(1) (a) Soit $X \in \mathrm{Ob}\mathscr{Sp}$ un spectre tel que l'ensemble des nombres naturels n tel que $\sigma_n : \Sigma X_n \to X_{n+1}$ est le morphisme trivial est infini. Montrer que le morphisme canonique $0 \to X$ est une équivalence d'homotopie stable.

(b) Soit E un spectre tel que chaque morphisme σ_n est trivial et soit F un CW-spectre. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{Sp}}(E, F) = \{*\}$, le morphisme trivial.

(c) Soit $\{E_n | n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de CW-complexes pointés et E^{triv} le spectre $E^{\mathrm{triv}}_n = E_n$, les morphismes de structure étant triviaux. Construire un CW-spectre E' explicite et une équivalence d'homotopie stable $E' \xrightarrow{\simeq} E^{\mathrm{triv}}$. (Remarque : le théorème de Whitehead ne s'applique pas, puisque E^{triv} n'est pas un CW-spectre.)

(2) (Voir la section 3.9 des notes pour le changement d'indexation de spectres.) Soient $I \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble infini et $E \in \mathrm{Ob}\mathscr{Sp}$ un spectre. Montrer que la counité de l'adjonction (Proposition 3.9.4)

$$\mathscr{L}_I \mathscr{R}_I E \to E$$

est une équivalence d'homotopie stable.

Déduire que, si E est un CW-spectre, alors les spectres $\mathscr{L}_I \mathscr{R}_I E$ et E ont le même type d'homotopie dans la catégorie $\mathbb{S}p^{\mathrm{CW}}$.

(3) (Rappeler que l'espace complexe projectif $\mathbb{C}P^n$ a la structure d'un CW-complexe, définie par récursion $\mathbb{C}P^{n+1} \cong \mathbb{C}P^n \cup_{S^{2n+1}} e^{2(n+1)}$.) Définir un CW-spectre X tel que $X_{2n} = \Sigma^{2n}\mathbb{C}P^n$ qui est muni d'un morphisme $X \to \Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty$.

(a) Montrer que X est un sous CW-spectre cofinal de $\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty$.

(b) Déduire que les spectres X et $\Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty$ ont le même type d'homotopie dans la catégorie $\mathbb{S}p^{\mathrm{CW}}$.

(c) Par contre, montrer que le morphisme $X \to \Sigma^\infty \mathbb{C}P^\infty$ n'admet pas de rétracte à homotopie près dans la catégorie $\mathscr{Sp}^{\mathrm{CW}}$.

(4) Soient $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne et $\mathrm{CoCh}(\mathscr{A})$ la catégorie des complexes de cochaînes (différentiel $d : C^i \to C^{i+1}$), $\mathrm{CoCh}^{\geq 0}(\mathscr{A})$ la sous-catégorie pleine des complexes $(C^\bullet, d)$ tels que $C^i = 0$ si $i < 0$. Le foncteur décalage $[1] : \mathrm{CoCh}(\mathscr{A}) \to \mathrm{CoCh}(\mathscr{A})$ est défini par $(C^\bullet)[1])^n := C^{n-1}$.

(a) Construire la catégorie des spectres $\mathscr{Sp}(\mathrm{CoCh}^{\geq 0}(\mathscr{A}), [1])$ - le foncteur $[1]$ joue le rôle de la suspension.

(b) Construire le foncteur $\mathrm{CoCh}(\mathscr{A}) \to \mathscr{Sp}(\mathrm{CoCh}^{\geq 0]}, [1])$ qui étend le foncteur 'spectre de suspensions'.

(c) Construire un foncteur $\Omega^\infty : \mathscr{Sp}(\mathrm{CoCh}^{\geq 0]}, [1]) \to \mathrm{CoCh}(\mathscr{A})$.
(Idée $\{\Omega^\infty(C^\bullet_*, \sigma_*)\}^t$ est la colimite $C^t_0 \to C^{t+1}_1 \to C^{t+2}_2 \to \ldots$.)

(d) Calculer les foncteurs composés : $\mathrm{CoCh}(\mathscr{A}) \to \mathscr{Sp}(\mathrm{CoCh}^{\geq 0]}, [1]) \to \mathrm{CoCh}(\mathscr{A})$ et $\mathscr{Sp}(\mathrm{CoCh}^{\geq 0]}, [1]) \to \mathrm{CoCh}(\mathscr{A}) \to \mathscr{Sp}(\mathrm{CoCh}^{\geq 0]}, [1])$.

(5) Modifier les constructions de Ex 4, en remplaçant la catégorie des complexes de cochaines par la catégorie des complexes de chaînes, $\mathrm{Ch}(\mathscr{A})$: définir la catégorie $\mathscr{Sp}(\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathscr{A}), [1])$ et donner la bonne définition de $\mathrm{Ch}(\mathscr{A}) \to \mathscr{Sp}(\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathscr{A}), [1])$.

(6) Soit X un CW-spectre. Définir le spectre des complexes cellulaires associé, $C^{\mathrm{Sp,cell}}(X)$ dans $\mathscr{Sp}(\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathfrak{A}b), [1])$ et le complexe

$$C^{\mathrm{cell}}(X) := \Omega^\infty(C^{\mathrm{Sp,cell}}(X)) \in \mathrm{ObCh}(\mathfrak{A}b).$$

Calculer l'homologie du complexe $C^{\mathrm{cell}}(X)$.

(7) Soit $\Phi : \mathscr{Sp}^{\mathrm{CW}} \to \mathscr{Sp}^{\mathrm{CW}}$ un foncteur tel que

- Φ préserve les inclusions de CW-spectres ;
- si $X' \subset X$ est un sous CW-spectre cofinal, alors $\Phi(X') \subset \Phi(X)$ est cofinal ;
- il existe une transformation naturelle $\Phi(X) \wedge I_+ \to \Phi(X \wedge I_+)$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Phi(X) \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "="'] & \Phi(X) \wedge I_+ \arrow[d] & \Phi(X) \arrow[l, "i_1"'] \arrow[d, "="] \\
\Phi(X) \arrow[r, "\Phi(i_0)"'] & \Phi(X \wedge I_+) & \Phi(X). \arrow[l, "\Phi(i_1)"]
\end{tikzcd}$$

Montrer que Φ induit un foncteur $\Phi : \mathscr{SH} \to \mathscr{SH}$. (Vérifier également que $\Phi(X \wedge I_+) \to \Phi(X) \wedge I_+$ est une équivalence d'homotopie.)