

STRUCTURES SYMPLECTIQUES DÉCALÉES - EXEMPLES II

GEOFFREY POWELL

TABLE DES MATIÈRES

1. Compléments	1
1.1. Rappels	1
1.2. La différentielle de de Rham	1
2. Passage aux champs dérivés	2
3. Le champ cotangent décalé	4
4. Structures symplectiques décalées sur BG	5
5. Structures symplectiques décalées sur $[X/G]$	6
5.1. Le complexe cotangent de $[X/G]$	7
5.2. Structures symplectiques décalées sur $[X/G]$	9
Références	9

Fixons $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0.

1. COMPLÉMENTS

1.1. **Rappels.** Soit $A \in \mathbf{cdga}_{\mathbb{k}}^+$ cofibrante (semi-libre) et $n \in \mathbb{Z}$. L'espace $\mathbf{Symp}(A, n)$ est le produit fibré homotopique :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Symp}(A, n) & \longrightarrow & \mathcal{A}^{2, \text{cl}}(A, n) \\ \downarrow & \lrcorner_h & \downarrow \\ \mathcal{A}^2(A, n)^{\text{nd}} & \hookrightarrow & \mathcal{A}^2(A, n), \end{array}$$

où

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{2, \text{cl}}(A, n) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{A}^2(A, n) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbf{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(Q\mathbb{k}(2), \mathbf{DR}^{int}(A)[2+n]) & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}}(\text{Free}_{\epsilon}\mathbb{k}(2), \mathbf{DR}^{int}(A)[2+n]) \end{array}$$

est induit par l'inclusion $\text{Free}_{\epsilon}\mathbb{k}(2) \hookrightarrow Q\mathbb{k}(2)$. $\mathcal{A}^2(A, n)^{\text{nd}}$ est le sous-espace plein des formes non-dégénérés.

1.2. **La différentielle de de Rham.** Pour $p \in \mathbb{N}$, la suite exacte courte de $\epsilon - \mathfrak{Ch}_{\mathbb{k}}^{gr}$

$$(1) \quad 0 \rightarrow \text{Free}_{\epsilon}\mathbb{k}(p) \rightarrow Q\mathbb{k}(p) \rightarrow Q\mathbb{k}(p+1) \rightarrow 0$$

induit l'application

$$\mathcal{A}^p(A, n) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1, \text{cl}}(A, n),$$

qu'on considère comme la *différentielle de de Rham*.

On peut comprendre ce morphisme de la manière suivante. On a un diagramme commutatif dans $\epsilon - \mathfrak{Ch}_k^{gr}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Qk(p) & \longrightarrow & Qk(p+1) \oplus \text{Free}_\epsilon I(p) & \longrightarrow & \text{Free}_\epsilon k(p)[1] \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \downarrow \simeq & & \uparrow \\
 & & & & Qk(p+1) & \longrightarrow & k(p+1)
 \end{array}$$

où $I(p)$ est le complexe de poids p , $k \xrightarrow{\text{id}} k$ en degrés 1, 0. La ligne supérieure est une suite exacte courte de $\epsilon - \mathfrak{Ch}_k^{gr}$ qui représente la décalée de (1).

Le morphisme explicite

$$Qk(p+1) \twoheadrightarrow k(p+1) \hookrightarrow \text{Free}_\epsilon k(p)[1]$$

induit la différentielle de de Rham $\mathcal{A}^p(A, n) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1, \text{cl}}(A, n)$.

Remarque 1.1. La composée

$$\mathcal{A}^p(A, n) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1, \text{cl}}(A, n) \rightarrow \mathcal{A}^p(A, n+1)$$

est alors induite par la composée

$$\text{Free}_\epsilon k(p+1) \twoheadrightarrow k(p+1) \hookrightarrow \text{Free}_\epsilon k(p)[1]$$

donnée par la restriction à $\text{Free}_\epsilon k(p+1) \subset Qk(p+1)$. Ceci explique la relation avec la différentielle de de Rham de $\mathbf{DR}^{int}(A)$.

Remarque 1.2. Le morphisme d'espaces $\mathcal{A}^1(A, n) \rightarrow \mathcal{A}^{2, \text{cl}}(A, n)$ permet de construire des 2-formes fermées. Pour la condition de non-dégénérescence, on passe à la forme sous-jacente, et on considère

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{A}^1(A, n) & \\
 & \downarrow & \\
 \mathcal{A}^2(A, n)^{\text{ndc}} & \longrightarrow & \mathcal{A}^2(A, n).
 \end{array}$$

Le produit fibré homotopique de ce diagramme est équipé d'un morphisme naturel vers $\mathbf{Symp}(A, n)$.

2. PASSAGE AUX CHAMPS DÉRIVÉS

Pour un champ dérivé quelconque $F \in \mathfrak{dSt}_k$, les formes et les formes fermées se comprennent à travers le résultat suivant :

Théorème 2.1. [PTVV13, Proposition 1.11] *Soient $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\mathcal{A}^p(-, n)$ et $\mathcal{A}^{p, \text{cl}}(-, n)$ sont des champs dérivés $\in \mathfrak{dSt}_k$ (pour la topologie étale).*

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}^p(F, n) &\cong \text{holim}_{X \rightarrow F \in \mathfrak{dAff}_k/F} \mathcal{A}^p(X, n) \\
 \mathcal{A}^{p, \text{cl}}(F, n) &\cong \text{holim}_{X \rightarrow F \in \mathfrak{dAff}_k/F} \mathcal{A}^{p, \text{cl}}(X, n).
 \end{aligned}$$

Démonstration. $\square$

$\square$

De plus on dispose de l'application *forme sous-jacente* :

$$\mathcal{A}^{p, \text{cl}}(F, n) \rightarrow \mathcal{A}^p(F, n).$$

et de la différentielle de de Rham

$$\mathcal{A}^p(F, n) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1}(F, n).$$

Pour la condition de non-dégénérescence des 2-formes, il faut que le complexe cotangent $\mathbb{L}_F \in \mathbf{QCoh}(F)$ existe et qu'il soit fortement dualisable.

Donc on impose l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.2. Soit F un champ dérivé t -géométrique (pour un $t \in \mathbb{Z}$)¹ et *localement de présentation finie*.

Proposition 2.3. ([TV08, PTVV13]... ?) Soit F un champ dérivé qui vérifie l'hypothèse 2.2. Alors $\mathbb{L}_F \in \mathbf{QCoh}(F)$ est fortement dualisable.

Démonstration. $\square$

$\square$

Pour la condition de non-dégénérescence, on fait appel à :

Théorème 2.4. [PTVV13, Proposition 1.14] Soit F un champ dérivé qui vérifie l'hypothèse 2.2. Alors, le morphisme naturel :

$$\mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{QCoh}(F)}(\mathcal{O}_F, \mathbb{S}^p(\mathbb{L}_F[-1])[p+n]) \rightarrow \mathcal{A}^p(F, n)$$

est une équivalence.

Démonstration. $\square$

$\square$

Dans la situation du Théorème 2.4, un point $\omega \in \mathcal{A}^2(F, n)_0$ correspond à un morphisme

$$\mathcal{O}_F \rightarrow \mathbb{S}^2(\mathbb{L}_F[-1])[2+n]$$

de $\mathbf{QCoh}(F)$.

Définition 2.5. La 2-forme $\omega \in \mathcal{A}^2(F, n)_0$ est non-dégénérée si le morphisme adjoint

$$D\mathbb{L}_F \rightarrow \mathbb{L}_F[n]$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{QCoh}(F)$.

L'espace des 2-formes non-dégénérées $\mathcal{A}^2(F, n)^{\mathrm{nd}} \subset \mathcal{A}^2(F, n)$ est le sous-espace plein dont les points correspondent à des 2-formes non-dégénérées.

Définition 2.6. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et F un champ dérivé qui vérifie l'hypothèse 2.2. L'espace des structures symplectiques n -décalées sur F est $\mathbf{Symp}(F, n)$, le produit fibré homotopique :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Symp}(F, n) & \longrightarrow & \mathcal{A}^{2, \mathrm{cl}}(F, n) \\ \downarrow & \lrcorner_h & \downarrow \\ \mathcal{A}^2(F, n)^{\mathrm{nd}} & \hookrightarrow & \mathcal{A}^2(F, n). \end{array}$$

Remarque 2.7.  Pour traiter explicitement les formes fermées (notamment dans quelques-uns des exemples), il semble qu'on ait besoin de l'analogue du Théorème 2.4, défini à l'aide des complexes mixtes de $\mathbf{QCoh}(F)$, $\epsilon\text{-}\mathbf{QCoh}(F)^{gr}$. On construit l'objet de de Rham

$$\mathbf{DR}^{\mathrm{int}}(F) \in \epsilon\text{-}\mathbf{QCoh}(F)^{gr}$$

et un morphisme naturel

$$\mathbb{R}\mathrm{Map}_{\epsilon\text{-}\mathbf{QCoh}(F)^{gr}}(Q\mathcal{O}_F(p), \mathbf{DR}^{\mathrm{int}}(F)[p+n]) \rightarrow \mathcal{A}^{p, \mathrm{cl}}(F, n),$$

compatible avec le morphisme du Théorème 2.4.

Sous l'hypothèse 2.2, ce morphisme devrait être un isomorphisme².

1. on dit que F est un champ dérivé d'Artin

2.  Je n'ai pas vérifié cette affirmation !

3. LE CHAMP COTANGENT DÉCALÉ

Soit $F \in \mathfrak{d}\mathfrak{S}t_k$ un champ dérivé d'Artin, localement de présentation finie (autrement dit qui satisfait l'hypothèse 2.2). Donc $\mathbb{L}_F \in \mathbf{QCoh}(F)$ existe et est fortement dualisable ; on écrira son dual $D\mathbb{L}_F$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, le champ cotangent décalé

$$T^*F[n] \rightarrow F$$

est un objet de $\mathfrak{d}\mathfrak{S}t_k/F$ (qui généralise le champ cotangent classique).

Remarque 3.1. Pour $F := \underline{\mathrm{Spec}}(A)$ un schéma affine dérivé ($A \in \mathfrak{cdga}_k^+$ cofibrante), on a envie de définir

$$T^*F[n] := \underline{\mathrm{Spec}}(\mathbb{S}_A(D\mathbb{L}_A[-n])).$$

⚠ En général $\mathbb{S}_A(D\mathbb{L}_A[-n]) \notin \mathfrak{cdga}_k^+$ (même si $n \leq 0$!), donc on ne peut pas considérer ceci comme schéma affine dérivé en général.

On doit comprendre $T^*F[n] \in \mathfrak{d}\mathfrak{S}t_k/F$ à travers son foncteur des points. Pour $U \in \mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k/F$:

$$\mathrm{Map}_{\mathfrak{d}\mathfrak{S}t_k/F}(U, T^*F[n]) \cong \mathrm{Map}_{\mathcal{O}_F}(D\mathbb{L}_F[-n], \mathcal{O}_U).$$

Proposition 3.2. [PTVV13, Proposition 1.21] *Soient F un champ dérivé de Deligne-Mumford³, localement de présentation finie et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $T^*F[n]$ admet une structure symplectique n -décalée, dont la classe de*

$$\pi_0(\mathbf{Symp}(F, n))$$

est canonique.

Remarque 3.3. Les auteurs de [PTVV13] affirment que ce résultat est probablement vrai pour tout F satisfaisant l'hypothèse 2.2.

La structure symplectique décalée provient d'une 1-forme de Liouville décalée :

$$\lambda(F; n) \in \mathcal{A}^1(F, n)$$

via la différentielle de de Rham. Cette forme est construite pour tout F qui satisfait 2.2.

Pour indiquer la construction de $\lambda(F; n)$, considérons un A -module cofibrant $M \in \mathfrak{Mod}_A^+$ et le morphisme de $\mathfrak{cdga}_k^+$:

$$A \hookrightarrow B := \mathbb{S}_A(M).$$

L'inclusion $M \rightarrow \mathbb{S}_A(M) = B$ de $\mathfrak{Mod}_A$ induit $M \otimes_A \mathbb{L}_A \rightarrow B \otimes_A \mathbb{L}_A$.

Ainsi, tout morphisme de $\mathfrak{Mod}_A$:

$$\varphi : A \rightarrow M \otimes_A \mathbb{L}_A[n],$$

en composant avec le morphisme canonique $B \otimes_A \mathbb{L}_A \rightarrow \mathbb{L}_B$ de $\mathfrak{Mod}_B$, induit un morphisme de $\mathfrak{Mod}_B$:

$$\tilde{\varphi} : B \rightarrow \mathbb{L}_B[n],$$

donc un point $\tilde{\varphi} \in \mathcal{A}^1(B, n)$.

Exemple 3.4. Supposons $\mathbb{L}_A$ fortement dualisable. Si $M := D(\mathbb{L}_A[n]) \cong D\mathbb{L}_A[-n]$ appartient à $\mathfrak{Mod}_A^+$, le morphisme de dualité canonique

$$A \rightarrow D\mathbb{L}_A \otimes_A \mathbb{L}_A$$

fournit $A \rightarrow M \otimes_A \mathbb{L}_A[n]$ et ainsi une classe

$$\lambda(A; n) \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}_A(D\mathbb{L}_A[-n]), n).$$

3. qui admet une présentation étale

En appliquant la différentielle de de Rham, on obtient

$$d_{DR}(\lambda(A; n)) \in \mathcal{A}^{2, \text{cl}}(\mathbb{S}_A(D\mathbb{L}_A[-n]), n).$$



Exercice 3.5. (Cf. la démonstration de [PTVV13, Proposition 1.21].) Montrer (dans la situation de l'exemple 3.4) que la forme sous-jacente de $d_{DR}(\lambda(A; n))$ dans $\mathcal{A}^2(\mathbb{S}_A(D\mathbb{L}_A[-n]), n)$ est non-dégénérée.

Remarque 3.6. La démonstration de la Proposition 3.2 est essentiellement une globalisation de celle dans le cas affine (en faisant bien attention à la définition des objets!).

Exemple 3.7. En prenant par exemple $F = \mathbb{A}^1$, considéré comme champ dérivé, on obtient $\forall n \in \mathbb{Z}$ un exemple d'une structure symplectique n -décalée.



Exercice : expliciter cette structure pour $n > 0$.

4. STRUCTURES SYMPLECTIQUES DÉCALÉES SUR BG

Soit G un groupe algébrique affine, lisse ; on dénote par BG le champ quotient $[*/G]$. Rappelons que $\mathbf{QCoh}(BG)$ est équivalente à la catégorie des G -modules et que le complexe cotangent de BG s'identifie à $\mathfrak{g}^*[-1]$, muni de l'action co-adjointe (où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G).

Remarque 4.1. La structure de groupe de G munit $\mathcal{O}_G$ d'une structure d'algèbre de Hopf. Les différentielles de Kähler Ω_G possèdent des structures canoniques de $\mathcal{O}_G$ -comodule à droite et à gauche et ces structures sont compatibles avec la structure de $\mathcal{O}_G$ -module. Cela nous permet de descendre de G à $\text{Spec}(\mathbb{k})$.

En particulier :

$$\Omega_G \cong \mathcal{O}_G \otimes \mathfrak{g}^*$$

en tant que $\mathcal{O}_G$ -comodule à gauche (avec la structure étendue) et l'action co-adjointe induit la structure de $\mathcal{O}_G$ -comodule à droite.

Lemme 4.2. Le complexe mixte $\mathbf{DR}^{\text{int}}(BG) \in \epsilon - \mathbf{QCoh}(BG)^{gr}$ s'identifie (avec nos conventions⁴) à

$$\mathbb{S}^*(\mathfrak{g}^*[-2])$$

muni de la G -action induite par l'action co-adjointe. La différentielle interne, d , et la différentielle de la structure mixte ϵ sont triviales.

En particulier :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^p(BG, n) &\cong \mathbb{R}\text{Map}_G(\mathbb{k}, \mathbb{S}^p(\mathfrak{g}^*)[-p+n]) \\ \mathcal{A}^{p, \text{cl}}(BG, n) &\cong \prod_{t \geq 0} \mathbb{R}\text{Map}_G(\mathbb{k}, \mathbb{S}^{p+t}(\mathfrak{g}^*)[-p+n]), \end{aligned}$$

où $\mathbb{R}\text{Map}_G$ est le foncteur dérivé dans la catégorie des G -modules.

En particulier, on a l'équivalence

$$\mathcal{A}^{p, \text{cl}}(BG, n) \simeq \mathcal{A}^p(BG, n) \times \mathcal{A}^{p+1, \text{cl}}(BG, n-1).$$



Démonstration. Exercice! □

Remarque 4.3. Le foncteur $\mathbb{R}\text{Map}_G(\mathbb{k}, -)$ sur la catégorie des G -modules correspond au foncteur dérivé des sections globales. Ici, le foncteur sections globales s'identifie comme

$$M \mapsto M^G.$$

Si G est réductif, ce foncteur est exact, donc on peut remplacer $\mathbb{R}\text{Map}$ par Map dans le Lemme 4.2.

4. le choix de décalage utilisé dans la définition d'un complexe mixte

Proposition 4.4. Soit G un groupe algébrique affine, lisse, réductif. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^p(BG, n) &\cong |\mathbb{S}^p(\mathfrak{g}^*)^G[-p+n]| \\ \mathcal{A}^{p, \text{cl}}(BG, n) &\cong \prod_{t \geq 0} |\mathbb{S}^{p+t}(\mathfrak{g}^*)[-p+n]|,\end{aligned}$$

en particulier $\mathcal{A}^p(BG, n)$ est $*$ si $p > n$ et, pour $n \geq p$, il est l'espace d'Eilenberg-MacLane

$$K(\mathbb{S}^p(\mathfrak{g}^*)^G, n-p).$$

L'espace $\mathcal{A}^2(BG, n)^{\text{nd}}$ est vide si $n \neq 2$ et

$$\pi_0(\mathbf{Symp}(BG, n)) \cong \begin{cases} \emptyset & n \neq 2 \\ \{\mathbb{S}^2(\mathfrak{g}^*)^G\}^{\text{nd}} & n = 2, \end{cases}$$

où $\{\mathbb{S}^2(\mathfrak{g}^*)^G\}^{\text{nd}}$ est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques G -invariantes et non-dégénérées sur $\mathfrak{g}$.



Démonstration. Exercice. □

Remarque 4.5. [PTVV13, page 300] Si de plus $G_{\mathbb{k}}$ est simple⁵, $\mathbb{S}^2(\mathfrak{g}^*)^G \cong \mathbb{k}$ et donc la forme non-dégénérée est unique à multiplication par un scalaire de $\mathbb{k}^\times$ près.

Exemple 4.6. Soit $G := GL_s$ (donc réductif) ; l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est $M_s(\mathbb{k})$ et la trace

$$(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$$

est une forme bilinéaire symétrique G -invariante qui fournit la structure symplectique 2-décalée sur BGL_s .

Si $H \hookrightarrow GL_s$ est un sous-groupe fermé et H est réductif, cette structure fournit une structure symplectique 2-décalée sur BH .

5. STRUCTURES SYMPLECTIQUES DÉCALÉES SUR $[X/G]$

Soit G un groupe algébrique affine, lisse (comme dans la section précédente) et $X \in \text{Aff}_{\mathbb{k}}$ un schéma affine lisse sur lequel G agit

$$G \times X \rightarrow X.$$

Remarque 5.1. On pourrait également considérer le cas $X \in \mathfrak{Aff}_{\mathbb{k}}$.

On note par $[X/G] \in \mathfrak{Aff}_{\mathbb{k}}$ le champ dérivé quotient, qui est muni de la présentation lisse

$$X \rightarrow [X/G]$$

pour laquelle

$$X \times_{[X/G]}^h X \cong G \times X.$$

Remarque 5.2. L'anneau des fonctions $\mathcal{O}_G$ est une algèbre de Hopf et l'action de G sur X correspond à un morphisme d'algèbres

$$\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_X$$

qui munit $\mathcal{O}_X$ de la structure d'un $\mathcal{O}_G$ -comodule.

Le couple $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_X)$ a la structure d'un schéma en groupoïdes affine⁶ (qui, de plus, est scindé).

5. ici $\mathbb{k}$ est un corps, tandis que dans [PTVV13] $\mathbb{k}$ est un anneau plus général

6. également connu aux topologues algébristes sous le nom d'*algébroïde de Hopf*

Définition 5.3. La catégorie des $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_X)$ -comodules a pour objets les couples (M, ψ_M) où M est un $\mathcal{O}_X$ -module et ψ_M est une structure de $\mathcal{O}_G$ -comodule $\psi_M : M \rightarrow \mathcal{O}_G \otimes M$ qui est un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules, où le $\mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{O}_G \otimes M$ est muni de la structure de $\mathcal{O}_X$ -module par restriction le long de $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_X$.

Un morphisme $(M, \psi_M) \rightarrow (N, \psi_N)$ est un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules qui est également un morphisme de $\mathcal{O}_G$ -comodules.

Proposition 5.4. La catégorie $\mathbf{QCoh}([X/G])$ est équivalente à la catégorie des $\mathcal{O}_X$ -modules G -équivariants ; cette catégorie s'identifie comme la catégorie des $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_X)$ -comodules.

Démonstration. (Indications.) Généralisation de l'identification de $\mathbf{QCoh}(BG)$, qui correspond au cas $X = \text{Spec } k$. (Cf. [Cal14, Exemple 1.16].) $\square$

Exemple 5.5. Le faisceau structurel $\mathcal{O}_X$ muni de sa structure de $\mathcal{O}_G$ -comodule canonique appartient à $\mathbf{QCoh}([X/G])$ (on oublie la structure d'algèbre). Il faut le considérer comme $\mathcal{O}_{[X/G]}$.

Le foncteur $\text{Hom}_{\mathbf{QCoh}([X/G])}(\mathcal{O}_{[X/G]}, -)$ correspond au foncteur *sections globales*, qui s'identifie au foncteur G -points fixes $M \mapsto M^G$, où

$$M^G := \text{egal} \{ M \xrightarrow[\psi_M]{\eta_G \otimes 1_M} \mathcal{O}_G \otimes M \}.$$

(Exercice : démontrer cette affirmation!)

Par exemple, $(\mathcal{O}_X)^G$ est l'anneau de fonctions du schéma affine $X//G$, qui figure dans le diagramme commutatif de champs :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [X/G] \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X//G. \end{array}$$

On peut considérer le foncteur $(-)^G$ comme prenant valeurs dans $\mathbf{QCoh}(X//G) \cong \mathcal{M}od_{(\mathcal{O}_X)^G}$ où, en oubliant la structure de module, dans k -espaces vectoriels.

Remarque 5.6. ∇ En général, le foncteur $(-)^G$ n'est pas exact ; il l'est si G est réductif.

5.1. Le complexe cotangent de $[X/G]$. L'action de G sur X correspond à un morphisme $G \rightarrow \text{Aut}(X)$; ceci est G -équivariant lorsqu'on munit $\text{Aut}(X)$ de l'action de G par conjugaison.

Sa version infinitésimale est le morphisme d'algèbres de Lie :

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{Der}(\mathcal{O}_X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$$

qui est G -équivariant dans le ses approprié.

Remarque 5.7. Voir [DG70, Section II.4] par exemple ; il faut faire attention aux conventions utilisées dans les définitions, car [DG70] parle d'anti-morphismes d'algèbres de Lie, en raison d'un signe qui apparaît. Ceci peut s'expliquer à travers l'isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^{\text{op}}$.

Par adjonction, on obtient le morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules

$$(2) \quad \Omega_X \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}_X.$$

De plus, la dérivation universelle $\mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X$ induit une structure de $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_X)$ -comodule sur Ω_X et (2) est un morphisme de $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_X)$ -comodules, où

$\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}_X$ est muni de la structure de $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_X)$ -comodule induite par l'action coadjointe de $\mathfrak{g}^*$.

Proposition 5.8. *Le complexe cotangent de $[X/G]$ dans $\mathbf{QCoh}([X/G])$ est le complexe de $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_X)$ -comodules :*

$$\Omega_X \longrightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}_X$$

$$0 \qquad \qquad -1.$$

La dérivation universelle (dans $\mathbf{QCoh}([X/G])$)

$$\mathcal{O}_{[X/G]} \rightarrow \mathbb{L}_{[X/G]}$$

est la dérivation universelle $\mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X$ en degré 0, qui est un morphisme de $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_X)$ -comodules.

Démonstration. (Indications. Cf. également les indications données dans [Cal14].) Il y a deux approches (reliées); on peut considérer le préchamp simplicial

$$\cdots \cdots \cdots G \times G \times X \rightrightarrows G \times X \rightrightarrows X$$

utilisé dans la construction de $[X/G]$ et son complexe cotangent.

Ici on utilise la méthode générale pour les champs géométriques (comme on l'a fait pour BG). Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & G \times X \simeq X \times_F^h X & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow \lrcorner_h & & \downarrow \\ & & X & \longrightarrow & F := [X/G] \end{array}$$

où U est un schéma affine.

Dans $\mathbf{QCoh}(U) \cong \mathfrak{Mod}_{\mathcal{O}_U}$, on a la suite cofibre

$$\mathbb{L}_{[X/G]}(U) \rightarrow \mathbb{L}_{X \times X}(U) \rightarrow \mathbb{L}_{G \times X}(U) \rightarrow .$$

On peut, par exemple prendre $U = G \times X$ et

$$\begin{aligned} \Omega_{G \times X} &\cong \mathcal{O}_G \otimes \Omega_X \oplus \Omega_G \otimes \mathcal{O}_X \\ &\cong \mathcal{O}_G \otimes (\Omega_X \oplus \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

C'est ce terme qui contribue $\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}_X$ (après descente de $G \times X$ à X).

L'identification de la dérivation universelle $\mathcal{O}_{[X/G]} \rightarrow \mathbb{L}_{[X/G]}$ se fait par des méthodes similaires. $\square$

Remarque 5.9. La projection $X \rightarrow \mathrm{Spec} k$ induit $[X/G] \rightarrow BG$ et donc

$$\mathcal{O}_X \otimes \mathbb{L}_{BG} \rightarrow \mathbb{L}_{[X/G]}.$$

De même le morphisme $X \rightarrow [X/G]$ induit

$$\mathbb{L}_{[X/G]} \rightarrow \mathbb{L}_X$$

(où on oublie la G -action sur $\mathbb{L}_{[X/G]}$).

Corollaire 5.10. *L'algèbre de de Rham $\mathbf{DR}^{int}([X/G]) \in \epsilon - \mathbf{QCoh}([X/G])^{gr}$ est*

$$\mathbf{DR}^{int}([X/G]) \cong \mathbb{S}_{\mathcal{O}_{[X/G]}}^*(\mathbb{L}_{[X/G]}[-1]),$$

où l'algèbre symétrique est formée dans les complexes de $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_X)$ -modules, munie de la structure mixte induite par la dérivation universelle

$$\mathcal{O}_{[X/G]} \rightarrow \mathbb{L}_{[X/G]}.$$

La $\mathcal{O}_X$ -algèbre sous-jacente est isomorphe à

$$\mathbb{S}_{\mathcal{O}_X}^*(\Omega_X[-1]) \otimes \mathbb{S}_{\mathbf{k}}^*(\mathfrak{g}^*[-2])$$

munie de la différentielle interne induite par $\Omega_X \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}_X$ et de la structure mixte induite par $\mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X$.

Remarque 5.11. On a l'inclusion

$$\mathbf{DR}^{int}(BG) \cong \mathbb{S}_{\mathbf{k}}^*(\mathfrak{g}^*[-2]) \hookrightarrow \mathbf{DR}^{int}([X/G])$$

et on peut considérer $\mathbf{DR}^{int}([X/G])$ comme produit tensoriel tordu de $\mathbf{DR}^{int}(BG)$ et du complexe de de Rham Ω_X^* de X (avec son interprétation comme complexe mixte).

5.2. Structures symplectiques décalées sur $[X/G]$. La forme du complexe cotangent $\mathbb{L}_{[X/G]}$:

$$\Omega_X \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{g}^*$$

impose de fortes restrictions sur X et la forme d'action de G sur X pour qu'il puisse y avoir une structure symplectique décalée. Par exemple, on peut considérer les conditions pour que ce complexe soit auto-dual.

Exemple 5.12. [Cal14, Exemple 2.10] Soit G un groupe réductif. Le champs cotangent décalé $T^*[1](BG)$ s'identifie au champ quotient $[\mathfrak{g}^*/G]$, où on considère $\mathfrak{g}^*$ comme espace affine, muni de l'action co-adjointe. Alors $[\mathfrak{g}^*/G]$ est muni d'une structure 1-symplectique.

Dans ce cas, $\Omega_{\mathfrak{g}^*} \cong \mathcal{O}_{\mathfrak{g}^*} \otimes \mathfrak{g}$ et le complexe cotangent a la forme :

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{g}^*} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{g}^*} \otimes \mathfrak{g}^*,$$

qui a l'apparence d'être auto-dual (à décalage près) (voir [Cal14, Exemple 2.10] pour quelques détails).

Proposition 5.13. Soient G un groupe réductif et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\mathcal{A}^2([X/G], n) \cong |\mathbb{S}_{\mathcal{O}_{[X/G]}}^2((\Omega_X \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{O}_X)[-1])^G[n+2]|.$$

En particulier $\mathcal{A}^2([X/G], n) = *$ si $n \leq 0$. De plus

$$\mathcal{A}^2([X/G], n)^{\text{nd}} = \emptyset$$

si $n > 2$.



Démonstration. Exercice. □

Remarque 5.14. On peut également donner une description de $\mathcal{A}^{2, \text{cl}}([X/G], n)$ (cf. Remarque 2.7 et [Cal14, Exemple 2.7]).

Pour l'étude de $\mathbf{Symp}([X/G], n)$, il paraît plus important dans un premier temps de fournir des exemples où $\mathcal{A}^2([X/G], n)^{\text{nd}}$ est non-vide.

RÉFÉRENCES

- [Cal14] Damien Calaque, *Three lectures on derived symplectic geometry and topological field theories*, Indag. Math. (N.S.) **25** (2014), no. 5, 926–947. MR 3264781
- [DG70] Michel Demazure and Pierre Gabriel, *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris ; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970, Avec un appendice it Corps de classes local par Michiel Hazewinkel. MR 0302656
- [PTVV13] Tony Pantev, Bertrand Toën, Michel Vaquié, and Gabriele Vezzosi, *Shifted symplectic structures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 271–328. MR 3090262
- [TV08] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry. II. Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224. MR 2394633 (2009h :14004)