(1) Un théorème de Serre montre (en théorie d'homotopie instable) que

$$\pi_*(S^n) \otimes \mathbb{Q} \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & * = n \\ \mathbb{Q} & n = 2m \text{ et } * = 2n-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En déduire que $\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q} \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & * = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ (Autrement dit, $\pi_*(S)$ est un groupe de torsion pour $* > 0$.)

Déduire que les morphismes $S \to \mathbf{H}\mathbb{Z} \to \mathbf{H}\mathbb{Q}$ (qui correspondent aux unités des spectres d'Eilenberg-MacLane) induisent des isomorphismes en $\pi_*(-) \otimes \mathbb{Q}$.

Montrer qu'il existe des isomorphismes naturels :

(a) $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbf{H}\mathbb{Q}_* X, \forall X \in \mathrm{Ob}\mathscr{SH}$;

(b) $\mathbf{H}\mathbb{Q}_*(X \wedge Y) \cong \mathbf{H}\mathbb{Q}_* X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{H}\mathbb{Q}_* Y, \forall X, Y \in \mathrm{Ob}\mathscr{SH}$.

Ainsi calculer $\pi_*(MU) \otimes \mathbb{Q}$ et $\pi_*(MU \wedge MU) \otimes \mathbb{Q}$.

(2) Soit (E, x_E) un spectre $\mathbb{C}$-orienté. Rappeler que l'orientation complexe induit un isomorphisme canonique de E_*-modules $E_*\langle \beta_i^E | i \geq 0 \rangle \xrightarrow{\cong} E_*(\mathbb{C}P^\infty_+)$ et un isomorphisme de E_*-algèbres : $E_*[b_j^E] \xrightarrow{\cong} E_* MU$ (où les b_i^E sont donnés par l'orientation complexe x_{MU} en termes des β_{i+1}^E).

(a) Soit $g : E \to F$ un morphisme de spectres en anneaux. Montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} E_*(X) \otimes E^*(X) \arrow[r, "\langle,\rangle_E"] \arrow[d] & E_* \arrow[d] \\ F_*(X) \otimes F^*(X) \arrow[r, "\langle,\rangle_F"'] & F_* \end{tikzcd}$$

où $\langle,\rangle_\bullet$ sont les accouplements de Kronecker respectifs et les morphismes verticaux sont induits par g.

(b) Déduire que, si F est équipé de l'orientation $x_F := g_*(x_E)$:

$$\begin{aligned} \beta_i^F &= g_*(\beta_i^E) \\ b_i^F &= g_*(b_i^E). \end{aligned}$$

donc que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} E_*\langle \beta_i^E | i \geq 0 \rangle \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\cong"'] & F_*\langle \beta_i^F | i \geq 0 \rangle \arrow[d, "\cong"] \\ E_*(\mathbb{C}P^\infty_+) \arrow[r, "g_*"'] & F_*(\mathbb{C}P^\infty_+), \end{tikzcd}$$

où γ est le morphisme unique de E_*-modules tel que $\beta_i^E \mapsto \beta_i^F$, et

$$\begin{tikzcd} E_*[b_i^E | i \geq 1] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\cong"'] & F_*[b_i^F | i \geq 1] \arrow[d, "\cong"] \\ E_* MU \arrow[r, "g_*"'] & F_* MU, \end{tikzcd}$$

où α est le morphisme unique de E_*-algèbres tel que $b_i^E \mapsto b_i^F$.

(c) Déduire qu'il existe un isomorphisme canonique de $(E\wedge MU)_*$-modules

$$(E \wedge MU)_* \otimes_{E_*} E_*(\mathbb{C}P^\infty_+) \xrightarrow{\cong} (E \wedge MU)_*(\mathbb{C}P^\infty_+)$$

qui correspond à l'isomorphisme

$$(E \wedge MU)_* \otimes_{E_*} E_*\langle \beta_i^E \rangle \xrightarrow{\cong} (E \wedge MU)_*\langle \beta_i^{E\wedge MU} \rangle.$$

(d) En déduire que le morphisme

$$(E \wedge MU)^d(\mathbb{C}P^\infty_+) \to \mathrm{Hom}_{E_*}(E_*(\mathbb{C}P^\infty_+), (E \wedge MU)_{*-d}),$$

qui envoie un morphisme $f : \mathbb{C}P^\infty_+ \to \Sigma^d E \wedge MU$ à la composée :

$$\begin{tikzcd}
E_*(\mathbb{C}P^\infty_+) \arrow[r, "E_* f"] & E_*(\Sigma^d E \wedge MU) \arrow[d, "\cong"] & \\
& \pi_{*-d}(E \wedge E \wedge MU) \arrow[r, "(\mu_E \wedge MU)_*"] & \pi_{*-d}(E \wedge MU)
\end{tikzcd}$$

est un isomorphisme.

(e) L'orientation complexe x_E induit un isomorphisme $E_*[[x_E]] \xrightarrow{\cong} E^*(\mathbb{C}P^\infty_+)$ et un isomorphisme (par abus de notation, on écrit x_E pour l'orientation de $E \wedge MU$ induit par $E \to E \wedge MU$) :

$$(E \wedge MU)^*[[x_E]] \xrightarrow{\cong} (E \wedge MU)^*(\mathbb{C}P^\infty_+).$$

Montrer que l'orientation x_{MU} induite par $MU \to E \wedge MU$ est

$$x_E = b^E(x_E) := \Sigma_{i\geq 0} b_i^E x_E^{i+1}.$$

(Indices : l'orientation complex $\in (E \wedge MU)^2(\mathbb{C}P^\infty)$ correspond au morphisme de E_*-modules $E_*(\mathbb{C}P^\infty) \to E_{*-2}MU$ induit par x_{MU}.)

(f) Désormais on prend $E = \mathbf{H}\mathbb{Z}$. Montrer que la loi de groupe formel sur $(\mathbf{H}\mathbb{Z} \wedge MU)_*$ induite par l'orientation $x_{\mathbf{H}\mathbb{Z}}$ est la loi additive.

(g) Soit F la loi de groupe formel sur $(\mathbf{H}\mathbb{Z} \wedge MU)_*$ associée à l'orientation x_{MU} et soit $c^{\mathbf{H}\mathbb{Z}}(x)$ l'inverse pour la composition de séries formelles de la série $b^{\mathbf{H}\mathbb{Z}}(x)$.

Montrer que

$$F(x,y) = b^{\mathbf{H}\mathbb{Z}}(c^{\mathbf{H}\mathbb{Z}}(x) + c^{\mathbf{H}\mathbb{Z}}(y)).$$

Donc $b^{\mathbf{H}\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme strict entre F et la loi de groupe formel additif.

(h) Déduire que le morphisme d'anneaux $L \xrightarrow{F} (\mathbf{H}\mathbb{Z} \wedge MU)_*$ qui classifie F est injectif (où L est l'anneau de Lazard). (Remarque : il suffit de montrer l'injectivité après $\otimes\mathbb{Q}$.)

(i) Montrer qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "F_U"] \arrow[dr, "F"'] & MU_* \arrow[r, "="] \arrow[d, "(\eta_{\mathbf{H}\mathbb{Z}} \wedge MU)_*"] & \pi_*(MU) \arrow[d, "\text{Hurewicz}"] \\
& (\mathbf{H}\mathbb{Z} \wedge MU)_* \arrow[r, "="'] & \mathbf{H}\mathbb{Z}_*MU,
\end{tikzcd}$$

où F_U classifie la loi de groupe formel sur MU_* induite par l'orientation canonique.

Déduire que le morphisme $F_U : L \to MU_*$ est un monomorphisme.

(j) (Facultatif.) Modulo indécomposables, indentifier l'image de $F : L \to \mathbf{H}\mathbb{Z}_*MU$.