

Le but de ces exercices est d'introduire quelques idées associées aux suites spectrales. Pour cela on aura besoin des notions suivantes (voir un texte sur l'algèbre homologique - par exemple le livre de Weibel - pour de compléments.)

Définition 1. Un couple exact dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est un diagramme de morphismes

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & \searrow k & \swarrow j \\ & E & \end{array}$$

tel que le diagramme $D \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \xrightarrow{k} D \xrightarrow{i} D$ est un complexe exact.

Définition 2. Un complexe filtré d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est un complexe de chaînes (C_*, d) muni d'une filtration $\dots \subset F_p(C_*, d) \subset F_{p+1}(C_*, d) \subset \dots (C_*, d)$ par des sous-complexes de chaînes ($p \in \mathbb{Z}$).

Définition 3. Une suite spectrale dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est un ensemble de complexes de chaînes $\{(E_*^n, d^n) | n \in \mathbb{N}\}$ tel que $E_*^{n+1} = H_*(E_*^n, d^n)$. Le complexe (E^r, d^r) s'appelle la r -ième page de la suite spectrale.

Un morphisme $\{(E_*^n, d^n) | n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{(F_*^n, D^n) | n \in \mathbb{N}\}$ de suites spectrales est un ensemble de morphismes de complexes de chaînes $\{f^n : (E_*^n, d^n) \rightarrow (F_*^n, D^n) | n \in \mathbb{N}\}$ tel que $f^{n+1} = H_*(f^n)$.

Remarque 4. Normalement les suites spectrales sont bigraduées : chaque complexe (E^r, d^r) est bigradué et le degré total de $E_{p,q}^r$ est, par définition, $p + q$; la différentielle d^r respecte la bigraduation.

Le bidegré de la différentielle dépend du choix d'indexation. Souvent on a :

$$d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$$

et donc est de degré total -1 .

Une suite spectrale est, en général, un outil de calcul par approximations successives. On a la notion suivante de convergence :

Définition 5. Soit $(E_{*,*}^r, d^r)$ une suite spectrale dans $\mathcal{A}$ et soit H_* un objet gradué de $\mathcal{A}$.

- (1) La suite spectrale stabilise *localement* si, pour tout couple d'entiers (p, q) , il existe un entier $N = N(p, q)$ tel que $E_{p,q}^n = E_{p,q}^N, \forall n \geq N$. On pose $E_{p,q}^\infty := E_{p,q}^N$.
- (2) La suite spectrale converge *faiblement* à H_* s'il stabilise localement et il existe une filtration croissante $F_* H_*$ de H_* telle que

$$F_p H_n / F_{p-1} H_n \cong E_{p,n-p}^\infty$$

$$\forall p, n.$$

- (3) La suite spectrale *converge* à H si elle converge faiblement et les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$\bigcap_p F_p H_n = 0$$

$$\bigcup_p F_p H_n \cong H_n.$$

Définition 6. Un bicomplexe d'une catégorie abélienne est un objet bigradué $\{C_{p,q} | (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ de $\mathcal{A}$ muni de deux différentielles

$$\begin{aligned} d_h & : C_{p,q} \rightarrow C_{p-1,q} \\ d_v & : C_{p,q} \rightarrow C_{p,q-1} \end{aligned}$$

telles que $d_h \circ d_h = 0$, $d_v \circ d_v = 0$ et, pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} C_{p,q+1} & \xleftarrow{d_h} & C_{p+1,q+1} \\ -d_v \downarrow & & \downarrow d_v \\ C_{p,q} & \xleftarrow{d_h} & C_{p+1,q} \end{array}$$

(Noter la signe, qui correspond au fait que les différentielles d_h, d_v anticommulent ou bien $d_h \circ d_v + d_v \circ d_h = 0$).

- (1) Soit $(D, E; i, j, k)$ un couple exact.
- Montrer que la composition $d = j \circ k : E \rightarrow E$ est une différentielle ($d \circ d = 0$). Donc on peut définir $E' := H(E, d) = \ker d / \operatorname{im} d$. (On écrit $[z]$ pour la classe d'un élément z de $\ker d$.)

On définit $D' = iD$ et les morphismes $D' \xrightarrow{i'} D' \xrightarrow{j'} E' \xrightarrow{k'} D'$ par

$$\begin{aligned} i' &:= i|_{D'} \\ j'(ix) &:= [j(x)] \\ k'[y] &:= k(y). \end{aligned}$$

- (a) Montrer que les morphismes i', j', k' sont bien définis.
- (b) Montrer que $(D', E'; i', j', k')$ est un couple exact, le *couple exact dérivé*.
- (2) Soit $F_\bullet(C_*, d)$ un complexe filtré d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

- (a) Montrer que, pour tout entier p , on dispose d'une suite exacte courte de complexes :

$$0 \rightarrow F_{p-1}(C_*, d) \rightarrow F_p(C_*, d) \rightarrow F_p(C_*, d)/F_{p-1}(C_*, d) \rightarrow 0$$

en précisant la structure du conoyau.

- (b) Montrer que les suites exactes longues en homologie associées à ces suites exactes courtes de complexes ($p \in \mathbb{Z}$) induisent un couple exact : $(D^1, E^1; i^1, j^1, k^1)$, où

$$\begin{aligned} D^1 &:= \bigoplus_{n,p} H_n(F_p C_*, d) \\ E^1 &:= \bigoplus_{n,p} H_n(F_p C_* / F_{p-1} C_*, d). \end{aligned}$$

Ce couple exact peut être dérivé récursivement, donc définit une suite spectrale. On écrit $D^{r+1} := (D^r)'$ et $E^{r+1} := (E^r)'$; la différentielle de E^r sera dénotée d^r .

- (c) On introduit la bigraduation suivante :

$$\begin{aligned} D_{p,q}^1 &:= H_{p+q}(F_p C_*, d) \\ E_{p,q}^1 &:= H_{p+q}(F_p C_* / F_{p-1} C_*, d), \end{aligned}$$

Montrer que les morphismes sont bigradués $i : D_{p,q}^1 \rightarrow D_{p+1,q-1}^1$, $j : D_{p,q}^1 \rightarrow E_{p,q}^1$ et $k : E_{p,q}^1 \rightarrow D_{p-1,q}^1$. En particulier, la différentielle est de la forme :

$$d_{p,q}^1 : E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p-1,q}^1.$$

- (d) Montrer par récurrence que le bidegré de la différentielle d^r est $(-r, r-1)$, donc

$$d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r.$$

- (e) Montrer qu'un élément de $E_{p,q}^1$ est représenté par un élément $z \in F_p C_{p+q}$ tel que $dz \in F_{p-1} C_{p+q-1}$ (donc z est un cycle modulo des éléments de filtration inférieure). Identifier les bords d'une manière similaire.
- (f) Donner une description explicite du groupe $E_{p,q}^2$ qui généralise cette description de $E_{p,q}^1$.
- (3) Soit $(C_{*,*}, d_h, d_v)$ un bicomplexe d'une catégorie abélienne.
- (a) Montrer qu'il existe un sous bicomplexe $F_p(C_{*,*}, d_h, d_v)$ de $(C_{*,*}, d)$ tel que
- $$F_p C_{m,*} = \begin{cases} C_{m,*} & m \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
- (b) Dédurre qu'il existe une filtration $\dots \subset F_p C_{*,*} \subset F_{p+1} C_{*,*} \subset \dots \subset C_{*,*}$ de bicomplexes telle que $\bigcap F_p C_{*,*} = 0$ et $\bigcup F_p C_{*,*} = C_{*,*}$.
- (c) Montrer que l'objet gradué $\text{Tot}(C_{*,*})_n := \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$, muni de la différentielle $d := d_h + d_v$, est un complexe (le complexe total).
- (d) Montrer que la filtration $F_p(C_{*,*})$ induit une filtration croissante $F_p(\text{Tot} C_{*,*})$ du complexe total telle que $\bigcap F_p(\text{Tot} C_{*,*}) = 0$. Identifier le terme E^1 de la suite spectrale associée à cette filtration (voir la question précédente).
- (e) Montrer que la filtration $F_p(\text{Tot} C_{*,*})$ de $\text{Tot}(C_{*,*})$ induit une filtration de l'homologie $H_*(\text{Tot}(C_{*,*}))$.
- (f) Supposer que $C_{p,q} = 0$ pour $pq < 0$ (par exemple, $C_{p,q} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$). Montrer que $(F_p(\text{Tot} C_{*,*}))_n = (\text{Tot} C_{*,*})_n$ pour $p \gg 0$ (et préciser la borne en fonction de n). Dédurre que la suite spectrale associée à la filtration $F_p(\text{Tot} C_{*,*})$ stabilise localement.
- (g) (Facultatif.) Supposer que $C_{p,q} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$. montrer que la suite spectrale converge vers l'homologie $H_*(\text{Tot}(C_{*,*}))$.