MU_* \rightarrow \mathbf{HF}_p_* \cong \mathbb{F}_p$ qui est la composition de l'augmentation $MU_* \rightarrow \mathbb{Z}$ avec la réduction modulo p .

Le morphisme $\Theta \wedge \Theta : MU \wedge MU \rightarrow \mathbf{HF}_p \wedge \mathbf{HF}_p$ induit en homotopie :

$$\begin{array}{ccc} MU_* MU & \longrightarrow & \mathbf{HF}_p_* \mathbf{HF}_p \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ MU_* [b_i^{MU}] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[\xi_i] \otimes \Lambda(\tau_j) \end{array}$$

le morphisme de MU_* -algèbres défini par :

$$b_i^{MU} \mapsto \begin{cases} \xi_s & i = p^s - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. L'identification du morphisme $MU_* \rightarrow (\mathbf{HF}_p)_*$ est élémentaire. Le morphisme $\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbf{HF}_p[2]$ se factorise :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty & \xrightarrow{x_{MU}} & MU[2] \\ & \searrow & \downarrow \Theta[2] \\ & & \mathbf{HF}_p[2], \end{array}$$

par construction du morphisme de Thom, Θ .

Par définition, la classe b_i^{MU} est l'image de la classe $\beta_{i+1}^{MU} \in MU_{2(i+1)}(\mathbb{C}P^\infty)$ et, par naturalité, $\beta_{i+1}^{MU} \mapsto \beta_{i+1}^{\mathbf{HF}_p} \in \mathbf{HF}_p_{2(i+1)}(\mathbb{C}P^\infty)$ sous le morphisme de Thom. Le résultat en découle de la définition des classes ξ_i . \square

Remarque 19.4.8. En termes de séries formelles, ce morphisme induit :

$$\sum b_i t^{i+1} \mapsto \sum_s \xi_s t^{p^s}.$$

19.5. Le coproduit. Soit $p > 2$ un nombre premier. Pour calculer le coproduit de \mathcal{A}^* , on procède comme pour MU_*MU : d'abord on détermine le morphisme de structure $(\mathbf{HF}_p)_*(\mathbb{C}P_+^\infty) \rightarrow \mathcal{A}^* \otimes_{\mathbb{F}_p} (\mathbf{HF}_p)_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$.

Rappeler que le morphisme de Thom, $\Theta : MU \rightarrow \mathbf{HF}_p$ induit un morphisme d'algèbroïdes de Hopf $(MU_*, MU_*MU) \rightarrow (\mathbb{F}, \mathcal{A}^*)$ et, en particulier, un morphisme d'algèbres $MU_*MU \rightarrow \mathcal{A}^*$ dont l'image est $\mathbb{F}_p[\xi_i]$.

Proposition 19.5.1. La coaction $\psi : (\mathbf{HF}_p)_*(\mathbb{C}P_+^\infty) \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}_p} (\mathbf{HF}_p)_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$ est donnée par :

$$\psi \beta_n^{\mathbf{HF}_p} = \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j \geq 0} \xi_i t^{p^j} \right)_{[n]}^j \otimes \beta_j^{\mathbf{HF}_p}.$$

Démonstration. Le morphisme de Thom $\Theta : MU \rightarrow \mathbf{HF}_p$ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} MU_*(\mathbb{C}P_+^\infty) & \longrightarrow & MU_*MU \otimes_{MU_*} MU_*(\mathbb{C}P_+^\infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbf{HF}_p)_*(\mathbb{C}P_+^\infty) & \longrightarrow & \mathcal{A}^* \otimes_{\mathbb{F}_p} (\mathbf{HF}_p)_*(\mathbb{C}P_+^\infty). \end{array}$$

Le morphisme vertical à gauche est surjectif, donc le résultat est une conséquence immédiate de la Proposition 18.3.2. \square

Théorème 19.5.2. Soit $p > 2$ un nombre premier. Le coproduit de l'algèbre de Steenrod duale

$$\mathbf{HF}_p * \mathbf{HF}_p \cong \mathbb{F}_p[\xi_i | i \geq 1] \otimes \Lambda(\tau_j | j \geq 0)$$

est donné par

$$\begin{aligned} \Delta \xi_n &= \sum_{i=0}^n \xi_{n-i}^{p^i} \otimes \xi_i \\ \Delta \tau_n &= \sum_{i=0}^n \xi_{n-i}^{p^i} \otimes \tau_i + \tau_n \otimes 1. \end{aligned}$$

Démonstration. Le calcul de la diagonale des éléments $\{\xi_i\}$ est une conséquence de la Proposition 19.5.1, comme pour le calcul du coproduit de MU_*MU à partir de la structure de comodule de $MU_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$.

Pour les éléments τ_j , on utilise les morphismes de spectres

$$\mathbf{HF}_p[1] \leftarrow \Sigma^\infty B\mathbb{Z}/p \rightarrow \Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty,$$

qui induisent morphismes de \mathcal{A}^* -comodules

$$\mathbf{HF}_{p*-1} \mathbf{HF}_p[1] \leftarrow \mathbf{HF}_{p*} B\mathbb{Z}/p \rightarrow \mathbf{HF}_{p*} \mathbb{C}P^\infty.$$

Le morphisme $\mathbf{HF}_{p*} \Sigma^\infty B\mathbb{Z}/p \rightarrow \mathbf{HF}_{p*} \mathbb{C}P^\infty$ est un isomorphisme en degrés pairs. En utilisant la forme du coproduit sur $\mathbf{HF}_{p*} \mathbb{C}P^\infty$, on déduit facilement le coproduit $\Delta \tau_n$ (exercice !!), en utilisant le fait que le terme $\tau_n \otimes 1$ est imposé, car \mathcal{A}^* est une algèbre de Hopf. \square

Notation 19.5.3. (Soit $p > 2$ un nombre premier.) Soit P^* la sous-algèbre $\mathbb{F}_p[\xi_i]$ de \mathcal{A}^* .

Remarque 19.5.4. L'algèbre P^* est l'image du morphisme d'algèbres $MU_*MU \rightarrow (\mathbf{HF}_p)_* \mathbf{HF}_p$ et est une sous-algèbre de Hopf de \mathcal{A}^* .

Il existe une suite exacte courte d'algèbres de Hopf

$$P^* \hookrightarrow \mathcal{A}^* \twoheadrightarrow \Lambda(\tau_j | j \geq 0)$$

où l'algèbre extérieure est primitivement engendrée en tant qu'algèbre de Hopf.

L'inclusion $P^* \hookrightarrow \mathcal{A}^*$ admet un rétracte $\mathcal{A}^* \rightarrow P^*$, qui est un morphisme d'algèbres de Hopf.

On a le résultat suivant :

Lemme 19.5.5. Soit $p > 2$ un nombre premier.

(1) L'inclusion $P^* \hookrightarrow \mathcal{A}^*$ induit un foncteur exact (corestriction)

$$P^* \mathcal{C}omod \rightarrow \mathcal{A}^* \mathcal{C}omod$$

de la catégorie des P^* -comodules à gauche vers la catégorie des \mathcal{A}^* -comodules à gauche.

(2) Soit M un \mathcal{A}^* -comodule gradué tel que M est concentré en degrés pairs. Alors le morphisme de structure de M se factorise canoniquement :

$$M \rightarrow P^* \otimes M \hookrightarrow \mathcal{A}^* \otimes M.$$

Démonstration. (Indications.) Si W est un P^* -comodule, on définit le \mathcal{A}^* -comodule associé par le morphisme de structure :

$$W \rightarrow P^* \otimes W \hookrightarrow \mathcal{A}^* \otimes W.$$

Soit M un \mathcal{A}^* -comodule concentré en degrés pairs et soit x un élément de degré minimal tel que $\psi x \notin P^* \otimes M$ (s'il existe). L'élément ψx est de degré pair, donc ne peut pas être linéaire dans les éléments τ_j (qui sont de degré impair). En utilisant la coassociativité de la coaction, on déduit facilement une contradiction à l'hypothèse que x soit de degré minimal. (Exercice!) \square

Exemple 19.5.6. (Soit $p > 2$.) Les \mathcal{A}^* -comodules $(\mathbf{HF}_p)_* \mathbb{C}P_+^\infty$ et $(\mathbf{HF}_p)_* MU$ sont concentrés en degrés pairs, donc sont définis par des structures de P^* -comodules

$$\begin{aligned} (\mathbf{HF}_p)_* (\mathbb{C}P_+^\infty) &\rightarrow P^* \otimes (\mathbf{HF}_p)_* (\mathbb{C}P_+^\infty) \\ (\mathbf{HF}_p)_* MU &\rightarrow P^* \otimes (\mathbf{HF}_p)_* MU. \end{aligned}$$

19.6. L'homologie de MU en tant que \mathcal{A}^* -comodule. Soient E, F deux spectres en anneaux commutatifs tel que E est plat, donc $(E_*, E_* E)$ est un algébroïde de Hopf. Alors, le morphisme de structure $E_* F \rightarrow E_* E \otimes_{E_*} E_* F$ est un morphisme d'algèbres. Par exemple, ceci entraîne que le morphisme de structure

$$(\mathbf{HF}_p)_* MU \cong \mathbb{F}[b_i | i \geq 1] \rightarrow \mathcal{A}^* \otimes (\mathbf{HF}_p)_* MU$$

est un morphisme d'algèbres, donc est déterminé par l'image des générateurs $\{b_i | i \geq 0\}$ (rappeler que $b_0 = 0$).

L'orientation complexe $\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty \rightarrow MU[2]$ induit un morphisme de \mathcal{A}^* -comodules :

$$(\mathbf{HF}_p)_* (\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty) \rightarrow (\mathbf{HF}_p)_{*-2} MU$$

qui envoie le générateur (en tant qu'espace vectoriel) β_{i+1} à b_i ($i \geq 0$). On en déduit le résultat suivant :

Proposition 19.6.1. Soit $p > 2$ un nombre premier impair. La structure de comodule

$$\psi : (\mathbf{HF}_p)_* MU \rightarrow \mathcal{A}^* \otimes (\mathbf{HF}_p)_* MU$$

est déterminée par :

$$\psi b_s = \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{i \geq 0} \xi_i t^{p^i} \right)_{[s+1]}^{k+1} \otimes b_k.$$

Démonstration. Conséquence immédiate de la Proposition 19.5.1, par la discussion ci-dessus. (Observer que cet argument est l'analogue de celui utilisé dans la démonstration du Corollaire 18.3.4.) \square

Corollaire 19.6.2. Soit $p > 2$ un nombre premier impair. Modulo les éléments indécomposables (pour la structure d'algèbre), la coaction

$$\psi : (\mathbf{HF}_p)_* MU \rightarrow \mathcal{A}^* \otimes (\mathbf{HF}_p)_* MU$$

est de la forme suivante

$$\psi b_s \equiv \begin{cases} 1 \otimes b_{p^i-1} + \xi_i \otimes 1 & s = p^i - 1 \\ 1 \otimes b_s & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Évident. \square

Définition 19.6.3. Soit N la \mathbb{F}_p -algèbre graduée $N := \mathbb{F}_p[x_s | s \in \mathbb{N}, s \neq p^i - 1]$, telle que $|x_s| = 2s$ (on pose $x_0 = 1$) et soit $\nu : (\mathbf{H}\mathbb{F}_p)_*MU \rightarrow N$ le morphisme d'algèbres graduées déterminé par

$$b_s \mapsto \begin{cases} x_s & s \neq p^i - 1 \\ 0 & s = p^i - 1. \end{cases}$$

Définition 19.6.4. Soit $\Psi : \mathbf{H}\mathbb{F}_{p^*}MU \rightarrow \mathcal{A}^* \otimes N$ la composition $(\mathcal{A}^* \otimes \nu) \circ \psi :$

$$\mathbf{H}\mathbb{F}_{p^*}MU \xrightarrow{\psi} P^* \otimes \mathbf{H}\mathbb{F}_{p^*}MU \xrightarrow{P^* \otimes \nu} P^* \otimes N,$$

où, par abus de notation, on écrit $\psi : \mathbf{H}\mathbb{F}_{p^*}MU \rightarrow P^* \otimes \mathbf{H}\mathbb{F}_{p^*}MU$ pour la structure de P^* -comodule.

Remarque 19.6.5. On peut considérer $P^* \otimes N$ comme un P^* -comodule, muni de la structure étendue.

Proposition 19.6.6. *Le morphisme $\Psi : \mathbf{H}\mathbb{F}_{p^*}MU \rightarrow P^* \otimes N$ est un isomorphisme de \mathbb{F}_p -algèbres graduées commutatives et de P^* -comodules (et donc, par corestriction, de \mathcal{A}^* -comodules).*

Démonstration. Le fait que Ψ est un morphisme d'algèbres et un morphisme de comodules est évident.

Il est clair que $(\mathbf{H}\mathbb{F}_p)_*MU$ et $P^* \otimes N$ sont isomorphes en tant qu'algèbres graduées commutatives et que ces algèbres sont de type fini (de dimension finie en chaque degré). Donc, pour démontrer que Ψ est un isomorphisme, il suffit de montrer que Ψ est surjectif. Les algèbres sont connexes, donc il est suffisant de montrer que Ψ induit une surjection sur les éléments indécomposables.

On a calculé la coaction ψ modulo décomposables en Corollaire 19.6.2. On en déduit que, modulo décomposables, Ψ est de la forme suivante :

$$\Psi b_s \equiv \begin{cases} 1 \otimes x_s & s \neq p^i - 1 \\ \xi_i \otimes 1 & s = p^i - 1. \end{cases}$$

Ceci établit la surjectivité et donc conclut la démonstration. \square

20. RÉSOLUTIONS D'ADAMS ----->

20.1. Spectres E -injectifs.

Définition 20.1.1. Soit E un spectre en anneaux. Un spectre X est E -injectif s'il est un rétract d'un spectre de la forme $E \wedge Y$.

Lemme 20.1.2. Soit E un spectre en anneaux. Un spectre X est E -injectif si et seulement si le morphisme

$$X \cong S \wedge X \xrightarrow{\eta \wedge X} E \wedge X$$

admet un rétract.

Démonstration. L'implication \Leftarrow est évidente, donc on démontre \Rightarrow .

Supposon que X est rétract de $E \wedge Y$. Alors, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & E \wedge Y \xrightarrow{p} X \\ & \searrow & \nearrow \\ & & 1_X \end{array}$$

Le morphisme i induit un morphisme de E -modules : $E \wedge X \rightarrow E \wedge Y$ et la composition

$$E \wedge X \rightarrow E \wedge Y \xrightarrow{p} X$$

est le rétract recherché. \square

Définition 20.1.3. Soit E un spectre en anneaux.

- (1) Une suite $\dots X_{n+1} \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots$ de morphismes (les compositions successives sont triviales) est E -exacte si, $\forall n \in \mathbb{Z}$ et $\forall I$ E -injectif,

$$[X_{n+1}, I] \leftarrow [X_n, I] \leftarrow [X_{n-1}, I]$$

est exact.

- (2) Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est un E -monomorphisme si $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$ est E -exacte. (Cette condition est équivalent à $[f, I]$ étant surjectif, $\forall I$ E -injectif.

Lemme 20.1.4. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est un E -monomorphisme si et seulement si $E \wedge f : E \wedge X \rightarrow E \wedge Y$ admet un rétract.

Démonstration. Le spectre $E \wedge X$ est E -injectif et $[Y, E \wedge X] \rightarrow [X, E \wedge X]$ est surjectif. Donc, il existe un morphisme g qui rend commutatif le triangle :

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow f & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{\eta \wedge X} & E \wedge X \end{array}$$

Le morphisme g induit un morphisme de E -modules $E \wedge Y \rightarrow E \wedge X$ qui est le rétract recherché. \square

Remarque 20.1.5. Soit X un spectre. Alors, par le résultat précédent, le morphisme $\eta \wedge X : X \rightarrow E \wedge X$ est un E -monomorphisme. En particulier, pour tout spectre X , il existe un E -monomorphisme $X \rightarrow I$, où I est un E -injectif. Donc, la catégorie \mathcal{SH} possède suffisamment de E -injectifs.

On en déduit directement le résultat suivant :

Lemme 20.1.6. Soit E un spectre en anneaux et soit Z un spectre.

- (1) Si I est E -injectif, alors $I \wedge Z$ est E -injectif.
 (2) Si $f : X \rightarrow Y$ est un E -monomorphisme, alors $f \wedge Z : X \wedge Z \rightarrow Y \wedge Z$ est un E -monomorphisme.

- (3) Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est un E -monomorphisme si et seulement si $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$ est un E -monomorphisme.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 20.1.7. Soit $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z$ une suite cofibre. Alors f est un E -monomorphisme si et seulement si la suite

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

est E -exacte.

Démonstration. On démontre l'implication \Rightarrow , la réciproque étant évidente.

Puisque $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ est une suite cofibre et f est un E -monomorphisme, par hypothèse, il suffit de montrer que $Y \rightarrow Z$ induit un monomorphisme $[Z, I] \hookrightarrow [Y, I]$, quelque soit I un E -injectif. Ceci découle de la suite exacte longue induite par $[-, I]$. □

Remarque 20.1.8. La classe \mathcal{I}_E dans \mathcal{SH} des objets E -injectifs est une classe injective stable par suspension, dans la terminologie de l'algèbre homotopique.

On note le résultat suivant en E -homologie, qui est une conséquence immédiate du Lemme 20.2.3.

Proposition 20.1.9. Soit $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ une suite cofibre, où $X \rightarrow Y$ est un E -monomorphisme. Alors la suite exacte longue en E_* -homologie induit une suite exacte courte de E_* -modules :

$$0 \rightarrow E_*(X) \rightarrow E_*(Y) \rightarrow E_*(Z) \rightarrow 0.$$

Démonstration. Par Lemme 20.2.3, le morphisme $E \wedge X \rightarrow E \wedge Y$ admet un rétract, donc il est injectif en homotopie. Par la définition même de E_* -homologie, $E_*(X) \rightarrow E_*(Y)$ est injectif. □

20.2. E -résolutions.

Définition 20.2.1. Soit E un spectre en anneaux. Une E -résolution de $X \in \text{Ob } \mathcal{SH}$ est une suite de la forme :

$$0 \rightarrow X \rightarrow I^0 \xrightarrow{i^0} I^1 \xrightarrow{i^1} I^2 \xrightarrow{i^2} \dots$$

telle que

- (1) la suite est E -exacte ;
- (2) chaque objet I^s , $s \in \mathbb{N}$, est E -injectif.

Soient $X \rightarrow I^\bullet, Y \rightarrow J^\bullet$ deux E -résolutions. Un morphisme de E -résolutions est un morphisme $f^\bullet : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} I^n & \xrightarrow{i^n} & I^{n+1} \\ f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} \\ J^n & \xrightarrow{j^n} & J^{n+1}. \end{array}$$

Lemme 20.2.2. Soit X un spectre. Alors, X admet une E -résolution.

Démonstration. La construction est par récurrence ; pour démarrer la construction, soit $X \rightarrow I^0$ un E -monomorphisme où I^0 est un E -injectif ; ceci fournit une suite cofibre $X \rightarrow I^0 \rightarrow C^0$. Pour l'étape de récurrence, on suppose qu'on ait construit une suite cofibre

$$C^{n-1} \rightarrow I^n \rightarrow C^n$$

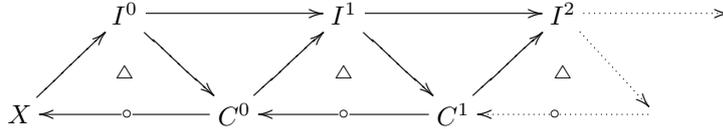
où I^n est E -injectif et $C^{n-1} \rightarrow I^n$ est un E -monomorphisme. (On pose $C^{-1} := X$.) Alors, on choisit un E -monomorphisme $C^n \rightarrow I^{n+1}$, où I^{n+1} est E -injectif, et on

prend pour C^{n+1} la cofibre de ce morphisme, et pour $I^n \rightarrow I^{n+1}$ la composition $I^n \rightarrow C^n \rightarrow I^{n+1}$.

On vérifie à l'aide de la Proposition 20.1.7 que la suite ainsi construite est une E -résolution. \square

Ce résultat admet une réciproque.

Lemme 20.2.3. Soit $X \rightarrow I^\bullet$ une E -résolution. Alors, il existe un raffinement



dont les triangles décorés par Δ correspondent à des suites cofibrées, les autres triangles commutent et les morphismes $C^n \rightarrow I^{n+1}$ sont des E -monomorphismes.

Le raffinement est unique à isomorphisme non-unique près.

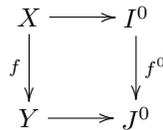
Démonstration. La construction du diagramme est récursive : le morphisme $I^n \rightarrow C^n$ est la cofibre du morphisme $C^{n-1} \rightarrow I^n$ et, $C^n \rightarrow I^{n+1}$ est une factorisation de $I^n \rightarrow I^{n+1}$. On utilise le fait que la suite $X \rightarrow I^\bullet$ est E -exacte pour déduire que, à chaque étape, $C^n \rightarrow I^{n+1}$ est un E -monomorphisme.

L'unicité à isomorphisme près est une conséquence du fait que la cofibre d'un morphisme est unique à isomorphisme non-canonique près. \square

Remarque 20.2.4. Attention ! Ceci n'est pas encore une résolution d'Adams, pour lesquelles il y a un décalage, car la construction se fait en prenant les fibres et pas les cofibrées.

Définition 20.2.5. Soient $f^\bullet, g^\bullet : I^\bullet \rightrightarrows J^\bullet$ deux morphismes entre E -résolutions. Une homotopie de chaînes entre f^\bullet, g^\bullet est un ensemble de morphismes $\{h^n : I^n \rightarrow J^{n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (on convient que $h^0 = 0$) tel que : $f^n - g^n = h^{n+1} \circ i^n + j^n \circ h^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition 20.2.6. Soit E un spectre en anneaux et soient $X \rightarrow I^\bullet, Y \rightarrow J^\bullet$ deux E -résolutions. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ se relève en un morphisme $f^\bullet : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$ tel que

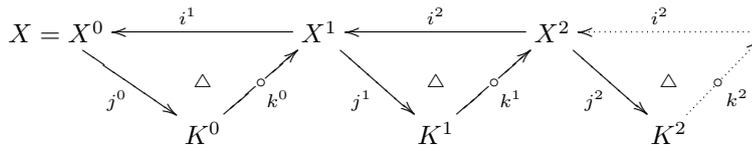


commute. Si $f^\bullet, g^\bullet : I^\bullet \rightrightarrows J^\bullet$ sont deux relèvements de f , alors ils sont homotopes par une homotopie de chaînes.

Démonstration. Exercice. (Essentiellement le même argument que celui utilisé en algèbre homologique classique.) \square

20.3. Résolutions d'Adams.

Définition 20.3.1. Une E -résolution d'Adams d'un spectre X est un diagramme de triangles exacts :



où les objets K^s sont E -injectifs et les morphismes $X^s \rightarrow K^s$ sont des E -monomorphismes.

Proposition 20.3.2. Il existe une bijection entre l'ensemble de E -résolutions d'Adams et l'ensemble de E -résolutions muni d'un raffinement (voir Lemme 20.2.3).

Démonstration. Soit $(X^\bullet, K^\bullet, i^\bullet, j^\bullet, k^\bullet)$ une résolution d'Adams. On lui associe la E -résolution

$$X \rightarrow K^0 \rightarrow \Sigma^{-1}K^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Sigma^{-s}K^s \rightarrow \dots,$$

muni du raffinement évident. Cette construction est évidemment une bijection. \square

Exemple 20.3.3. Il y a une manière canonique de construire une résolution d'Adams. L'unité $\eta : S \rightarrow E$ est un E -monomorphisme et induit une suite cofibre

$$S \rightarrow E \rightarrow \overline{E}$$

qu'on peut écrire comme une suite cofibre

$$\Sigma^{-1}\overline{E} \rightarrow S \rightarrow E.$$

Ainsi, on obtient une résolution d'Adams de X dont $J^s = E \wedge X^s$ et, par récurrence :

$$X^s = (\Sigma^{-1}\overline{E})^{\wedge s} \wedge X.$$

Cette construction est fonctorielle.

21. LA SUITE SPECTRALE D'ADAMS

21.1. **Énoncé.** On fixe un nombre premier p . Rappelons que \mathbb{Z}_p est l'anneau des entiers p -adiques :

$$\mathbb{Z}_p \cong \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n.$$

Théorème 21.1.1. Soit X un spectre tel que $\pi_r(X) = 0 \forall r \ll 0$ et $\mathbf{HF}_p * X$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de type fini. Alors, il existe une suite spectrale $(E_r^{s,t}, d_r)$, telle que $d_r : E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{s+r, t+r-1}$ et

- (1) $E_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}^*}^{s,t}(\mathbb{F}_p, \mathbf{HF}_p * X)$
- (2) La suite spectrale converge vers $\pi_{t-s}(X) \otimes \mathbb{Z}_p$ (il existe une filtration de $\pi_n(X) \otimes \mathbb{Z}_p$ telle que $E_\infty^{s, s+n}$, $s \in \mathbb{N}$, est le groupe gradué associé à la filtration).

Corollaire 21.1.2. Soit X un spectre tel que $\pi_r(X) = 0 \forall r \ll 0$ et $\mathbf{HF}_p * X$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de type fini. Si $\text{Ext}_{\mathcal{A}^*}^{s,t}(\mathbb{F}_p, \mathbf{HF}_p * X) = 0$ pour $t - s$ impair, alors la suite spectrale d'Adams dégénère. En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}$, il existe une filtration de $\pi_n(X) \otimes \mathbb{Z}_p$ tel que $\text{Ext}_{\mathcal{A}^*}^{s, s+n}(\mathbb{F}_p, \mathbf{HF}_p * X)$ est le groupe gradué associé à cette filtration.

22. LE THÉORÈME DE QUILLEN

22.1. Énoncé du théorème de Quillen.

Théorème 22.1.1. *Le morphisme $L \rightarrow MU_*$ d'algèbres, induit par l'orientation complexe canonique de MU_* est un isomorphisme.*

Une approche à la démonstration de ce résultat utilise la suite spectrale d'Adams. On a besoin d'une compréhension du morphisme d'Hurewicz intégral $h_{\mathbb{Z}}$, qui induit un diagramme commutatif de morphismes d'anneaux :

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & MU_* \\ & \searrow & \downarrow h_{\mathbb{Z}} \\ & & \mathbf{HZ}_* MU \longleftarrow \cong \mathbb{Z}[b_i^{\mathbf{HZ}}]. \end{array}$$

Le spectre $\mathbf{HZ} \wedge MU$ possède les deux orientations complexes x_{MU} et $x_{\mathbf{HZ}}$, qui sont reliées par l'équation

$$x_{MU} = b^{\mathbf{HZ}}(x_{\mathbf{HZ}}).$$

Les deux structures de loi de groupe formel sur $(\mathbf{HZ} \wedge MU)^*(\mathbb{C}P_+^\infty)$ sont induites par $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ (la structure de H -espace habituelle) qui induit un morphisme d'algèbres en cohomologie. On a donc

$$F_{MU}(x_{MU}, y_{MU}) = b^{\mathbf{HZ}}(x_{\mathbf{HZ}} + y_{\mathbf{HZ}}),$$

où F_{MU} est la loi de groupe formel associé à x_{MU} , puisque la loi associée à $x_{\mathbf{HZ}}$ est la loi additive.

Donc $b^{\mathbf{HZ}}$ est un isomorphisme strict entre la loi de groupe formel additive et F_{MU} . Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 22.1.2. *Les morphismes du diagramme (9) induisent des isomorphismes d'algèbres*

$$L \otimes \mathbb{Q} \cong MU_* \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbf{HZ}_* MU \otimes \mathbb{Q},$$

et $b^{\mathbf{HZ}}$ est l'exponentiel de la loi de groupe formel universel sur MU_* .

En particulier

- (1) $\mathbf{HZ}_* MU \subset MU_* \otimes \mathbb{Q}$ est la sous-algèbre de $MU_* \otimes \mathbb{Q}$ engendrée par les coefficients $\{m_i\}$ du logarithme de la loi de groupe formel universel ;
- (2) il existe un choix de générateurs $L \cong \mathbb{Z}[a_i]$ tels que, modulo les éléments décomposables

$$a_i \mapsto \begin{cases} -b_i & i \neq p^i - 1 \\ -pb_i & i = p^i - 1, \end{cases}$$

p un nombre premier quelconque.

Démonstration. L'équation $F_{MU}(x_{MU}, y_{MU}) = b^{\mathbf{HZ}}(x_{\mathbf{HZ}} + y_{\mathbf{HZ}})$ montre que $b^{\mathbf{HZ}}$ est l'exponentiel de la loi de groupe formel F_{MU} sur $\mathbf{HZ}_* MU \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[b_i]$. Soit $\sum_{i \geq 0} m_i x^{i+1}$ l'inverse de $b^{\mathbf{HZ}}$ pour la composition de séries formelles, $m_i \in \mathbf{HZ}_{2i} MU$, alors $m_i \equiv -b_i^{\mathbf{HZ}}$ modulo éléments décomposables et il est évident que $L \rightarrow \mathbf{HZ}_* MU$ devient un isomorphisme après $\otimes \mathbb{Q}$ et la série formelle $\sum_{i \geq 0} m_i x^{i+1}$ est le logarithme de la loi de groupe formel universelle. Puisque, le morphisme d'Hurewicz est un isomorphisme après $\otimes \mathbb{Q}$, on a les isomorphismes de \mathbb{Q} -algèbres.

Enfin, par l'identification de l'anneau L de Lazard on sait qu'il existe un choix de générateurs $L \cong \mathbb{Z}[a_i]$ tel que

$$a_i \mapsto \begin{cases} m_i & i \neq p^i - 1 \\ pm_i & i = p^i - 1, \end{cases}$$

p un nombre premier quelconque. Ceci conclut la démonstration. \square

22.2. Le morphisme de Hurewicz (modulo p). Rappelons le résultat suivant :

Proposition 22.2.1. Soit p un nombre premier. L'homologie \mathbf{HF}_* induit un foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{SH} &\rightarrow \mathcal{A}^* \mathbf{Comod} \\ X &\mapsto \mathbf{HF}_{p*} X, \end{aligned}$$

à valeurs dans la catégorie des \mathcal{A}^* -comodules à gauche

Définition 22.2.2. Soit $M \in \text{Ob } \mathcal{A}^* \mathbf{Comod}$ un \mathcal{A}^* -comodule à gauche, muni du morphisme de structure

$$\psi : M \rightarrow \mathcal{A}^* \otimes M.$$

Un élément homogène x de M est primitif (pour la structure de comodule) si $\psi x = 1 \otimes x$. L'espace vectoriel gradué des éléments primitifs de M est dénoté par $P_{\mathcal{A}^*} M$.

Corollaire 22.2.3. Le morphisme d'Hurewicz $\pi_*(X) \rightarrow \mathbf{HF}_{p*} X$ se factorise en tant que morphisme de groupes abéliens :

$$\pi_*(X) \rightarrow P_{\mathcal{A}^*} \mathbf{HF}_{p*} X \hookrightarrow \mathbf{HF}_{p*} X.$$

Démonstration. Le morphisme de Hurewicz s'identifie à la composition

$$[S^n, X] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^*}(\Sigma^n \mathbb{F}_p, \mathbf{HF}_{p*} X) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\Sigma^n \mathbb{F}_p, \mathbf{HF}_{p*} X) \cong \mathbf{HF}_{p^n} X.$$

On vérifie que $\text{Hom}_{\mathcal{A}^*}(\Sigma^n \mathbb{F}_p, \mathbf{HF}_{p*} X) \cong (P_{\mathcal{A}^*} \mathbf{HF}_{p*} X)_n$. \square

Exemple 22.2.4. Soit $p > 2$ un nombre premier impair. La structure de \mathcal{A}^* -comodule de $\mathbf{HF}_{p*} MU$ est la corestriction de la structure de P^* -comodule et il existe un isomorphisme de P^* -comodules :

$$\mathbf{HF}_{p*} MU \cong P^* \otimes N.$$

L'espace des \mathcal{A}^* -primitifs de $\mathbf{HF}_{p*} MU$ est donc

$$P_{\mathcal{A}^*} \mathbf{HF}_{p*} MU \cong N = \mathbb{F}[x_s | s \neq p^i].$$

Le morphisme de Hurewicz donc induit un morphisme

$$MU_* \rightarrow P_{\mathcal{A}^*} \mathbf{HF}_{p*} MU \cong N = \mathbb{F}[x_s | s \neq p^i].$$

Le produit de $\mathbf{HF}_{p*} MU$ induit une structure de \mathbb{F}_p -algèbre graduée commutative sur $P_{\mathcal{A}^*} \mathbf{HF}_{p*} MU$.

Rappelons que l'orientation complexe canonique de MU induit un morphisme d'algèbres $L \hookrightarrow MU_*$; (le fait que c'est un monomorphisme est une conséquence de l'identification de la composée avec le morphisme d'Hurewicz intégral $MU_* \rightarrow \mathbf{HZ}_* MU$).

Proposition 22.2.5. Soit p un nombre premier. Alors la composition

$$L \rightarrow MU_* \rightarrow P_{\mathcal{A}^*} \mathbf{HF}_{p*} MU \cong N$$

est un morphisme surjectif d'algèbres.

Démonstration. (Indications.) Le morphisme de Hurewicz $MU_* \rightarrow \mathbf{HF}_{p*} MU$ se factorise

$$MU_* \rightarrow \mathbf{HZ}_* MU \rightarrow \mathbf{HZ}_* MU \otimes_{\mathbb{F}_p} \xrightarrow{\cong} \mathbf{HF}_{p*} MU,$$

puisque $\mathbf{HZ}_* MU$ est sans torsion additive.

On considère le diagramme commutatif induit :

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & MU_* \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbf{HZ}_* MU \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{\mathcal{A}^*} \mathbf{HF}_{p*} MU & \hookrightarrow & \mathbf{HF}_{p*} MU. \end{array}$$

Par la proposition 22.1.2, on sait décrire $L \rightarrow \mathbf{HZ}_*MU$ modulo les éléments décomposables : il existe un choix de générateurs $L \cong \mathbb{Z}[a_i]$ tel que

$$a_i \mapsto \begin{cases} -b_i & i \neq p^j - 1 \\ -pb_i & i = p^j - 1. \end{cases}$$

Il est donc évident que le morphisme $L \rightarrow N$ est surjectif sur les éléments indécomposables, donc surjectif, les algèbres étant graduées connexes. \square

Remarque 22.2.6. Le morphisme $MU_* \rightarrow \mathbf{HZ}_*MU$ est un morphisme d'algèbres graduées ; puisque \mathbf{HZ}_*MU est sans torsion additive, ce morphisme se factorise canoniquement :

$$MU_* \rightarrow MU_*/\text{tors} \rightarrow \mathbf{HZ}_*MU,$$

où tors est l'idéal des éléments de torsion dans MU_* (en particulier les morphismes sont des isomorphismes d'algèbres). Dans la catégorie des groupes abéliens gradués, on a un isomorphisme $MU_* \cong MU_*/\text{tors} \oplus \text{tors}$.

Le morphisme $MU_*/\text{tors} \hookrightarrow \mathbf{HZ}_*MU$ est un monomorphisme (puisque'il devient un isomorphisme après $\otimes \mathbb{Q}$).

Le résultat précédent montre que le morphisme d'Hurewicz modulo p permet de détecter une sous-algèbre polynomiale de MU_*/tors .

22.3. Spectres modulo p . Soit p un nombre premier. Rappel que le spectre S/p est un spectre de Moore de type \mathbb{Z}/p .

Notation 22.3.1. Soit X un spectre ; on écrit X/p pour le spectre cofibre du morphisme $p : X \rightarrow X$.

Lemme 22.3.2. Soit X un spectre, alors $X/p \cong X \wedge S/p$ dans \mathcal{SH} .

Démonstration. Le produit smash $X \wedge -$ avec la suite cofibre $S \xrightarrow{p} S \rightarrow S/p$ induit une suite cofibre

$$X \xrightarrow{p} X \rightarrow X/p$$

et, puisque la cofibre est unique à isomorphisme (non canonique) près, on en déduit le résultat. \square

Proposition 22.3.3. (Cf. [Ada95, Proposition III.6.6].) Soit X un spectre. Il existe une suite exacte courte de groupes abéliens

$$0 \rightarrow \pi_n(X) \otimes \mathbb{F}_p \rightarrow \pi_n(X/p) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\pi_{n-1}(X), \mathbb{F}_p) \rightarrow 0.$$

Si p est impair, la suite exacte courte est scindée et $\pi_n(X/p)$ est un groupe d'exposant p (autrement dit, équivalent à un \mathbb{F}_p -espace vectoriel).

Démonstration. La suite cofibre $X \rightarrow X \rightarrow X/p$ induit une suite exacte longue en homotopie

$$\dots \pi_*(X) \xrightarrow{p} \pi_*(X) \rightarrow \pi_*(X/p) \rightarrow \pi_{*-1}(X) \rightarrow \dots$$

qui fournit la suite exacte courte.

Si p est impair, alors le morphisme $p : S/p \rightarrow S/p$ est trivial dans \mathcal{SH} (exercice !), donc le morphisme $p : X/p \rightarrow X/p$ est trivial. On déduit que les groupes d'homotopie $\pi_*(X/p)$ sont d'exposant p . \square

Remarque 22.3.4. Pour A un groupe abélien, $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{F}_p)$ est le groupe $p - \text{tor}(A)$ des éléments de A de p -torsion ($a \in A$ tel que $pa = 0$).

Corollaire 22.3.5. Soit X un spectre.

- (1) Le groupe $\pi_n(X/p)$ est un p -groupe d'exposant p^2 , $\forall n \in \mathbb{Z}$.
- (2) Si le groupe d'homotopie $\pi_n(X)$ est finiment engendré en tant que groupe abélien, $\forall n \in \mathbb{Z}$, alors les groupes d'homotopie $\pi_n(X/p)$ sont des p -groupes finis.

Démonstration. Évident. \square

22.4. Le spectre MU/p et calculs homologiques. On connaît la structure du groupe abélien gradué libre MU_*/tors , puisque $MU_*/\text{tors} \otimes \mathbb{Q} \cong L \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[a_i], |a_i| = 2i$. L'inclusion $MU_* \otimes \mathbb{F}_p \hookrightarrow \pi_*(MU/p)$ induit un monomorphisme

$$(MU_*/\text{tors}) \otimes \mathbb{F}_p \hookrightarrow \pi_*(MU/p)$$

(puisque MU_*/tors est facteur direct, en tant que groupe abélien, de MU_*). Donc on connaît l'image, qui est isomorphe à l'espace vectoriel sous-jacent de l'algèbre de polynômes $\mathbb{F}_p[a_i | i \geq 1], |a_i| = 2i$.

On va démontrer, à l'aide de la suite spectrale d'Adams, que $(MU_*/\text{tors}) \otimes \mathbb{F}_p \cong \pi_*(MU/p)$, qui montre que MU_* n'a pas de p -torsion.

Notation 22.4.1. Pour $p > 2$ un nombre premier, soit P_1^* la sous-algèbre $\mathbb{F}_p[\xi_i | i \geq 1] \otimes \Lambda(\tau_0)$ de \mathcal{A}^* .

Lemme 22.4.2. Soit $p > 2$ un nombre premier. L'algèbre P_1^* est une sous-algèbre de Hopf de \mathcal{A}^* qui est isomorphe, en tant qu'algèbre de Hopf, à

$$P^* \otimes \Lambda(\tau_0),$$

où τ_0 est primitif.

Il existe une suite exacte d'algèbres de Hopf :

$$P_1^* \rightarrow \mathcal{A}^* \rightarrow \Lambda(\tau_j | j \geq 1),$$

où $\Lambda(\tau_j)$ est primitivement engendrée en tant qu'algèbre de Hopf.

Démonstration. Évident. (Comparer le cas $P^* \hookrightarrow \mathcal{A}^*$.) \square

Le morphisme d'algèbres de Hopf $P_1^* \hookrightarrow \mathcal{A}^*$ induit un foncteur de corestriction

$$P_1^* \mathbf{Comod} \rightarrow \mathcal{A}^* \mathbf{Comod}.$$

Proposition 22.4.3. Soit $p > 2$ un nombre premier. Le \mathcal{A}^* -comodule $\mathbf{HF}_{p^*}(MU/p)$ est la corestriction du P_1^* -comodule :

$$\mathbf{HF}_{p^*}(MU/p) \cong P_1^* \otimes N.$$

Démonstration. (Indications.) Le spectre MU/p est isomorphe dans \mathcal{SH} à $MU \wedge S/p$. Il y a un isomorphisme de Künneth :

$$\mathbf{HF}_{p^*}(MU \wedge S/p) \cong \mathbf{HF}_{p^*} MU \otimes \mathbf{HF}_{p^*}(S/p),$$

qui est un isomorphisme de \mathcal{A}^* -comodules. Pour terminer la démonstration, il suffit de calculer $\mathbf{HF}_{p^*}(S/p)$ en tant que \mathcal{A}^* -comodule. (Exercice!) \square

Pour calculer avec la suite spectrale d'Adams, on utilise les deux résultats suivants :

Proposition 22.4.4. Soit Z un \mathbb{F}_p -espace vectoriel et considérer $P_1^* \otimes Z$ comme le \mathcal{A}^* -comodule, induit par corestriction par la structure de P_1^* -comodule étendue. Alors, il existe un isomorphisme

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}^*}^{s,t}(\mathbb{F}_p, P_1^* \otimes Z) \cong \text{Ext}_{\Lambda(\tau_j | j \geq 1)}^{s,t}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \otimes Z$$

de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels.

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier d'un théorème de changement d'anneaux. \square

Remarque 22.4.5. Plus généralement, il y a un foncteur exact :

$$\Lambda(\tau_j | j \geq 1) \mathbf{Comod} \rightarrow \mathcal{A}^* \mathbf{Comod}$$

qui envoie un comodule W sur $\Lambda(\tau_j | j \geq 1)$ à $\mathcal{A}^* \square_{\Lambda(\tau_j)} W$, le produit cotensoriel défini comme le noyau de la différence entre les deux morphismes

$$\mathcal{A}^* \otimes W \rightrightarrows \mathcal{A}^* \otimes \Lambda(\tau_j) \otimes W,$$

donnés par le morphisme de structure de comodule à gauche de W et le morphisme $\mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^* \otimes \Lambda(\tau_j)$ induit par la diagonale et la projection, qui muni \mathcal{A}^* d'une structure de comodule à droite. L'exactitude du foncteur est une conséquence du fait que $\mathcal{A}^* \cong P_1^* \otimes \Lambda(\tau_j)$ en tant que comodules à droite. En particulier, en tant qu'espaces vectoriels, $\mathcal{A}^* \square_{\Lambda(\tau_j)} W \cong P_1^* \otimes W$.

Ce foncteur est l'adjoint à droite du foncteur

$$\mathcal{A}^* \mathbf{Comod} \rightarrow \Lambda(\tau_j|_{j \geq 1}) \mathbf{Comod}$$

induit par la projection $\mathcal{A}^* \rightarrow \Lambda(\tau_j)$, qui envoie un \mathcal{A}^* -comodule M à M muni du morphisme de structure

$$M \rightarrow \mathcal{A}^* \otimes M \rightarrow \Lambda(\tau_j) \otimes M.$$

Un argument formel d'adjonction montre qu'il existe un isomorphisme de changement d'anneaux :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}^*}^{*,*}(M, \mathcal{A}^* \square_{\Lambda(\tau_j)} W) \cong \mathrm{Ext}_{\Lambda(\tau_j|_{j \geq 1})}^{*,*}(M, W).$$

Dans le cas qui nous intéresse, $(\mathbf{HF}_p)_*(MU/p) \cong \mathcal{A}^* \square_{\Lambda(\tau_j)} N$, où N est muni de la structure triviale de $\Lambda(\tau_j)$ -comodule.

Proposition 22.4.6. *Soit A une \mathbb{F}_p -algèbre de Hopf graduée commutative. Alors*

$$\mathrm{Ext}_A^{*,*}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$$

a la structure d'une \mathbb{F}_p -algèbre bigraduée.

Proposition 22.4.7. *Soit $p > 2$ un nombre premier. Il existe un isomorphisme*

$$\mathbb{F}_p[w_j|j \geq 1] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ext}_{\Lambda(\tau_j|_{j \geq 1})}^{*,*}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$$

d'algèbres bigraduées, où $|w_j| = (1, 2p^j - 1)$.

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 22.4.8. *Soit $p > 2$ un nombre premier. Alors, MU_* n'a pas de p -torsion.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le morphisme

$$(MU_*/\mathrm{tors}) \otimes \mathbb{F}_p \hookrightarrow (MU/p)_*$$

est un isomorphisme.

Donc, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, il suffit de montrer que $(MU/p)_n$ admet une filtration tel que le groupe gradué associé a la même dimension que $(MU_*/\mathrm{tors}) \otimes \mathbb{F}_p$ en degré n . On utilise la filtration d'Adams.

Les Propositions 22.4.3, 22.4.4 et 22.4.7 montrent que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}^*}^{s,t}(\mathbb{F}_p, \mathbf{HF}_p^*(MU/p))$ est trivial si $t - s$ est impair, isomorphe à

$$\mathbb{F}_p[w_j|j \geq 1] \otimes N,$$

où un élément y de N de degré $|y|$ a bidegré $(0, |y|)$. Donc, on peut appliquer le Corollaire 21.1.2, qui montre que la suite spectrale d'Adams pour MU/p dégénère.

L'espace vectoriel

$$\bigoplus_s \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}^*}^{s, n+s}(\mathbb{F}_p, \mathbf{HF}_p^*(MU/p)) \cong (\mathbb{F}_p[w_j|j \geq 1] \otimes N)^{s, n+s}$$

est isomorphe au sous-espace de degré n de $\mathbb{F}_p[w_j|j \geq 1] \otimes N$, où maintenant on considère le degré total $\|w_j\| = 2(p^j - 1)$. En tant qu'espace vectoriel gradué, $\mathbb{F}_p[w_j|j \geq 1] \otimes N$ est isomorphe à $\mathbb{F}_p[a_i|i \geq 1] \cong (MU_*/\mathrm{tors}) \otimes \mathbb{F}_p$, donc ceci conclut la démonstration. □

Remarque 22.4.9. On n'a pas besoin d'utiliser les structures multiplicatives dans la démonstration de ce Corollaire. Le corollaire montre que $(MU/p)_* \cong MU_* \otimes \mathbb{F}_p$, donc est muni d'une structure naturelle d'algèbre graduée commutative. (On n'a pas besoin de démontrer que MU/p est un spectre en anneaux commutatifs; pour p impair MU/p est un spectre en anneaux commutatifs, pour $p = 2$ il faut faire attention !)

Remarque 22.4.10. Pour $p = 2$, on peut utiliser un argument similaire pour démontrer que MU_* n'a pas de 2-torsion.

Corollaire 22.4.11. *L'anneau MU_* n'a pas de torsion additive. Donc MU_* est une algèbre graduée commutative, concentrée en degrés pairs.*

Démonstration. À l'aide de la suite spectrale d'Adams pour tout premier p , on montre que MU_* n'a pas de p -torsion, donc est sans torsion. \square

22.5. Démonstration du théorème de Quillen. Pour démontrer le théorème de Quillen, on doit raffiner le résultat du Corollaire 22.4.11.

Proposition 22.5.1. *L'anneau MU_* est isomorphe à une algèbre de polynômes $\mathbb{Z}[a'_i | i \geq 1, |a'_i| = 2]$.*

Démonstration. (Indications.) On utilise la structure multiplicative de la suite spectrale d'Adams et le fait que les éléments en $\text{Ext}_{\mathcal{A}^*}^0$ et $\text{Ext}_{\mathcal{A}^*}^1$ engendrent $\text{Ext}_{\mathcal{A}^*}^{*,*}(\mathbb{F}_p, (\mathbf{HF}_p)_* MU)$, en tant qu'algèbre, quelque soit p . \square

Le morphisme $L \hookrightarrow MU_*$ est un monomorphisme entre deux algèbres de polynômes. Pour démontrer le théorème de Quillen, il suffit de montrer que le morphisme induit sur les indécomposables :

$$QL \rightarrow Q(MU_*)$$

est un isomorphisme. Pour le faire, on utilise le diagramme commutatif de morphismes d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} L & \hookrightarrow & MU_* \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbf{HZ}_* MU, \end{array}$$

qui induit un diagramme commutatif de morphismes de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccc} QL & \longrightarrow & Q(MU_*) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & Q(\mathbf{HZ}_* MU). \end{array}$$

Le morphisme $QL \rightarrow Q(\mathbf{HZ}_* MU)$ est un monomorphisme, donc tous ces morphismes sont injectifs.

En degrés $\neq p^i - 1$, pour $i \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier, tous les morphismes sont des isomorphismes. Donc il suffit de considérer le cas de degré $p^i - 1$.

Le morphisme d'algèbres $\mathbf{HZ}_* MU \rightarrow \mathcal{A}^*$ (induit par $\mathbf{HZ} \wedge MU \rightarrow \mathbf{HF}_p \wedge \mathbf{HF}_p$) envoie le générateur b_{p^i-1} à ξ_i (par définition des classes ξ_i). L'image du générateur a_{p^i-1} de L dans $Q(\mathbf{HZ}_* MU)$ est $-pb_{p^i-1}$, par la Proposition 22.1.2.

La composée $MU_* \rightarrow \mathbf{HZ}_* MU \rightarrow \mathcal{A}^*$ est trivial en degrés positifs (exercice!), donc on déduit que, en ce degré aussi, le morphisme $QL \rightarrow Q(MU_*)$ doit être un isomorphisme (exercice!!). l'im

RÉFÉRENCES

- \wedge [Ada95] J. F. ADAMS – *Stable homotopy and generalised homology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995, Reprint of the 1974 original.
- \wedge [EKMM97] A. D. ELMENDORF, I. KRIZ, M. A. MANDELL et J. P. MAY – *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 47, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, With an appendix by M. Cole.
- \wedge [GJ99] P. G. GOERSS et J. F. JARDINE – *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- \wedge [GM99] S. I. GELFAND et Y. I. MANIN – *Homological algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Translated from the 1989 Russian original by the authors, Reprint of the original English edition from the series Encyclopaedia of Mathematical Sciences [it Algebra, V, Encyclopaedia Math. Sci., 38, Springer, Berlin, 1994 ; MR1309679 (95g :18007)].
- \wedge [GM03] S. I. GELFAND et Y. I. MANIN – *Methods of homological algebra*, second éd., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- \wedge [Hov99] M. HOVEY – *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- \wedge [Hov01] ———, « Spectra and symmetric spectra in general model categories », *J. Pure Appl. Algebra* **165** (2001), no. 1, p. 63–127.
- \wedge [HPS97] M. HOVEY, J. H. PALMIERI et N. P. STRICKLAND – « Axiomatic stable homotopy theory », *Mem. Amer. Math. Soc.* **128** (1997), no. 610, p. x+114.
- \wedge [HSS00] M. HOVEY, B. SHIPLEY et J. SMITH – « Symmetric spectra », *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), no. 1, p. 149–208.
- \wedge [Koc96] S. O. KOCHMAN – *Bordism, stable homotopy and Adams spectral sequences*, Fields Institute Monographs, vol. 7, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- \wedge [KT06] A. KONO et D. TAMAKI – *Generalized cohomology*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 230, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006, Translated from the 2002 Japanese edition by Tamaki, Iwanami Series in Modern Mathematics.
- \wedge [Mar83] H. R. MARGOLIS – *Spectra and the Steenrod algebra*, North-Holland Mathematical Library, vol. 29, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983, Modules over the Steenrod algebra and the stable homotopy category.
- \wedge [May99] J. P. MAY – *A concise course in algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- \wedge [ML98] S. MAC LANE – *Categories for the working mathematician*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998.
- \wedge [MMSS01] M. A. MANDELL, J. P. MAY, S. SCHWEDE et B. SHIPLEY – « Model categories of diagram spectra », *Proc. London Math. Soc.* (3) **82** (2001), no. 2, p. 441–512.
- \wedge [MT68] R. E. MOSHER et M. C. TANGORA – *Cohomology operations and applications in homotopy theory*, Harper & Row Publishers, New York, 1968.
- \wedge [Qui67] D. G. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, No. 43, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- \wedge [Rud98] Y. B. RUDYAK – *On Thom spectra, orientability, and cobordism*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998, With a foreword by Haynes Miller.
- \wedge [Sel97] P. SELICK – *Introduction to homotopy theory*, Fields Institute Monographs, vol. 9, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- \wedge [Swi02] R. M. SWITZER – *Algebraic topology—homotopy and homology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002, Reprint of the 1975 original [Springer, New York ; MR0385836 (52 #6695)].
- \wedge [Wil82] W. S. WILSON – *Brown-Peterson homology : an introduction and sampler*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 48, Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, D.C., 1982.

LABORATOIRE ANALYSE, GÉOMÉTRIE ET APPLICATIONS, UMR 7539, INSTITUT GALILÉE, UNIVERSITÉ PARIS 13, 93430 VILLETANEUSE, FRANCE

E-mail address: powell@math.univ-paris13.fr

URL: <http://www.math.univ-paris13.fr/~powell/>