

Quelques points d'algèbre homologique

Pour les notions de base sur les catégories abéliennes, consulter les références habituelles sur l'algèbre homologique (par exemple Weibel, Hilton et Stammbach ...). Rappeler que les nombres naturels $\mathbb{N}$ forment un ensemble partiellement ordonné, donc définissent une catégorie.

- (1) Soient $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ deux catégories petites (les objets forment un ensemble), $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.
 - (a) Montrer que les foncteurs de $\mathcal{I}$ vers $\mathcal{C}$ forment une catégorie, $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$, dont les morphismes sont les transformations naturelles.
 - (b) Montrer qu'un foncteur $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$ induit un foncteur $\mathcal{C}^{\phi} : \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$. En particulier, le foncteur canonique $\mathcal{I} \rightarrow *$ vers la catégorie discrète à un seul objet induit le foncteur constant $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$.
 - (c) Montrer que la catégorie $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ est abélienne : une suite de morphismes $A_{\bullet} \rightarrow B_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet}$ de $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ est exacte si et seulement si $A_i \rightarrow B_i \rightarrow C_i$ est exacte, quelque soit $i \in \text{Ob } \mathcal{I}$.
- (2) Un système direct d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet de la catégorie $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$.
 - (a) Montrer que le foncteur système direct constant $\mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{A}b^{\mathbb{N}}$ admet un adjoint à gauche $\text{colim} : \mathcal{A}b^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}b$ et préciser la propriété universelle de colim .
 - (b) Soit $A_{\bullet}$ un système direct d'objets de groupes abéliens $\mathcal{A}b$; montrer qu'il existe une surjection $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \twoheadrightarrow \text{colim } A_{\bullet}$ et préciser le noyau. Dédurre qu'un élément de $\text{colim } A_{\bullet}$ est représenté par la classe d'un élément $x_n \in A_n$, pour $n \gg 0$.
 - (c) Soit x un élément de $\text{colim } A_{\bullet}$, représenté par un élément $x_n \in A_n$. Montrer que $x = 0$ dans $\text{colim } A_{\bullet}$ si et seulement s'il existe $t \geq n$ tel que $x_n \mapsto 0 \in A_t$.
 - (d) Montrer que le foncteur $\text{colim} : \mathcal{A}b^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}b$ est exact (il est formel qu'il est exact à droite).
 - (e) Montrer que le foncteur $P_n \in \text{Ob } \mathcal{A}b^{\mathbb{N}}$ défini par $t \mapsto \mathbb{Z}[\text{Hom}_{\mathbb{N}}(n, t)]$ est un objet projectif de $\mathcal{A}b^{\mathbb{N}}$ (il s'agit d'une version linéarisé du lemme de Yoneda). Dédurre que la catégorie $\mathcal{A}b^{\mathbb{N}}$ a suffisamment de projectifs.
- (3) Soit $(C_*(\bullet), d_*(\bullet))$ un système direct de complexes de chaînes de groupes abéliens (donc, $(C_*(n), d_*(n))$ est un complexe de chaînes, $n \in \mathbb{N}$, et il existe des morphismes de complexes de chaînes $(C_*(n), d_*(n)) \rightarrow (C_*(t), d_*(t))$ pour $0 \leq n \leq t$). Montrer que
 - (a) $(\text{colim } C_*(\bullet), \text{colim } d_*(\bullet))$ est un complexe de chaînes;
 - (b) l'homologie $H_*(C_*(\bullet), d_*(\bullet))$ est un système direct de groupes abéliens gradués;
 - (c) $H_k(\text{colim } C_*(\bullet), \text{colim } d_*(\bullet)) \cong \text{colim } H_k(C_*(\bullet), d_*(\bullet))$.
 (L'homologie commute aux colimites.)
- (4) Soient $\mathcal{I}$ un ensemble et $A_i \rightarrow B_i \rightarrow C_i$ une famille de suites exactes de $\mathcal{A}b$, indexée par $\mathcal{I}$. Montrer que
 - (a) la suite $\bigoplus_i A_i \rightarrow \bigoplus_i B_i \rightarrow \bigoplus_i C_i$ est exacte;
 - (b) la suite $\prod_i A_i \rightarrow \prod_i B_i \rightarrow \prod_i C_i$ est exacte;
- (5) Un système inverse d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet de la catégorie $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^{\text{op}}}$. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et I un objet injectif de $\mathcal{A}$. Montrer que le foncteur $I_n : t \mapsto I^{\text{Hom}_{\mathbb{N}}(t, n)}$ est un objet injectif de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^{\text{op}}}$ (donc $I_n(t) = I$

si $t \leq n$ et 0 autrement). En déduire que, si $\mathcal{A}$ a suffisamment d'injectifs, alors la catégorie $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^{\text{op}}}$ a suffisamment d'injectifs. En particulier, déduire que $\mathcal{A}b^{\mathbb{N}^{\text{op}}}$ a suffisamment d'injectifs.

- (6) Montrer que le foncteur système inverse constant, $\mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{A}b^{\mathbb{N}^{\text{op}}}$, admet un adjoint à droite, $\lim : \mathcal{A}b^{\mathbb{N}^{\text{op}}} \rightarrow \mathcal{A}b$. En particulier, pour $X_\bullet$ un système inverse, montrer que $\lim X_\bullet$ est le noyau du flèche

$$(1) \quad \prod_n X_n \xrightarrow{\prod_n (p_n - t_{n+1} \circ p_{n+1})} \prod_n X_n$$

où la composante $\prod_n X_n \rightarrow X_n$ est la différence $p_n - t_{n+1} \circ p_{n+1}$, où $p_j : \prod_n X_n \rightarrow X_j$ est la projection et $t_{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ est le morphisme du système inverse.

- (a) Montrer que le foncteur $\lim$ est exact à gauche.

- (b) Soit p un nombre premier ; montrer que les suites exactes de groupes abéliens

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p^n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \rightarrow 0$$

forment un système inverse, dont le système à droite correspond à

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}/p^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \rightarrow \dots$$

dont la limite est $\mathbb{Z}_p$, les entiers p -adiques. Utiliser ce système inverse pour montrer que le foncteur $\lim$ n'est pas exact.

- (7) Pour $X_\bullet$ un système inverse de groupes abéliens, soit $\lim^1 X_\bullet$ le conoyau du morphisme (1).

- (a) Montrer que $\lim^1$ définit un foncteur $\mathcal{A}b^{\mathbb{N}^{\text{op}}} \rightarrow \mathcal{A}b$.

- (b) Soit $0 \rightarrow X_\bullet \rightarrow Y_\bullet \rightarrow Z_\bullet \rightarrow 0$ une suite exacte courte de systèmes inverses ; montrer qu'il existe une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow \lim X_\bullet \rightarrow \lim Y_\bullet \rightarrow \lim Z_\bullet \rightarrow \lim^1 X_\bullet \rightarrow \lim^1 Y_\bullet \rightarrow \lim^1 Z_\bullet \rightarrow 0.$$

- (c) Soient I un groupe abélien injectif et n un nombre naturel ; montrer que $\lim^1 I_n$ est 0.

- (d) Déduire que $\lim^1 = \mathbb{R}^1 \lim$ (foncteur dérivé à droite) et que $\mathbb{R}^s \lim = 0$ pour $s \geq 2$.

- (8) Soit

$$\dots C_*(n+1) \rightarrow C_*(n) \rightarrow \dots$$

un système inverse de complexes de chaînes de groupes abéliens. Supposer que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\lim^1 C_t(n) = 0$, donc il existe une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \rightarrow \varprojlim_n C_*(n) \rightarrow \prod_n C_*(n) \rightarrow \prod_n C_*(n) \rightarrow 0.$$

En étudiant la suite exacte longue en homologie associée, montrer qu'il existe une suite exacte naturelle :

$$0 \rightarrow \lim^1 H_{t+1}(C_*(n)) \rightarrow H_t(\lim C_*(n)) \rightarrow \lim H_t(C_*(n)) \rightarrow 0.$$