

STRUCTURES SYMPLECTIQUES DÉCALÉES ET EXEMPLES I

GEOFFREY POWELL

TABLE DES MATIÈRES

1. Dualité	1
1.1. Complexes fortement dualisables	1
1.2. Produits symétriques	2
1.3. Non-dégénérescence	2
2. L'algèbre $\mathbf{DR}^{int}$ de de Rham	3
2.1. Complexes mixtes	3
2.2. Algèbres commutatives	5
3. Les p -formes et les formes fermées	6
4. Structures symplectiques décalées - le cas affine	8
4.1. Définitions	8
4.2. Premiers exemples	9
4.3. Exemples - pour $A \in \mathfrak{cdga}_{\mathbb{k}}^+$	11
5. Structures symplectiques décalées pour les champs dérivés	12
5.1. Exemples	13
Références	14

Fixons $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0.

1. DUALITÉ

Fixons $A \in \mathfrak{cdga}_{\mathbb{k}}$; pour les applications A sera un objet *cofibrant* de $\mathfrak{cdga}_{\mathbb{k}}^+$, mais ceci n'est pas indispensable dans un premier temps. Comme d'habitude, on dénote par $\mathfrak{Mod}_A$ la catégorie des A -modules, munie de la structure de catégorie de modèle héritée des complexes de chaîne $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}$; en particulier, $\mathfrak{Mod}_A$ est *fibrant* mais pas *cofibrant* en général.



Exercice 1.1. Donner une caractérisation des A -modules cofibrants.

1.1. Complexes fortement dualisables. La catégorie $\mathfrak{Mod}_A$ possède un hom interne $\underline{\mathrm{Hom}}_A(-, -)$ qui est l'adjoint à droite du foncteur $- \otimes_A M$.

Définition 1.2. Le foncteur dualité $D : \mathfrak{Mod}_A^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathfrak{Mod}_A$ est le foncteur

$$DM := \underline{\mathrm{Hom}}_A(M, A);$$

les morphismes d'adjonction fournissent

$$\begin{aligned} DM \otimes_A M &\rightarrow A \\ M &\rightarrow DDM. \end{aligned}$$

Définition 1.3. Un objet M de $\mathfrak{Mod}_A$ est *fortement dualisable* s'il est cofibrant et, $\forall N \in \mathfrak{Mod}_A$, le morphisme naturel

$$DM \otimes_A N \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N)$$

est un isomorphisme.

Remarque 1.4.

- (1) Les objets fortement dualisables de $\mathfrak{Mod}_A$ généralisent les *complexes parfaits* (qui sont les objets compacts de la catégorie dérivée $\mathfrak{D}(R)$ d'un anneau commutatif R).
- (2) M est fortement dualisable si et seulement si $M[n]$ l'est $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.5. [HPS97, Theorem A.2.5] Soit $M \in \mathfrak{Mod}_A$ fortement dualisable, alors

- (1) DM est fortement dualisable ;
- (2) le morphisme canonique $M \rightarrow DDM$ est un isomorphisme ;
- (3) pour tout $N \in \mathfrak{Mod}_A$, le morphisme canonique

$$DM \otimes_A DN \rightarrow D(M \otimes_A N)$$

est un isomorphisme.

1.2. Produits symétriques. Pour $n \in \mathbb{N}$, le n -ième produit symétrique de $M \in \mathfrak{Mod}_A$ est, par définition

$$\mathbb{S}_A^n(M) := M^{\otimes_A n} / \mathfrak{S}_n,$$

où l'action du groupe symétrique est fournie par la structure symétrique monoïdale de $\mathfrak{Mod}_A$.

Lemme 1.6. Le transfert fournit une section naturelle de la projection canonique

$$M^{\otimes_A n} \twoheadrightarrow \mathbb{S}_A^n(M).$$

En particulier, $\mathbb{S}_A^n(M)$ est isomorphe au sous-objet $(M^{\otimes_A n})^{\mathfrak{S}_n}$ des $\mathfrak{S}_n$ -invariants, qui est facteur direct.

Démonstration. Immédiat, puisque on travaille en caractéristique nulle. $\square$

Remarque 1.7. Par conséquent, on peut dériver les foncteurs $\mathbb{S}_A^n(-)$ en prenant une résolution cofibrante, puisque on sait que le produit tensoriel $- \otimes_A M$ se comporte bien lorsque M est cofibrant.

1.3. Non-dégénérescence.

Proposition 1.8. Soit $M \in \mathfrak{Mod}_A$ un objet fortement dualisable (en particulier un A -module cofibrant), alors un morphisme de $\mathfrak{Mod}_A$

$$\omega : A \rightarrow \mathbb{S}_A^2(M)[n]$$

(pour $n \in \mathbb{Z}$) est adjoint à un morphisme de $\mathfrak{Mod}_A$

$$\tilde{\omega} : DM \rightarrow M[n]$$

avec la propriété que $D\tilde{\omega} : D(M[n]) \cong DM[-n] \rightarrow D(DM) \cong M$ est le morphisme $\tilde{\omega}[-n]$.

Démonstration. L'inclusion canonique $\mathbb{S}_A^2(M) \subset M \otimes_A M[n]$ donne le morphisme

$$A \rightarrow M \otimes_A M[n] \cong DDM \otimes_A M[n] \cong \underline{\mathrm{Hom}}_A(DM, M),$$

en utilisant le fait que M soit fortement dualisable pour les isomorphismes.

Par adjonction, on obtient le morphisme $\tilde{\omega}$. La deuxième propriété découle de l'invariance de ω sous l'action de $\mathfrak{S}_2$. $\square$

Remarque 1.9. La donnée du morphisme ω est équivalente à la donnée d'un cycle de degré zéro de $\mathbb{S}_A^2(M)[n]$, où encore (avec nos conventions), d'un cycle de degré $-n$ de $\mathbb{S}_A^2(M)$.

Définition 1.10. Soit $M \in \mathfrak{Mod}_A$ fortement dualisable ; un cycle $\omega \in \mathbb{S}_A^2(M)_{-n}$ est *non-dégénéré* si le morphisme associé

$$\tilde{\omega} : DM \rightarrow M[n]$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{Mod}_A$.

Remarque 1.11. La valeur de n est nécessairement unique ; sinon M serait périodique (i.e. $M \cong M[d]$ pour $d \neq 0$), ce qui contredirait l'hypothèse que M soit fortement dualisable.

Exemple 1.12. Le cas qui nous intéresse est $M := \mathbb{L}_A[-1]$, où $A \in \mathfrak{cdga}_{\mathbb{k}}^+$ est cofibrant. En particulier, la condition que M soit fortement dualisable impose une restriction forte sur A .

Remarque 1.13.

- (1) On peut identifier

$$\mathbb{S}_A^2(\mathbb{L}_A[-1]) \cong \Lambda_A^2(\mathbb{L}_A)[-2],$$

ce qui établit la relation avec la présentation habituelle du complexe de de Rham (voir la section suivante).

- (2) Par rapport au matériel de la Section 2, il est utile de considérer $\mathbb{S}_A^*(\mathbb{L}_A[-1])$ comme un objet $\mathbb{N}$ -gradué. En particulier, la différentielle universelle $d : A \rightarrow \mathbb{L}_A$ munit $\mathbb{S}_A^*(\mathbb{L}_A[-1])$ de la structure d'un *complexe mixte*.

2. L'ALGÈBRE $\mathbf{DR}^{int}$ DE DE RHAM

On présente ici une simplification du matériel de [CPT⁺15, Sections 1.1-1.3], adaptée au cas qui nous intéresse.

2.1. Complexes mixtes.

Notation 2.1. Pour alléger la notation, on écrit $\mathfrak{M}$ pour une la catégorie de modèle *stable* et *tensorielle* $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}$ (munie de $\otimes_{\mathbb{k}}$), qui est *fibrante* et $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}$ -enrichie.

Définition 2.2. Soit $\mathfrak{M}^{gr}$ la catégorie $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}$ (dont les objets sont les suites $(X_n | n \in \mathbb{Z})$ d'objets de $\mathfrak{M}$ et les morphismes les suites de morphismes $\mathbb{Z}$ -indexées) munie de sa structure de modèle *ponctuelle* (qui est donc *fibrante*) et de la structure symétrique monoïdale

$$(X \otimes Y)_n := \coprod_{i+j=n} X_i \otimes Y_j$$

où la symétrie est induite par $\tau : X_i \otimes Y_j \xrightarrow{\cong} Y_j \otimes X_i$ provenant de $\mathfrak{M}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, le foncteur d'évaluation $\text{eval}_n : \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}$ envoie $(X_t | t \in \mathbb{Z}) = X_n$; le foncteur d'inclusion $\iota_n : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$ envoie Y à l'objet

$$(\iota_n Y)_t = \begin{cases} Y & t = n \\ 0 & t \neq n. \end{cases}$$

Exercice 2.3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que ι_n est à la fois l'adjoint à gauche et à droite du foncteur eval_n . ⇒

La catégorie $\mathfrak{M}^{gr}$ est munie du foncteur de décalage :

$$(\cdot)(-1)[1] : \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$$

qui envoie l'objet (X_n) à $(X_{n+1}[1])$ (i.e. $(X(-1)[1])_n = X_{n+1}[1]$).

Remarque 2.4. Ce foncteur ne respecte pas la structure monoïdale, mais on dispose d'isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} (X \otimes Y)(-1)[1] &\cong X \otimes (Y(-1)[1]) \\ &\cong X(-1)[1] \otimes Y. \end{aligned}$$

Définition 2.5. Soit $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ la catégorie dont les objets sont les couples (X, ϵ) , où

- (1) X est un objet de $\mathfrak{M}^{gr}$;
- (2) ϵ est un morphisme $X \xrightarrow{\epsilon} X(-1)[1]$ tel que $\epsilon(-1)[1] \circ \epsilon = 0$.

Un morphisme $(X, \epsilon) \rightarrow (Y, \eta)$ est un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathfrak{M}^{gr}$ qui fait commuter

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\epsilon} & X(-1)[1] \\ f \downarrow & & \downarrow f(-1)[1] \\ Y & \xrightarrow{\eta} & Y(-1)[1]. \end{array}$$

Le foncteur oubli $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$ oublie le morphisme structural ϵ et le foncteur $\epsilon = 0 : \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ envoie $X \mapsto (X, 0)$.

Exercice 2.6. Montrer que le foncteur $\epsilon = 0 : \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ est pleinement fidèle et qu'il est une section du foncteur oubli $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$.

Exemple 2.7. Soit $\mathbb{1} \in \mathfrak{M}$ l'objet unité de la structure symétrique monoïdale. Alors l'objet $\mathbb{1}_\epsilon \in \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ est donné par $(\mathbb{1}_\epsilon)_0 = \mathbb{1}$, $(\mathbb{1}_\epsilon)_1 = \mathbb{1}[-1]$, tous les autres composants étant 0. Le morphisme de structure est induit par le morphisme identité de $\mathbb{1}$.

Proposition 2.8. La catégorie $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ possède une structure symétrique monoïdale fermée pour laquelle le foncteur oubli

$$\epsilon - \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$$

est symétrique monoïdale. Explicitement, le morphisme de structure de $(X, \epsilon) \otimes (Y, \eta)$ est $\epsilon \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \eta$, interprété à l'aide des isomorphismes de la Remarque 2.4.

Démonstration. (Exercice!) Le décalage $[1]$ dans la définition de $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ est introduite précisément pour que ce résultat soit valable ; le point à vérifier est que $\epsilon^2 = 0$ sur le produit tensoriel. Pour le hom interne, voir [CPT⁺15, page 17]. $\square$

Corollaire 2.9. Le foncteur oubli $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$ admet comme adjoint à gauche le foncteur

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Free}_\epsilon & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathfrak{M}^{gr} & \xrightarrow{\epsilon=0} & \epsilon - \mathfrak{M}^{gr} & \xrightarrow{- \otimes \mathbb{1}_\epsilon} & \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}. \end{array}$$

Démonstration. Exercice. $\square$

Théorème 2.10. La catégorie $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ possède une structure de catégorie de modèle monoïdale pour laquelle l'adjonction

$$\text{Free}_\epsilon : \mathfrak{M}^{gr} \rightleftarrows \epsilon - \mathfrak{M}^{gr} : \text{Oubli}$$

est une adjonction de Quillen. Explicitement, les fibrations¹ et les équivalences faibles sont détectées par le foncteur oubli $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$.

1. typo dans [CPT⁺15, page 16] ?

Remarque 2.11.  Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $\mathbb{k}(p) := \iota_p \mathbb{k} \in \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$. L'objet $\mathbb{k}(p)$ n'est pas cofibrant ; un remplacement cofibrant $Q\mathbb{k}(p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}(p)$ est représenté par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & \mathbb{k} & & \mathbb{k} & & \mathbb{k} & \cdots \\
 & & \searrow \epsilon & & \downarrow d & \searrow \epsilon & \downarrow d & \cdots \searrow \epsilon \\
 -1 & & & & \mathbb{k} & & \mathbb{k} & \\
 & & (p) & & (p+1) & & (p+2) &
 \end{array}$$

do sorte que

$$(Q\mathbb{k}(p))_i = \begin{cases} 0 & i < p \\ \mathbb{k} & i = p \\ \mathbb{k}_0 \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{k}_{-1} & i > p. \end{cases}$$

De plus, on dispose de l'inclusion

$$\text{Free}_\epsilon \mathbb{k}(p) \hookrightarrow Q\mathbb{k}(p)$$

dont la composition avec $Q\mathbb{k}(p) \rightarrow \mathbb{k}(p)$ est la projection canonique $\text{Free}_\epsilon \mathbb{k}(p) \rightarrow \mathbb{k}(p)$. L'inclusion induit la suite exacte courte dans $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$:

$$0 \rightarrow \text{Free}_\epsilon \mathbb{k}(p) \rightarrow Q\mathbb{k}(p) \rightarrow Q\mathbb{k}(p+1) \rightarrow 0.$$

2.2. Algèbres commutatives. La catégorie $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ étant symétrique monoïdale, on peut considérer sa catégorie $\text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr})$ des monoïdes commutatifs et unitaires, munie du foncteur oubli

$$\text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}) \rightarrow \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}.$$

Théorème 2.12. *La catégorie $\text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr})$ (respectivement $\text{Comm}(\mathfrak{M}^{gr})$) est une catégorie de modèle telle que les fibrations et les équivalences faibles sont détectées par le foncteur oubli $\text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}) \rightarrow \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ (resp. $\text{Comm}(\mathfrak{M}^{gr}) \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$).*

Démonstration. Cela découle par exemple du résultat général [Lur14, Proposition 4.5.4.6]. $\square$

Le foncteur eval_0 d'évaluation à 0 induit un foncteur

$$\text{eval}_0 : \text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}) \rightarrow \text{Comm}(\mathfrak{M}) = \mathbf{cdga}_{\mathbb{k}}$$

$$(A_n) \mapsto A_0.$$

Théorème 2.13. *Le foncteur $\text{eval}_0 : \text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}) \rightarrow \text{Comm}(\mathfrak{M}) = \mathbf{cdga}_{\mathbb{k}}$ admet un adjoint à gauche*

$$\mathbf{DR}^{int} : \mathbf{cdga}_{\mathbb{k}} \rightleftarrows \text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}),$$

le foncteur algèbre de de Rham interne. L'adjonction

$$\mathbf{DR}^{int} : \mathbf{cdga}_{\mathbb{k}} \rightleftarrows \text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}) : \text{eval}_0$$

est une adjonction de Quillen.

Explicitement, pour $A \in \mathbf{cdga}_{\mathbb{k}}$, l'objet gradué de $\text{Comm}(\mathfrak{M}^{gr})$ sous-jacent de $\mathbf{DR}^{int}(A)$ est :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{DR}^{int}(A)_t &\cong \mathbb{S}_A^t(\Omega_{A/\mathbb{k}}[-1]) \\
 &\cong (\Lambda_A^t \Omega_{A/\mathbb{k}})[-t]
 \end{aligned}$$

muni du morphisme ϵ de structure induit par la dérivation universelle $d : A \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{k}}$.

Démonstration. (Exercice!) Le point clé est le suivant : soit $(A_n) \in \text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr})$; la structure multiplicative entraîne que A_1 est un A_0 -module et que le morphisme de structure $\epsilon : A_0 \rightarrow A_1[1]$ est une dérivation, donc induit un morphisme $\Omega_{A_0/\mathbb{k}} \rightarrow A_1$ de A_0 -modules. $\square$

Remarque 2.14.  Pour que $\mathbf{DR}^{int}$ ait le bon comportement homotopique, il faut supposer que A soit cofibrant (ou bien passer à son foncteur dérivé).

3. LES p -FORMES ET LES FORMES FERMÉES

Proposition 3.1. Les catégories $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}$ et $\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}$ sont $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}$ -enrichies.

Démonstration. Pour $C, D \in \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}$, on a

$$\mathbf{Hom}(C, D) := \prod_k \underline{\mathbf{Hom}}(C(k), D(k)) \in \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}.$$

Si $C, D \in \epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}$, on dispose des morphismes de structure dans $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_C : C &\rightarrow C(-1)[1] \\ \epsilon_D : D &\rightarrow D(-1)[1] \end{aligned}$$

et on définit :

$$\mathbf{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(C, D) := \text{egal}\{\mathbf{Hom}(C, D) \rightrightarrows \mathbf{Hom}(C, D(-1)[1])\},$$

l'égalisateur (dans $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}$) des deux morphismes induits.

On vérifie que ces constructions fournissent des enrichissements des catégories respectives. $\square$

Rappelons que

$$|-| : \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}} \rightarrow \Delta^{\text{op}} \mathfrak{Ens}$$

est la composition du foncteur de troncation $t_{\geq 0} : \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^+$ avec le foncteur de Kan (provenant de l'équivalence de Dold-Kan)

$$\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^+ \rightarrow \Delta^{\text{op}} \mathfrak{Mod}_{\mathbb{k}}$$

et avec le foncteur oubli $\Delta^{\text{op}} \mathfrak{Mod}_{\mathbb{k}} \rightarrow \Delta^{\text{op}} \mathfrak{Ens}$. Les trois foncteurs sont des adjoints à droite, donc $|-|$ est l'adjoint à droite du foncteur

$$\Delta^{\text{op}} \mathfrak{Ens} \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}$$

induit par le foncteur $\mathbb{k}[-]$ (espace vectoriel libre) et Dold-Kan.

Remarque 3.2. Le foncteur $|-|$ prend ses valeurs dans les complexes de Kan.

Définition 3.3. Soient

- (1) $\text{Map}_{\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(-, -) := |\mathbf{Hom}_{\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(-, -)| \in \Delta^{\text{op}} \mathfrak{Ens}$
- (2) $\text{Map}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(-, -) := |\mathbf{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(-, -)| \in \Delta^{\text{op}} \mathfrak{Ens}$

les espaces fonctionnels induits par les $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}$ -enrichissements respectifs.

Exercice 3.4. Soient $C, D \in \epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}$. Montrer que

- (1) $\text{Map}_{\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(C, D)_0 = \text{Hom}_{\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(C, D)$;
- (2) $\text{Map}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(C, D)_0 = \text{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(C, D)$.

Remarque 3.5.  Puisque les catégories $\mathfrak{Ch}_k^{gr}$ et $\epsilon - \mathfrak{Ch}_k^{gr}$ sont *fibrantes* mais pas *cofibrantes*, pour avoir le bon comportement homotopique, il faut *dérivé*. Explicitement, on considère

$$\mathbb{R}\mathrm{Map}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_k^{gr}}(C, D) := \mathrm{Map}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_k^{gr}}(QC, D),$$

où $QC \rightarrow C$ est une résolution cofibrante de C (idem pour $\mathfrak{Ch}_k^{gr}$).

Soit $A \in \mathfrak{cdga}_k^+$ cofibrante, on considère $\mathbf{DR}^{int}(A)$ comme objet de $\epsilon - \mathfrak{Ch}_k^{gr}$, en oubliant la structure multiplicative. On utilise le morphisme

$$(1) \quad \mathrm{Free}_\epsilon \mathbb{k}(p) \hookrightarrow Q\mathbb{k}(p)$$

de la Remarque 2.11, où les deux objets sont cofibrants.

Définition 3.6. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$; on définit :

(1) l'espace des *p-formes de degré n* :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^p(A, n) &:= \mathrm{Map}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_k^{gr}}(\mathrm{Free}_\epsilon \mathbb{k}(p), \mathbf{DR}^{int}(A)[p+n]) \\ &\cong \mathrm{Map}_{\mathfrak{Ch}_k^{gr}}(\mathbb{k}(p), \mathbf{DR}^{int}(A)[p+n]) \\ &\cong |\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ch}_k}(\mathbb{k}, \mathbb{S}_A^p(\mathbb{L}_A[-1])[p+n])| \\ &\cong |_{t \geq 0} (\mathbb{S}_A^p(\mathbb{L}_A[-1])[p+n])|; \end{aligned}$$

(2) l'espace des *p-formes fermées de degré n* :

$$\mathcal{A}^{p,cl}(A, n) := \mathrm{Map}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_k^{gr}}(Q\mathbb{k}(p), \mathbf{DR}^{int}(A)[p+n])$$

(3) le morphisme naturel induit par (1) :

$$(2) \quad \mathcal{A}^{p,cl}(A, n) \rightarrow \mathcal{A}^p(A, n).$$

Exercice 3.7. Montrer que $\mathcal{A}^p(A, n)_0$ est trivial si $n > 0$. 

Exemple 3.8. Par définition, on a $\mathcal{A}^1(A, n) \cong |\mathbb{L}_A[n]|$, où on considère $\mathbb{L}_A$ comme objet de $\mathfrak{Ch}_k$, en oubliant l'action de A . Ainsi, l'ensemble simplicial $\mathcal{A}^1(A, 0)$ permet de récupérer le $\mathbb{k}$ -complexe sous-jacent de $\mathbb{L}_A$ (ce dernier appartient à $\mathfrak{Mod}_A^+$ puisque $A \in \mathfrak{cdga}_k^+$) à isomorphisme près, via l'équivalence de Dold-Kan.

Remarque 3.9. Le morphisme (2) est induit par le morphisme de complexes de chaîne :

$$\mathrm{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_k^{gr}}(Q\mathbb{k}(p), \mathbf{DR}^{int}(A)[p+n]) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_k^{gr}}(\mathrm{Free}_\epsilon \mathbb{k}(p), \mathbf{DR}^{int}(A)[p+n])$$

et donc est un morphisme d'espaces de lacets infinis. La définition d'une structure symplectique décalée introduit une notion non-additive (la condition non-dégénérée), ce qui explique le besoin de passer à $\Delta^{\mathrm{op}} \mathfrak{Ens}$.

Ces objets sont rendus plus explicites par le résultat suivant :

Proposition 3.10. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathfrak{cdga}_k^+$ cofibrant ; Alors

- (1) $\mathrm{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_k^{gr}}(\mathrm{Free}_\epsilon \mathbb{k}(p), \mathbf{DR}^{int}(A)[p+n]) \cong \mathbf{DR}^{int}(A)^p[p+n]$;
- (2) $\mathrm{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_k^{gr}}(Q\mathbb{k}(p), \mathbf{DR}^{int}(A)[p+n]) \cong \prod_{t \geq p} \mathbf{DR}^{int}(A)^t[p+n]$ avec différentielle totale (associée au complexe mixte).

Démonstration. Exercice ! 

4. STRUCTURES SYMPLECTIQUES DÉCALÉES - LE CAS AFFINE

4.1. Définitions. Soit $A \in \mathfrak{cdga}_{\mathbb{k}}^+$ cofibrante et $n \in \mathbb{Z}$; on suppose que l'hypothèse suivante soit vérifiée.

Hypothèse 4.1. Le complexe cotangent $\mathbb{L}_A \in \mathfrak{Mod}_A$ est fortement dualisable.

On a alors la notion suivante de forme non-dégénéré.

Définition 4.2.

- (1) Un point $\omega \in \mathcal{A}^2(A, n)_0$ est *non-dégénéré* si le morphisme qui lui correspond, $A \rightarrow \mathbb{S}_A^2(\mathbb{L}_A[-1])[2+n]$ est non-dégénéré.
- (2) Soit $\mathcal{A}^2(A, n)^{\text{nd}} \subset \mathcal{A}^2(A, n)$ la réunion des composantes connexes dont les points sont non-dégénérés.

Remarque 4.3.

- (1) La condition de *non-dégénérescence* ne dépend que de la composante connexe, donc $\mathcal{A}^2(A, n)^{\text{nd}}$ est bien défini.
- (2) Si $n > 0$, $\mathcal{A}^2(A, n)^{\text{nd}}$ est vide.

Définition 4.4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'espace des *structures symplectiques n -décalées* sur $\mathbb{R}\text{Spec}(A)$ est $\mathbf{Symp}(A, n)$, défini par le produit fibré homotopique :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Symp}(A, n) & \longrightarrow & \mathcal{A}^{2, \text{cl}}(A, n) \\ \downarrow & \lrcorner_h & \downarrow \\ \mathcal{A}^2(A, n)^{\text{nd}} & \hookrightarrow & \mathcal{A}^2(A, n). \end{array}$$

Remarque 4.5.

- (1) Les formes fermées correspondent à une structure supplémentaire, pas simplement à une *propriété*. En particulier, la fibre homotopique de

$$\mathcal{A}^{2, \text{cl}}(A, n) \rightarrow \mathcal{A}^2(A, n)$$

est en général hautement non-trivial.

On l'identifie comme l'espace associé à la fibre homotopique de

$$\mathbf{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(Q\mathbb{k}(2), \mathbf{DR}^{int}(A)[2+n]) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(\text{Free}_{\epsilon}\mathbb{k}(2), \mathbf{DR}^{int}(A)[2+n])$$

dans $\mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}$. La suite exacte courte de $\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}$:

$$0 \rightarrow \text{Free}_{\epsilon}\mathbb{k}(2) \rightarrow Q\mathbb{k}(2) \rightarrow Q\mathbb{k}(3) \rightarrow 0$$

permet d'identifier cette fibre homotopique comme

$$\mathbf{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(Q\mathbb{k}(3), \mathbf{DR}^{int}(A)[3+(n-1)]) \in \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}$$

et donc, dans $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$:

$$\mathcal{A}^{3, \text{cl}}(A, n-1).$$

- (2) Puisque $\mathcal{A}^2(A, n)^{\text{nd}}$ est un sous-espace *plein* de $\mathcal{A}^2(A, n)$ (réunion de composantes connexes), $\mathbf{Symp}(A, n)$ est équivalent au sous-espace plein de $\mathcal{A}^{2, \text{cl}}(A, n)$ des 2-formes fermées dont la forme sous-jacente est non-dégénérée.

Ainsi, $\mathbf{Symp}(A, n)$ est une réunion disjointe d'espaces d'Eilenberg-MacLane généralisés. (En particulier, en général il n'y a aucune structure additive sur π_0 .)

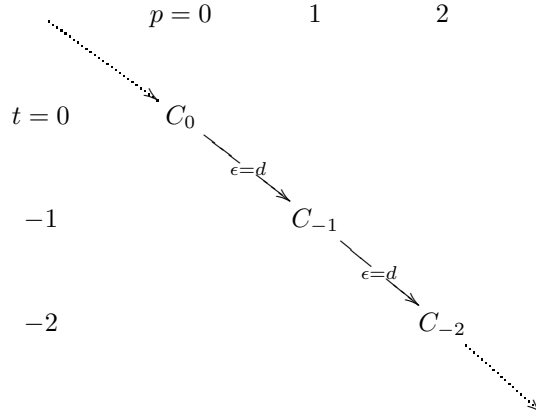
4.2. Premiers exemples. Afin de traiter la relation avec les structures symplectiques classiques, considérons le cadre général d'un complexe mixte concentré sur l'(anti)-diagonale.

Définition 4.6. Soit $\text{diag} : \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}} \rightarrow \epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}$ le plongement pleinement fidèle défini par :

$$\text{diag}(C)_t^p := \begin{cases} C_{-n} & p = n, t = -n \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où ϵ est induit par la différentielle.

Ainsi, $\text{diag}(C)$ peut être représenté par le diagramme :



Lemme 4.7. Soient $C \in \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\mathbf{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(\text{Free}_{\epsilon} \mathbb{k}(p), \text{diag}(C)) = \begin{cases} C_{-p} & n = -p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

en particulier, la différentielle est triviale. □

Démonstration. Exercice. □

Soit $X \in \epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}$; la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Free}_{\epsilon} \mathbb{k}(p) \rightarrow Q\mathbb{k}(p) \rightarrow Q\mathbb{k}(p+1) \rightarrow 0$$

induit une suite exacte courte de complexes :

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathbf{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(Q\mathbb{k}(p+1), X) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(Q\mathbb{k}(p), X) \rightarrow X^p \rightarrow 0.$$

En particulier, on a

Lemme 4.8. Soient $C \in \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\mathbf{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(Q\mathbb{k}(p), \text{diag}(C)) \cong t_{\leq -p}(C),$$

où $t_{\leq -p} : \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}$ est la troncation (naïve). La suite exacte courte (3) correspond à la suite canonique

$$0 \rightarrow t_{\leq -(p+1)}(C) \rightarrow t_{\leq -p}(C) \rightarrow C_{-p}[-p] \rightarrow 0,$$

où $C_{-p}[-p]$ est C_{-p} concentré en degré $-p$. □

Démonstration. Exercice. □

Pour l'étude des structures symplectiques décalées, on s'intéresse aux complexes tronqués, en introduisant un décalage :

$$t_{\geq 0} \mathbf{Hom}(Q\mathbb{k}(p), \text{diag}(C)[p+n]) \rightarrow t_{\geq 0} \mathbf{Hom}(\text{Free}_{\epsilon} \mathbb{k}(p), \text{diag}(C)[p+n]).$$

On peut identifier :

$$\begin{aligned}\mathbf{Hom}(Q\mathbb{k}(p), \text{diag}(C)[p+n]) &\cong \mathbf{Hom}(Q\mathbb{k}(p), \text{diag}(C))[p+n] \\ \mathbf{Hom}(\text{Free}_\epsilon \mathbb{k}(p), \text{diag}(C)[p+n]) &\cong \mathbf{Hom}(\text{Free}_\epsilon \mathbb{k}(p), \text{diag}(C))[p+n].\end{aligned}$$

Les lemmes 4.7 et 4.8 fournissent alors le résultat suivant :

Proposition 4.9. Soient $C \in \mathfrak{Ch}_\mathbb{k}$ et $p, n \in \mathbb{Z}$. Alors

- (1) $t_{\geq 0} \mathbf{Hom}(\text{Free}_\epsilon \mathbb{k}(p), \text{diag}(C)[p+n]) \cong \begin{cases} C_{-p}[n] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$
- (2) $t_{\geq 0} \mathbf{Hom}(Q\mathbb{k}(p), \text{diag}(C)[p+n]) \cong \begin{cases} t_{\geq 0} t_{\leq n}(C[p+n]) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$
- (3) Pour $n > 0$, le morphisme

$$t_{\geq 0} \mathbf{Hom}(Q\mathbb{k}(p), \text{diag}(C)[p+n]) \rightarrow t_{\geq 0} \mathbf{Hom}(\text{Free}_\epsilon \mathbb{k}(p), \text{diag}(C)[p+n])$$

est induit par la troncature bête (en degrés $\geq n$).

Si $n = 0$, les complexes sont concentrés en degré zéro et le morphisme est induit par l'inclusion

$$\ker\{C_{-p} \xrightarrow{d} C_{-(p+1)}\} \hookrightarrow C_{-p}.$$

En particulier,

- (1) Pour $n \geq 0$, $\text{Map}_{\epsilon-\mathfrak{Ch}_\mathbb{k}^{gr}}(\text{Free}_\epsilon \mathbb{k}(p), \text{diag}(C)[p+n])$ est l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(C_{-p}, n)$; pour $n < 0$ l'espace est $*$.
- (2) Pour $n = 0$, $\text{Map}_{\epsilon-\mathfrak{Ch}_\mathbb{k}^{gr}}(Q\mathbb{k}(p), \text{diag}(C)[p+n])$ est l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\ker\{C_{-p} \rightarrow C_{-(p+1)}\}, 0)$ et, pour $n < 0$, est $*$.
- (3) Pour $n > 0$,

$$\pi_i \text{Map}_{\epsilon-\mathfrak{Ch}_\mathbb{k}^{gr}}(Q\mathbb{k}(p), \text{diag}(C)[p+n]) = \begin{cases} \ker\{C_{-p} \rightarrow C_{-(p+1)}\} & i = n \\ H_{i-(p+n)}(C) & 0 \leq i < n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, $\text{Map}_{\epsilon-\mathfrak{Ch}_\mathbb{k}^{gr}}(Q\mathbb{k}(p), \text{diag}(C)[p+n])$ est un n -type d'homotopie.

Démonstration. Exercice. (Pour le dernier point, on utilise le fait que π_i correspond à l'homologie à travers l'équivalence de Dold-Kan.) $\square$

Remarque 4.10. Le complexe $t_{\geq 0} t_{\leq n}(C[p+n]) \in \mathfrak{Ch}_\mathbb{k}^+$ (pour $n > 0$) a la forme

$$\dots 0 \rightarrow C_{-p} \rightarrow C_{-(p+1)} \rightarrow \dots \rightarrow \ker\{C_{-(p+n)} \xrightarrow{d} C_{-(p+n+1)}\},$$

où C_{-p} est en degré n . Si $n = 0$, le complexe est $\ker(C_{-p} \xrightarrow{d} C_{-(p+1)})$ concentré en degré zéro.

Proposition 4.11. [PTVV13, p. 297] Soit A une algèbre commutative lisse. Alors, le complexe mixte $\mathbf{DR}^{int}(A)$ (considéré comme objet de $\epsilon-\mathfrak{Ch}_\mathbb{k}^{gr}$) est équivalent à $\text{diag}(\Lambda_A(\Omega_{A/\mathbb{k}}))$, où $\Lambda_A(\Omega_{A/\mathbb{k}})$ est considéré comme complexe de chaîne concentré en degrés non-positifs (avec différentielle de degré -1).

Corollaire 4.12. Soient A une algèbre commutative lisse $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors,

$$\pi_i \mathcal{A}^{p,cl}(A, n) \cong \begin{cases} \Omega_{A/\mathbb{k}}^{p,cl} & i = n \geq 0 \\ H_{dR}^{(p+n)-i}(\text{Spec } A) & 0 \leq i < n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $\mathbf{Symp}(A, n)$ est vide si $n \neq 0$ et $\mathbf{Symp}(A, 0)$ est équivalent à l'ensemble (discret) des formes symplectiques classiques.

4.3. Exemples - pour $A \in \mathbf{cdga}_k^+$. Fixons $A \in \mathbf{cdga}_k^+$ un objet cofibrant ; donc $A \cong (\mathbb{S}(V), d_A)$, pour V un espace vectoriel $\mathbb{N}$ -gradué.

Rappelons que $\Omega_{A/k} \in \mathbf{Mod}_A$ est de la forme

$$(\mathbb{S}(V) \otimes V, d),$$

où la différentielle est induite via la dérivation universelle par la différentielle de A . Explicitement (en écrivant d ici pour la dérivation universelle), la différentielle de $\Omega_{A/k}$ est déterminée par

$$V \subset \mathbb{S}(V) \xrightarrow{d_A} \mathbb{S}(V) \xrightarrow{d} \Omega_{\mathbb{S}(V)/k}.$$

Remarque 4.13. Dans le cas d'une algèbre semi-libre, la dérivation universelle admet la description explicite suivante. Les indécomposables de A s'identifient à $(V, \bar{d})$, où la différentielle $\bar{d}$ est la partie linéaire de d , et on dispose du morphisme canonique

$$\text{pr} : (\mathbb{S}(V), d) \rightarrow (V, \bar{d})$$

de complexes.

Le morphisme sous-jacent de la dérivation universelle est

$$\mathbb{S}(V) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{S}(V) \otimes \mathbb{S}(V) \xrightarrow{\mathbb{S}(V)^{\otimes \text{pr}}} \mathbb{S}(V) \otimes V.$$

 Ceci n'est pas un morphisme de complexes en général, lorsqu'on munit $\mathbb{S}(V) \otimes V$ de la structure complexe produit tensoriel.)

Cette description généralise l'expression non-graduée :

$$f \mapsto \sum_x \frac{\partial f}{\partial x} dx,$$

où x parcourt une base de V .

Remarque 4.14. Si A est semi-libre, Ω_A est cofibrant en tant que A -module (et est notre modèle pour le complexe cotangent $\mathbb{L}_A$). Le complexe des générateurs (en tant que A -module) est

$$k \otimes_A \Omega_{A/k} \cong (V, \bar{d}).$$

Lemme 4.15. Soit $A \cong (\mathbb{S}(V), d_A) \in \mathbf{cdga}_k^+$ semi-libre (on suppose $V \neq 0$). Alors le A -module $\Omega_{A/k}$ est fortement dualisable si et seulement si V est de dimension totale finie. En ce cas,

$$D\Omega_{A/k} \cong (A \otimes V^*, d) \in \mathbf{Mod}_A,$$

où la différentielle est induite par le morphisme $V^* \rightarrow A \otimes V^*$ adjoint au morphisme $V \rightarrow A \otimes V$ qui induit la différentielle de $\Omega_{A/k}$.

En particulier, si $D\mathbb{L}_A \cong \mathbb{L}[n] \neq 0$ alors $(V^*, \bar{d}^*) \simeq (V, \bar{d})[n]$, donc $n \leq 0$ avec égalité si et seulement si V est concentré en degré 0.

Démonstration. Exercice. □

Lemme 4.16. Soit $A \cong (\mathbb{S}(V), d_A) \in \mathbf{cdga}_k^+$ semi-libre. Le complexe gradué sous-jacent à $\mathbf{DR}^{\text{int}}(A)$ est donné par

$$\mathbf{DR}^{\text{int}}(A)^p = \mathbb{S}_A^p(\mathbb{L}_A[-1])$$

et, en tant que A -module gradué (non-différentiel)

$$\mathbb{S}_A^p(\mathbb{L}_A[-1]) \cong A \otimes \Lambda_k^p(V)[-p],$$

où la différentielle est induite par $V \mapsto A \otimes V$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 4.17. Soit $A \in \mathfrak{cdga}_k^+$ l'algèbre différentielle $(S(x, y), dy = f(x))$, où $|x| = 0$ et $|y| = 1$. Alors

$$\mathbb{L}_A = \Omega_{A/k} \cong (A\langle u, v \rangle, d)$$

où $|u| = 0$ et $|v| = 1$ et la différentielle est déterminée par $dv = f'(x)u$.

Le complexe dual est

$$D\mathbb{L}_A = (A\langle u^*, v^* \rangle, d)$$

où $|u^*| = 0$ et $|v^*| = -1$ et la différentielle est déterminée par $du^* = f'(x)v^*$.

En particulier, ces complexes sont isomorphes à décalage près :

$$D\mathbb{L}_A \cong \mathbb{L}_A[-1].$$

Ainsi, $\text{Symp}(A, n)$ est vide si $n \neq -1$.

De plus on a

$$(\Lambda_k^p(V)[-p])_t \cong \begin{cases} S^p(V_1) & t = 0 \\ S^{p-1}(V_1) \otimes V_0 & t = -1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En raison de cette troncature de $\mathbf{DR}^{int}(A)$, les complexes $\mathbf{Hom}_{\epsilon-\mathfrak{Ch}_k^{gr}}(\text{Free}_\epsilon k(2), \mathbf{DR}^{int}[1])$ et $\mathbf{Hom}_{\epsilon-\mathfrak{Ch}_k^{gr}}(Qk(2), \mathbf{DR}^{int}[1])$ appartiennent déjà à $\mathfrak{Ch}_k^+$. Donc, pour comprendre $\mathcal{A}^{2,cl}(A, -1)$ et $\mathcal{A}^2(A, -1)_s$, il suffit d'étudier ces complexes. Ainsi, dans cet exemple, la condition *fermée* ne joue aucun rôle visible.

Considérons $\mathcal{A}^{2,cl}(A, -1) \rightarrow \mathcal{A}^2(A, -1)$. On vérifie que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{2,cl}(A, -1)_0 &\cong \prod_{p \geq 2} S^*(V_0) \otimes (S^{p-1}(V_1) \otimes V_0) \\ \mathcal{A}^2(A, -1)_0 &\cong S^*(V_0) \otimes (V_1 \otimes V_0) \cong S^*(V_0). \end{aligned}$$

et que l'application est induite par la projection, en particulier elle est surjective. Pour le cas général, on fait appel à la Proposition 3.10.

On déduit que $\text{Symp}(A, -1)$ est non-vide : une forme non-dégénérée est donnée par un générateur (en tant que $S^*(V_0)$ -module) de $\mathcal{A}^2(A, -1)_0$. La condition de non-dégénérescence correspond à une condition sur la première composante ($p = 2$) de $\mathcal{A}^{2,cl}(A, -1)_0 \cong \prod_{p \geq 2} S^*(V_0) \otimes (S^{p-1}(V_1) \otimes V_0)$

5. STRUCTURES SYMPLECTIQUES DÉCALÉES POUR LES CHAMPS DÉRIVÉS

Pour traiter le cas d'un champ dérivé quelconque F (ou plutôt un champ t -géométrique avec de bonnes propriétés de finitude), il faut

- (1) donner un sens à $\mathcal{A}^p(F, n)$ et $\mathcal{A}^{p,cl}(F, n)$;
- (2) interpréter la condition *non-dégénérée*.

Remarque 5.1. L'idée est de passer du *local* au *global* en utilisant les champs dérivés.

Le premier point est traité par le résultat suivant :

Théorème 5.2. [PTVV13, Proposition 1.11] Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\mathcal{A}^p(-, n)$ et $\mathcal{A}^{p,cl}(-, n)$ sont des champs dérivés pour la topologie étale.

Démonstration. $\square$

$\square$

Ainsi on peut définir $\mathcal{A}^{p,cl}(F, n)$ et $\mathcal{A}^p(F, n)$; par exemple on a

$$\mathcal{A}^p(F, n) \cong \text{holim}_{X \rightarrow F \in \mathfrak{dAff}_k/F} \mathcal{A}^p(X, n).$$

Remarque 5.3. On a vu dans l'exemple 3.8 que $\mathcal{A}^1(A, n) \cong |\mathbb{L}_A[n]|$, où on considère $\mathbb{L}_A$ comme un objet de $\mathcal{C}h_{\mathbb{k}}$. Heuristiquement², $\mathcal{A}^1(F, n)$, pour F un champ dérivé, devrait correspondre à la réalisation topologique des sections $\mathbb{R}\Gamma(\mathbb{L}_F[n]) \in \mathcal{D}(\mathbb{k})$ (lorsque $\mathbb{L}_F$ existe !).

De même on a le morphisme d'ensembles simpliciaux :

$$\mathcal{A}^{p, \text{cl}}(F, n) \rightarrow \mathcal{A}^p(F, n).$$

Pour la condition de non-dégénérescence, on a besoin de l'hypothèse suivante.

Hypothèse 5.4. Soit F un champ dérivé t -géométrique (pour $t \in \mathbb{Z}$) et localement de présentation finie.

Proposition 5.5. ([TV08, PTVV13]... ?) Soit F un champ dérivé qui vérifie l'hypothèse 5.4. Alors $\mathbb{L}_F \in \mathbf{QCoh}(F)$ est fortement dualisable.

Démonstration. $\square$

Pour la condition de non-dégénérescence, on fait appel à :

Théorème 5.6. [PTVV13, Proposition 1.14] Soit F un champ dérivé qui vérifie l'hypothèse 5.4. Alors, le morphisme naturel :

$$\mathbb{R}\text{Map}_{\mathbf{QCoh}(F)}(\mathcal{O}_F, \mathbb{S}^p(\mathbb{L}_F[-1])[p+n]) \rightarrow \mathcal{A}^p(F, n)$$

est une équivalence.

Démonstration. $\square$

Par le Théorème 5.6, un point $\omega \in \mathcal{A}^2(F, n)_0$ correspond à un morphisme

$$\mathcal{O}_F \rightarrow \mathbb{S}^2(\mathbb{L}_F[-1])[2+n]$$

de $\mathbf{QCoh}(F)$. Les considérations de la Section 1.3 se généralisent : on dit que ω est non-dégénéré si le morphisme adjoint

$$D\mathbb{L}_F \rightarrow \mathbb{L}_F[n]$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{QCoh}(F)$. Ceci mène à la définition du sous-espace $\mathcal{A}^2(F, n)^{\text{nd}} \subset \mathcal{A}^2(F, n)$.

On peut ainsi fournir la généralisation suivante de la Définition 4.4 :

Définition 5.7. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et F un champ dérivé qui vérifie l'hypothèse 5.4. L'espace des structures symplectiques n -décalées sur F est $\mathbf{Symp}(F, n)$ défini par le produit fibré homotopique :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Symp}(F, n) & \longrightarrow & \mathcal{A}^{2, \text{cl}}(F, n) \\ \downarrow & \lrcorner_h & \downarrow \\ \mathcal{A}^2(F, n)^{\text{nd}} & \hookrightarrow & \mathcal{A}^2(F, n). \end{array}$$

5.1. Exemples.

Exemple 5.8. On considérera ultérieurement les exemples BG (ou $[*/G]$) G un groupe algébrique affine lisse (réductif) et, plus généralement, $[X/G]$, où G agit sur le schéma affine lisse X . L'avantage ici est qu'on dispose d'un bon modèle de la catégorie $\mathbf{QCoh}(BG)$ (respectivement $\mathbf{QCoh}([X/G])$).

2.  Je n'ai point vérifié une telle affirmation.

RÉFÉRENCES

- [CPT⁺15] D. Calaque, T. Pantev, B. Toen, M. Vaquie, and G. Vezzosi, *Shifted Poisson Structures and Deformation Quantization*, ArXiv e-prints (2015).
- [HPS97] Mark Hovey, John H. Palmieri, and Neil P. Strickland, *Axiomatic stable homotopy theory*, Mem. Amer. Math. Soc. **128** (1997), no. 610, x+114. MR 1388895
- [Lur14] Jacob Lurie, *Higher algebra*, Prépublication d'un livre, disponible à <http://www.math.harvard.edu/~lurie/>, 2014.
- [PTVV13] Tony Pantev, Bertrand Toën, Michel Vaquié, and Gabriele Vezzosi, *Shifted symplectic structures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 271–328. MR 3090262
- [TV08] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry. II. Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224. MR 2394633 (2009h :14004)