

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE DÉRIVÉE II ET III

GEOFFREY POWELL

TABLE DES MATIÈRES

1. Rappels	1
2. Le plongement de Yoneda	2
2.1. Yoneda et préchamps dérivés	3
2.2. Le Hom interne	4
3. La topologie étale sur $\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}$	4
3.1. La version dérivée	5
4. Les (pré)faisceaux d'homotopie locaux	6
4.1. Recouvrements dans les préchamps	7
5. Le ∞ -topos des champs dérivés	7
6. Propriétés des champs dérivés	8
6.1. Sections généralisés	9
7. Premiers exemples	9
8. Morphismes lisses de $\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}$	10
9. Champs dérivés géométriques	11
9.1. Champs dérivés quotients - à la Segal	13
10. Champs algébriques supérieurs géométriques	14
Références	14

On fixe $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0.

1. RAPPELS

La catégorie $\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}}$ des préfaisceaux simpliciaux sur $\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}} \cong (\text{cdga}_{\mathbb{k}}^+)^{\text{op}}$ est munie de la structure de modèle *projective*. La catégorie des *préchamps dérivés* $\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_{\mathbb{k}}$ est cette catégorie, munie de la structure de modèle *localisé*. Les objets *fibrants* de cette structure jouent un rôle important.

Définition 1.1. Un *préchamp dérivé* est un objet fibrant de $\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_{\mathbb{k}}$.

Lemme 1.2. Un préfaisceau simplicial $F \in \Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}}$ est un *préchamp dérivé* si et seulement si :

- (1) $\forall X \in \mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}, F(X)$ est un complexe de Kan dans $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{C}\mathfrak{n}\mathfrak{s}$;
- (2) $\forall X \xrightarrow{\sim} Y$ équivalence faible de $\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}, F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X)$ est une équivalence faible de $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{C}\mathfrak{n}\mathfrak{s}$.



Démonstration. Exercice - en utilisant la construction d'une localisation de Bousfield à gauche. □

Remarque 1.3. Si le préfaisceau simplicial $F \in \Delta^{\text{op}} \widehat{\mathfrak{A}ff}_k$ satisfait les conditions du Lemme 1.2 lorsque X, Y sont des objets fibrants, alors le préfaisceau dérivé

$$\mathbb{R}F := F \circ Q^{\text{op}}$$

est un préchamp dérivé.

Remarque 1.4.  La structure de modèle $\mathfrak{P}\mathfrak{S}t_k$ est ni *fibrant* ni *cofibrant*. Les objets cofibrants sont construits à partir des préfaisceaux représentables.

2. LE PLONGEMENT DE YONEDA

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie petite et $\widehat{\mathcal{C}}$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles $\mathfrak{E}ns^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$. Le plongement de Yoneda fournit un plongement pleinement fidèle :

$$h : \mathcal{C} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$$

qui envoie un objet X au préfaisceau $h_X := \mathcal{C}(-, X)$. Le lemme de Yoneda fournit la bijection

$$\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \cong F(X).$$

Lemme 2.1. Si $\mathcal{C}$ possède les limites finies, $h : \mathcal{C} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ les préserve. En particulier, pour $X, Y \in \mathcal{C}$,

$$h_X \amalg h_Y \cong h_{X \amalg Y}.$$

Démonstration. Exercice. □

Pour généraliser au cadre simplicial, rappelons que le foncteur *structure simpliciale constante* $\text{cst} : \mathfrak{E}ns \rightarrow \Delta^{\text{op}} \mathfrak{E}ns$ admet les adjoints suivants :

- (1) l'adjoint à droite, le foncteur $\Delta^{\text{op}} \mathfrak{E}ns \rightarrow \mathfrak{E}ns, X_{\bullet} \mapsto X_0$;
- (2) l'adjoint à gauche, le foncteur $\Delta^{\text{op}} \mathfrak{E}ns \rightarrow \mathfrak{E}ns, X \mapsto \pi_0(X)$, où $\pi_0(X)$ est le coégalisateur du diagramme dans $\mathfrak{E}ns$

$$X_1 \rightrightarrows X_0.$$

Exercice 2.2. Démontrer cette affirmation.

En particulier, le foncteur cst induit un foncteur $\text{cst} : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \Delta^{\text{op}} \widehat{\mathcal{C}}$ qui possède les adjoints :

$$\pi_0 \dashv \text{cst} \dashv (-)_0.$$

Par composition, on obtient le plongement de Yoneda (encore dénoté h).

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{h} & \widehat{\mathcal{C}} \\ & \searrow h & \downarrow \text{cst} \\ & & \Delta^{\text{op}} \widehat{\mathcal{C}}. \end{array}$$

Lemme 2.3. Le foncteur $\text{cst} : \mathfrak{E}ns \rightarrow \Delta^{\text{op}} \mathfrak{E}ns$ préserve les limites finies. Ainsi, si $\mathcal{C}$ possède les limites finies,

$$h : \mathcal{C} \rightarrow \Delta^{\text{op}} \widehat{\mathcal{C}}$$

préserve les limites finies.

Démonstration. Exercice. □

Lemme 2.4. Soient $X \in \mathcal{C}$ et $F \in \Delta^{\text{op}} \widehat{\mathcal{C}}$, alors il existe un isomorphisme naturel :

$$\text{Hom}_{\Delta^{\text{op}} \widehat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \cong F(X)_0.$$

Démonstration. Exercice ! □

La catégorie $\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathcal{C}}$ est munie d'une structure simpliciale (héritée de $\Delta^{\text{op}}\mathcal{C}\mathbf{ns}$). En particulier, pour $F, G \in \Delta^{\text{op}}\widehat{\mathcal{C}}$, $\text{Map}_{\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathcal{C}}}(F, G)$ est un ensemble simplicial, dont

$$\text{Map}_{\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathcal{C}}}(F, G)_n = \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathcal{C}}}(F \times \Delta^n, G),$$

où $(F \times \Delta^n)(U) = F(U) \times \Delta^n$ (produit de $\Delta^{\text{op}}\mathcal{C}\mathbf{ns}$ à droite).

Le lemme de Yoneda donne alors :

$$\text{Map}_{\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \cong F(X)$$

en tant qu'ensemble simplicial.

2.1. Yoneda et préchamps dérivés. En particulier, c'est ce foncteur h qui définit le plongement de Yoneda :

$$h : \mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k.$$

Proposition 2.5. *Le plongement de Yoneda $h : \mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$ prend ses valeurs dans la sous-catégorie des objets cofibrants. (Autrement dit : $h(\text{Spec}(A))$ est cofibrant, $\forall A \in \mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{g}\mathfrak{a}_k^+$.)*

Démonstration. Un Corollaire immédiat du Lemme 2.4. □

Remarque 2.6.  Même lorsque $\text{Spec}(A)$ est fibrant, $h_{\text{Spec}(A)}$ n'est pas (en général) un *préchamp dérivé* : en général, une équivalence faible $X \xrightarrow{\sim} Y$ de $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$ n'induit par un isomorphisme

$$h_{\text{Spec}(A)}(Y) \rightarrow h_{\text{Spec}(A)}(X),$$

entre les ensembles simpliciaux *discrets*, donc pas une équivalence faible de la structure de modèle projective sur $\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k}$.

Toën et Vezzosi fournissent (voir la Remarque 2.8 pour la définition) une modification explicite de h , à savoir un foncteur :

$$\underline{h} : \mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$$

muni d'une transformation naturelle $h \rightarrow \underline{h}$. Le foncteur dérivé $\underline{h} \circ Q^{\text{op}}$ sera dénoté $\mathbb{R}\underline{h}$.

Proposition 2.7. [TV05, Lemmas 4.2.1, 4.2.2] *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (1) *Si $\text{Spec}(A)$ est fibrant, alors $\underline{h}_{\text{Spec}(A)}$ est fibrant dans $\mathfrak{d}\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$, donc un préchamp dérivé.*
- (2) *Le morphisme composé $h \rightarrow \mathbb{R}\underline{h}$ est un isomorphisme dans $\text{Ho}(\mathfrak{d}\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k)$.*

Remarque 2.8. La théorie générale des catégories de modèle fournit un foncteur *résolution cofibrante*

$$\Gamma : \mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k^{\Delta}$$

où la catégorie des objets cosimpliciaux $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k^{\Delta}$ est munie de la structure de modèle de Reedy.

Le foncteur $\underline{h}$ est alors défini par :

$$\underline{h}_{\text{Spec}(A)}(X) := \text{Hom}_{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k}(\Gamma(X), \text{Spec}(A)) \in \Delta^{\text{op}}\mathcal{C}\mathbf{ns}.$$

(On note que la catégorie $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k^{\Delta}$ est l'opposée de la catégorie $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{g}\mathfrak{a}_k^+$ des algèbres différentielles graduées simpliciales.)

2.2. Le Hom interne. Le produit dans la catégorie des préfaisceaux simpliciaux $\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k$ est induit par le produit de $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{E}\mathfrak{n}\mathfrak{s}$, donc

$$((F \times G)(X))_n = F(X)_n \times G(X)_n,$$

muni de la structure simpliciale diagonale. La catégorie $\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k$ admet un *hom interne*

$$\underline{\text{Hom}}_{\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k}(-, -) : (\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k)^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k \rightarrow \Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k$$

de sorte qu'on ait un isomorphisme naturel :

$$\text{Map}_{\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k}(F, \underline{\text{Hom}}_{\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k}(G, H)) \cong \text{Map}_{\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k}(F \times G, H).$$

En particulier, en prenant $F := h(X)$, $X \in \mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$, on ait

$$\underline{\text{Hom}}_{\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k}(G, H)(X) = \text{Map}_{\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k}(h(X) \times G, H).$$

Exemple 2.9. Soit $Y \in \mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$ et $H \in \Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k$, alors $\underline{\text{Hom}}_{\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k}(h(Y), H)$ est le préfaisceau simplicial :

$$X \mapsto H(X \times Y).$$

Proposition 2.10. Soient G un objet cofibrant de $\mathfrak{d}\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$ et H un préchamp dérivé (un objet fibrant), alors

$$\underline{\text{Hom}}_{\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}}_k}(G, H)$$

est un préchamp dérivé.

3. LA TOPOLOGIE ÉTALE SUR $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$

Les morphismes étales sont l'analogue algébrique des *difféomorphismes locaux*. (Une référence classique pour les morphismes étale, le site de Grothendieck associé et la cohomologie étale est [Mil80]).

Définition 3.1. Un morphisme de schémas $f : X \rightarrow Y$ est étale s'il est *plat* et *non-ramifié*.

Remarque 3.2.

- (1) La définition d'un morphisme étale est *Zariski locale* par rapport à la *source* et le *but*, donc il suffit de considérer les morphismes entre schémas affines.
- (2) On dit qu'un morphisme $R \rightarrow S$ d'anneaux commutatifs est étale si et seulement si $\text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$ est étale.
- (3) Dans le cas affine, *plat* et *non-ramifié* correspondent aux notions habituelles d'algèbre commutative.

Exemple 3.3.

- (1) Une immersion ouverte est étale.
- (2) Une extension $K \hookrightarrow L$ de corps est étale si et seulement si elle est finie, séparable.
- (3) Soit R un anneau commutatif ; le morphisme

$$R \rightarrow S := R[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_n)$$

est étale si et seulement si $\det(\partial f_i / \partial x_j)$ est inversible dans S .

Proposition 3.4. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ entre schémas lisses est étale si et seulement si, pour chaque point de X , f induit un isomorphisme entre les espaces tangents correspondants.

Définition 3.5. Une famille de morphismes $\{\mathrm{Spec}(A_i) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)\}_{i \in \mathcal{I}}$ de Aff_k est un recouvrement étale si

- (1) chaque $A \rightarrow A_i$ est étale ;
- (2) il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que

$$\coprod_{j \in J} \mathrm{Spec}(A_j) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

est surjectif.

Remarque 3.6. Cette définition fournit une *topologie de Grothendieck* sur Aff_k , et donc le *gros site étale*.

3.1. La version dérivée. On généralise au cadre dérivé en suivant Toën et Vezzosi, notamment [TV08, Definition 2.2.2.12] et [TV08, Lemma 2.2.2.13].

Définition 3.7. Un morphisme $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ de $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$ est étale si

- (1) $H_0(A) \rightarrow H_0(B)$ est étale ;
- (2) $A \rightarrow B$ induit un isomorphisme :

$$H_0(B) \otimes_{H_0(A)} H_*(A) \xrightarrow{\cong} H_*(B).$$

Remarque 3.8. Ceci correspond au fait que le *schéma affine sous-jacent* de A est $H_0(A)$; les propriétés des morphismes sont définis en termes des morphismes induits sur les schémas sous-jacents.

De même on a la définition d'un recouvrement étale :

Définition 3.9. Une famille de morphismes $\{\mathrm{Spec}(A_i) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)\}_{i \in \mathcal{I}}$ de $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$ est un recouvrement étale si

- (1) chaque $\mathrm{Spec}(A_i) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est étale dans $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$;
- (2) la famille $\{\mathrm{Spec}(H_0(A_i)) \rightarrow \mathrm{Spec}(H_0(A))\}_{i \in \mathcal{I}}$ de Aff_k est un recouvrement étale.

Toën et Vezzosi ont introduit la notion d'une (pré)-topologie modèle (de Grothendieck) sur une catégorie de modèles $\mathcal{M}$ (voir [TV05, Definition 4.3.1] et [TV08, Definition 1.3.1.1]) ; ceci correspond à une topologie de Grothendieck sur $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$.

Remarque 3.10. Cf. la définition d'une topologie modèle (de Grothendieck) dans le contexte des quasi-catégories [Lur09, 6.2.2.1].

Proposition 3.11. [TV05, Example 4.3.6(2)], [TV08, Lemma 2.2.2.13] *Les recouvrements étale définissent une pré-topologie modèle (de Grothendieck) sur $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$.*

Remarque 3.12. Dans la pratique, étant donné une algèbre semi-libre A de $\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{g}\mathfrak{a}_k^+$, on se restreindra souvent au *petit site étale*

$$(\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k / \mathrm{Spec}(A))_{\mathrm{et}}$$

dont les objets sont les morphismes étales $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ (et on peut supposer B semi-libre).

Remarque 3.13. [TV05, Definition 4.5.1] Soit $A \in \mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{g}\mathfrak{a}_k^+$ une algèbre semi-libre, alors l'adjonction :

$$\mathrm{Oubli} : \mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k / \mathrm{Spec}(A) \rightleftarrows \mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k : - \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(A)$$

induit la (pré)-topologie modèle étale sur $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k / \mathrm{Spec}(A)$ et, en particulier une topologie de Grothendieck sur $\mathrm{Ho}(\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k / \mathrm{Spec}(A))$.

Remarque 3.14.  Soit $\mathrm{Spec}(A)$ un objet fibrant de $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$; en général les catégories $\mathrm{Ho}(\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k / \mathrm{Spec}(A))$ et $\mathrm{Ho}(\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k) / \mathrm{CAT}$ ne sont pas équivalentes. Pourtant, ceci ne pose pas de problème pour la considération de la pré-topologie modèle induite (cf. [Lur09, Remark 6.2.2.3]).

4. LES (PRÉ)FAISCEAUX D'HOMOTOPIE LOCAUX

Définition 4.1. Pour $F \in \Delta^{\text{op}} \widehat{\mathcal{A}ff_k} = \mathcal{P}\mathcal{S}t_k$ un préchamp dérivé (un objet fibrant), soient

- (1) $\pi_0(F) \in \text{Ho}(\widehat{\mathcal{A}ff_k})$ le préfaisceau :

$$\text{Spec}(A) \mapsto \pi_0 F(\text{Spec}(A))$$
où $\text{Spec}(A) \in \mathcal{A}ff_k$ est fibrant.
- (2) $\pi_0^{\text{et}}(F) \in \text{Ho}(\widehat{\mathcal{A}ff_k})$ le faisceau associé pour la topologie étale sur $\text{Ho}(\mathcal{A}ff_k)$.

Remarque 4.2.  Le foncteur $\pi_0 : \Delta^{\text{op}} \mathcal{E}ns \rightarrow \mathcal{E}ns$ envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes, donc passe à la catégorie des préfaisceaux simpliciaux $\Delta^{\text{op}} \widehat{\mathcal{A}ff_k}$ munie de la structure de modèle *projective*. Par contre, il n'y a aucune raison pour que ce foncteur préserve les équivalences faibles provenant de $\mathcal{A}ff_k$. L'hypothèse que F soit fibrant permet de contourner ce problème ; dans le cas général, il faut remplacer F par une résolution fibrante.

Pour définir les groupes d'homotopie supérieure, on a besoin d'un point de base. Ceci est fourni par une section de $\pi_0(F)$, donc la donnée d'une algèbre (qu'on peut supposer semi-libre) A de $\mathcal{C}dg\mathfrak{a}_k^+$ et d'une section $s \in F(\text{Spec}(A))_0$. Par le lemme de Yoneda 2.4, ceci correspond à un morphisme de préfaisceaux simpliciaux

$$h(\text{Spec}(A)) \xrightarrow{s} F.$$

Remarque 4.3.

- (1) Un morphisme $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ induit un point de base dans $F(\text{Spec}(B))_0$, donc (F, s) fournit un préfaisceau simplicial *pointé* sur $\mathcal{A}ff_k/\text{Spec}(A)$.
- (2) Un morphisme $\alpha : F \rightarrow G$ entre préchamps fibrants induit

$$(F, s) \mapsto (G, \alpha(s)).$$

Définition 4.4. Soient $F \in \Delta^{\text{op}} \widehat{\mathcal{A}ff_k} = \mathcal{P}\mathcal{S}t_k$ un objet fibrant, $s \in F(\text{Spec}(A))_0$ un point de base et $0 < n \in \mathbb{N}$.

Soient

- (1) $\pi_n(F, s)$ le préfaisceau de groupes sur le petit site étale $(\mathcal{A}ff_k/\text{Spec}(A))_{\text{et}}$ défini par $\text{Spec}(B) \mapsto \pi_n F(\text{Spec}(B))$, par rapport au point de base induit ;
- (2) $\pi_n^{\text{et}}(F, s)$ le faisceau étale associé sur $\text{Ho}(\mathcal{A}ff_k/\text{Spec}(A))_{\text{et}}$.

Remarque 4.5.  Ceci est une version *approximative* de la définition donnée par Toën et Vezzosi (voir [TV05, Definition 4.5.3]).

Définition 4.6. Un morphisme $\alpha : F \rightarrow G$ entre préchamps dérivés (objets fibrants) est une π_* -équivalence si

- (1) $\pi_0^{\text{et}}(F) \xrightarrow{\cong} \pi_0^{\text{et}}(G)$ est un isomorphisme de faisceaux (sur le gros site étale de $\mathcal{A}ff_k$) et,
- (2) quelque soient $A \in \mathcal{C}dg\mathfrak{a}_k^+$ (semi-libre), section $s \in \pi_0(F)(\text{Spec}(A))$ et $0 < n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_n^{\text{et}}(F, s) \xrightarrow{\cong} \pi_n^{\text{et}}(F, \alpha(s))$$

est un isomorphisme de faisceaux sur $\text{Ho}(\mathcal{A}ff_k/\text{Spec}(A))_{\text{et}}$.

Remarque 4.7. Si $A \mapsto F(\text{Spec}(A))$ (respectivement pour G) ne dépend que de $H_0(A)$, on se réduit à la considération de la topologie étale classique sur Aff_k . Ainsi on retombe sur la définition d'une équivalence pour la topologie étale entre préfaisceaux simpliciaux.

4.1. Recouvrements dans les préchamps. On peut d'ores et déjà donner la définition d'un recouvrement pour les (pré)champs :

Définition 4.8. (Cf. [TV08, Définition 1.3.1.2].) Un morphisme $F \rightarrow G$ entre préchamps dérivés est un *recouvrement* (pour la topologie étale) si

$$\pi_0^{\text{ét}}(F) \twoheadrightarrow \pi_0^{\text{ét}}(G)$$

est une surjection de faisceaux étales.

Remarque 4.9. Toën et Vezzosi ne considèrent cette définition que pour les champs dérivés (voir la Section suivante).

5. LE ∞ -TOPOS DES CHAMPS DÉRIVÉS

[TV05, Theorem 4.6.1] nous assure que la ∞ -catégorie suivante (au fait, un ∞ -topos) existe :

Définition 5.1. La ∞ -catégorie des champs dérivés, $\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$, est la localisation de Bousfield (à gauche) de la ∞ -catégorie des préchamps, $\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$, par rapport aux π_* -équivalences.

L'adjoint à droite de l'adjonction de localisation associée :

$$\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k \rightleftarrows \mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$$

est le foncteur *champs associé*.

Remarque 5.2. Par construction (composition de deux localisations de Bousfield à gauche), la catégorie $\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$ est une localisation de Bousfield à gauche de la structure de modèle projective sur la catégorie des préfaisceaux simpliciaux :

$$\Delta^{\text{op}} \widehat{\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k}.$$

Puisque la structure projective sur $\Delta^{\text{op}} \widehat{\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k}$ est simpliciale, cette localisation est déterminée par ses objets fibrants¹.

Il y a deux conditions pour qu'un préfaisceau simplicial soit fibrant :

- (1) il doit être un *préchamps dérivé* (fibrant dans $\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$);
- (2) satisfaire la condition de *hyper-descente* pour la topologie étale de $\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$ (cette condition est explicitée ci-dessous).

Définition 5.3. Un *champ dérivé* est un préfaisceau simplicial de $\Delta^{\text{op}} \widehat{\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k}$ qui est fibrant pour la structure de modèle de $\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$.

La définition de *hyper-descente* utilise notamment des résolutions simpliciales d'objets de $\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$. En considérant les objets simpliciaux, les idées de la construction de la *structure de Modèle de Reedy* (voir [Hov99] ou [GJ09] ou [Lur09, Section A.2.9]) interviennent :

Définition 5.4. Pour $X_\bullet \in \Delta^{\text{op}} \mathcal{C}$ un objet simplicial d'une catégorie complète $\mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $M_n X_\bullet$ l'objet de $\mathcal{C}$:

$$M_n X_\bullet = \lim_{[k] \rightarrow [n], k < n} X_k$$

muni de la transformation naturelle $X_n \rightarrow M_n X_\bullet$. (Il s'agit de l'objet $X_\bullet^{\partial \Delta^n}$ de [TV05, Section 3.2].)

Un morphisme d'objets simpliciaux de $\mathcal{C}$, $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$, induit un morphisme naturel de $\mathcal{C}$:

$$X_n \rightarrow Y_n \times_{M_n Y_\bullet} M_n X_\bullet.$$

1. Il s'agit du Yoga général de localisation. Cf. [Lur09, Définition 5.5.4.1] dans le contexte des ∞ -catégories et [Lur09, Section A.3.7].

Définition 5.5. Un hyper-recouvrement étale d'un objet fibrant $\mathrm{Spec}(A)$ de $\mathcal{DAff}_k$ est un objet simplicial $X_\bullet$ de $\mathcal{DAff}_k/\mathrm{Spec}(A)$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- (1) X_n est un objet fibrant de $\mathcal{DAff}_k$;
- (2) $X_n \rightarrow M_n X_\bullet \times_{M_n \mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A)$ est une fibration et recouvrement étale, où $\mathrm{Spec}(A)$ est considéré comme objet simplicial constant.

Remarque 5.6.   $\mathcal{DAff}_k$

- (1) Définition 5.5 est une *version approximative* ; par exemple, Toën et Vezzosi utilisent des foncteurs dérivés dans l'expression $M_n X_\bullet \times_{M_n \mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A)$.
- (2) D'autre part, Toën et Vezzosi [TV05, Définition 4.4.1] avaient besoin de se permettre des coproduits formels d'objets de $\mathcal{DAff}_k$. Comme dans [TV08], puisque la topologie étale est *quasi-compacte* (cf. [TV08, Assumption 1.3.2.2]), on peut s'affranchir de cette étape.

Définition 5.7. (Cf. [TV05, Corollary 1.3.2.4] et [TV08, Lemma 2.2.2.13]) Soit $F \in \mathcal{PSt}_k$ un objet fibrant. On dit que F satisfait la condition *hyper-descente* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) Pour tout hyper-recouvrement étale $X_\bullet \rightarrow A$, le morphisme induit

$$F(\mathrm{Spec}(A)) \rightarrow \lim_{[n] \in \Delta} F(X_n)$$

est une équivalence faible. (Noter que $[n] \mapsto F(X_n)$ est un ensemble simplicial *cosimplicial* ; $\lim$ est pris dans $\Delta^{\mathrm{op}} \mathcal{Ens}$ par rapport à la structure cosimpliciale.)

- (2) Pour toute famille finie $\{X_i \in \mathcal{DAff}_k\}$ d'objets fibrants,

$$F(\coprod_i X_i) \rightarrow \prod_i F(X_i)$$

est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

Remarque 5.8.  $\mathcal{DAff}_k$ L'objet $\coprod_i X_i$ n'est pas en général fibrant.

Remarque 5.9. Soit $X_0 \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ une fibration et recouvrement étale, où $\mathrm{Spec}(A)$ est fibrant. L'objet simplicial de Čech associé, $X_\bullet$, est donné par

$$X_n := X_0^{\times_{\mathrm{Spec}(A)} n+1},$$

où les morphismes de structure sont induits par les projections et les morphismes diagonaux.

En particulier, la condition hyper-descente est alors analogue à la condition de descente pour un champ algébrique (ou encore, la définition d'un faisceau étale dans la situation discrète).

6. PROPRIÉTÉS DES CHAMPS DÉRIVÉS

Par la suite, on utilise la version *dérivée* $\mathbb{R}h$ du plongement de Yoneda modifié h .

Théorème 6.1. ([TV08, Corollaire 1.3.2.5] et [TV08, Lemme 2.2.2.13].) *La topologie étale sur $\mathcal{DAff}_k$ est sous-canonique : le plongement de Yoneda se factorise à travers la catégorie des champs dérivés*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{PSt}_k \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{DAff}_k & \xrightarrow{\mathbb{R}h} & \mathcal{PSt}_k \end{array}$$

Théorème 6.2. *Le plongement de Yoneda $\mathbb{R}h : \mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{St}_k$ est pleinement fidèle et préserve les limites (homotopiques).*

L'adjonction de Quillen

$$H_0 : \mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k^{\text{op}} \rightleftarrows \mathfrak{Aff}_k^{\text{op}} : i$$

permet de comparer les champs dérivés et les champs algébriques supérieurs à la Simpson (ceci sera utilisé à la Section 10).

Par exemple, un préfaisceau F de $\widehat{\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Aff}_k}$ induit un préfaisceau simplicial sur $\mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k$ par :

$$A \mapsto F(H_0(A)).$$

Théorème 6.3. ([TV08, Section 2.2.4] et [TV05, Section 4.8].) *L'adjonction $H_0 \dashv i$ induit une adjonction de Quillen :*

$$\mathfrak{St}_k \rightleftarrows \mathfrak{d}\mathfrak{St}_k : t_0$$

dont $\mathfrak{St}_k \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{St}_k$ est pleinement fidèle.

6.1. Sections généralisés. Si F est un champ dérivé, pour tout $\text{Spec}(A) \in \mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k$ on a les isomorphismes d'ensembles simpliciaux :

$$F(\text{Spec}(A)) \cong \text{Map}_{\mathfrak{d}\mathfrak{St}_k}(h(\text{Spec}(A)), F) \cong \mathbb{R}\text{Map}_{\mathfrak{d}\mathfrak{St}_k}(h(\text{Spec}(A)), F)$$

(en notant que $h(\text{Spec}(A))$ est cofibrant).

Ainsi, pour $X \in \mathfrak{d}\mathfrak{St}_k$ un objet cofibrant, on définit :

$$F(X) := \text{Map}_{\mathfrak{d}\mathfrak{St}_k}(X, F).$$

Cf. [PTVV13, Definition 1.12] dans le cas particulier où F correspond au préchamp des p -formes (respectivement fermées).

Remarque 6.4.  L'hypothèse X cofibrant est là pour assurer que $X \mapsto F(X)$ ait le bon comportement homotopique. Si $X \xrightarrow{\sim} Y$ est une équivalence faible de $\mathfrak{d}\mathfrak{St}_k$ entre deux objets cofibrants, alors

$$F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X)$$

est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

7. PREMIERS EXEMPLES

Dans cette section on présente quelques exemples plutôt naïfs.

Exemple 7.1. Le plongement de Yoneda modifié

$$\mathbb{R}h : \mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{St}_k$$

nous fournit les *champs dérivés représentables*.

Exemple 7.2. Soit $G \in \mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k$ un schéma en groupe affine dérivé (un objet en groupes de $\mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k$). (Par le plongement de Yoneda $h : \mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{St}_k$, on peut également le voir comme un objet en groupes de $\mathfrak{d}\mathfrak{St}_k$.)

On lui associe un objet simplicial (de $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k$) :

$$\cdots \cdots G \times G \rightrightarrows G \rightrightarrows *$$

ce qui (par le plongement de Yoneda h) fournit un objet de $\widehat{\Delta^{\text{op}}\mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k}$.

 Même en remplaçant h par $\mathbb{R}h$, on n'obtient pas en général un *champ dérivé* ; il faut passer au *champ dérivé associé*, qu'on dénotera :

$$[* / G].$$

Si G est *lisse* (et non-dérivé), on peut identifier le champ dérivé associé en termes du foncteur G -*torseurs*, qui prend ses valeurs dans les groupoïdes (pour passer dans les ensembles simpliciaux, on prend le nerf).

Exemple 7.3. Si G est *abélien*, on peut généraliser l'exemple précédent et définir les champs d'Eilenberg-MacLane dérivés (pour $n \in \mathbb{N}$) :

$$K(G, n) \in \mathfrak{d}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k.$$

Exemple 7.4. Supposer que G (de l'exemple 7.2) agit sur X dans $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$. La construction de BG se généralise :

$$\cdots \cdots X \times G \times G \rightrightarrows X \times G \rightrightarrows X.$$

Le champ dérivé associé correspond au *champ quotient* $[X/G]$.

⚡ Il faudrait imposer des conditions de lissitude sur G et sur l'action $X \times G \rightarrow X$.

Exemple 7.5. On généralise l'exemple 7.4 en considérant des objets en groupoïde de $\mathfrak{d}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$, donné par un couple de champs dérivés (X_1, X_0) (les 'morphisms' et les 'objets') muni des morphismes de structure

$$X_1 \rightrightarrows X_0,$$

la composition $X_1 \times_{X_0} X_1 \rightarrow X_1$ et l'inverse $X_1 \rightarrow X_1$. (Dans l'exemple précédent, $X_1 = X \times G$ et $X_0 = X$.)

A l'aide de la composition, on obtient un objet simplicial $X_\bullet$ de $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{d}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$:

$$\cdots \cdots X_1 \times_{X_0} X_1 \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows X_0.$$

Cet objet correspond à un préfaisceau *bisimplicial* sur $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$; pour obtenir le *champ quotient associé*, on passe à la *colimite homotopique* (cf. la réalisation géométrique) par rapport à la structure simpliciale de $X_\bullet$:

$$|X_\bullet| := \Pi(X_n \times \Delta^n) / \sim.$$

⚡ A la Section 9.1 on considérera les *groupoïdes de Segal*, qui généralisent cet exemple. Dans ce cadre, il sera nécessaire d'imposer l'hypothèse que $d_0 : X_1 \rightarrow X_0$ soit une fibration entre champs dérivés, afin que les produits fibrés soient *homotopiques*. De plus, on rajoutera des hypothèses de lissitude.

Exemple 7.6. Dans l'étude des *structures symplectiques décalées*, on introduira les préchamps dérivés :

$$\mathcal{A}^p(-, n) \\ \mathcal{A}^{p, \text{cl}}(-, n)$$

des p -formes (respectivement des p -formes fermées). Le résultat important [PTVV13, Proposition 1.11] affirme que ce sont des *champs dérivés*.

8. MORPHISMES LISSES DE $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_k$

Toën et Vezzosi considèrent dans [TV08, Section 2.2.2] les classes de morphismes définis dans leur cadre général de [TV08, Section 1.2].

En particulier, [TV08, Definition 2.2.2.3] fournit la définition de *fortement lisse* et [TV08, Theorem 2.2.2.6] montre que cette classe coïncide avec celle des morphismes lisses, donc on peut prendre la définition suivante :

Définition 8.1. Un morphisme $f : A \rightarrow B$ de $\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{g}\mathfrak{a}_k^+$ est *lisse* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) $H_0(B) \otimes_{H_0(A)} H_*(A) \xrightarrow{\cong} H_*(B)$ est un isomorphisme ;
- (2) $\mathrm{Spec} H_0(B) \rightarrow \mathrm{Spec} H_0(A)$ est lisse.

Notation 8.2. Soit $\mathbf{P}$ la classe des morphismes lisses de $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}$.

Proposition 8.3. (Cf. [TV08, Assumption 1.3.2.11 et Lemma 1.3.2.12] et [TV08, Lemma 2.2.3.1].) La classe $\mathbf{P}$ des morphismes lisses de $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}$ est étale locale :

- (1) les morphismes étale sont lisses ;
- (2) $\mathbf{P}$ est stable par compositions, équivalences et par produits fibrés ;
- (3) un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est lisse si et seulement s'il existe un recouvrement étale $\{U_i \rightarrow X\}$ tel que chaque morphisme composé $U_i \rightarrow Y$ est lisse ;
- (4) pour $X, Y \in \mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}$, les morphismes naturels $X \rightarrow X \amalg^h Y$ et $Y \rightarrow X \amalg^h Y$ sont lisses ;
- (5) pour toute famille finie de morphismes de $\mathbf{P}$, $\{X_i \rightarrow X\}$,

$$\amalg^h X_i \rightarrow X$$

est lisse.

Remarque 8.4. Dans [TV08, Section 1.4.3], Toën et Vezzosi introduisent des conditions de compatibilité (*conditions d'Artin*) entre une classe de morphismes $\mathbf{P}$ et une (pré)topologie modèle τ . Ces conditions sont importantes lorsqu'on généralise les propriétés des champs algébriques d'Artin. Voir la [TV08, Definition 1.4.3.1].

Proposition 8.5. [TV08, Proposition 2.2.3.2] La classe $\mathbf{P}$ des morphismes lisse satisfait les conditions d'Artin par rapport à $(\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}})_{\mathrm{et}}$.

9. CHAMPS DÉRIVÉS GÉOMÉTRIQUES

Notre objectif est de généraliser la définition des champs algébriques d'Artin. (La référence générale pour cette section est [TV08, Section 1.3.3].)

Notation 9.1. Soit $\mathrm{Spec}(A) \in \mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}$ un objet fibrant, on écrit $\underline{\mathrm{Spec}}(A) \in \mathfrak{d}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_{\mathbb{k}}$ pour $\underline{h}(\mathrm{Spec}(A))$.

Remarque 9.2.  Si A n'est pas cofibrant, il faut dériver ce foncteur, en considérant $\mathbb{R}\mathrm{Spec}(A)$.

La définition suivante est simplement une version dans le cadre dérivé de la définition de représentabilité habituelle.

Définition 9.3.

- (1) Un champ dérivé est *représentable* s'il est dans l'image essentielle de $\mathbb{R}\underline{h}$;
- (2) un morphisme de champs dérivés, $f : F \rightarrow G$, est *représentable* si, pour tout morphisme $U \rightarrow G$, où U est représentable, le produit fibré homotopique

$$F \times_G^h U$$

est représentable.

On a également la définition d'un morphisme *lisse* de préchamps :

Définition 9.4. Un morphisme de champs dérivés, $f : F \rightarrow G$, est *lisse* (ou $-1\text{-}\mathbf{P}$) s'il est représentable et, pour tout morphisme $U \rightarrow G$, où U est représentable, le morphisme de $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}$

$$F \times_G^h U \rightarrow U$$

est lisse.

Remarque 9.5. De la même manière, on a la notion d'*immersion ouverte* (pour la topologie Zariski). Un morphisme $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est une immersion ouverte si

- (1) $H_0(B) \otimes_{H_0(A)} H_*(A) \xrightarrow{\cong} H_*(B)$ est un isomorphisme ;
- (2) $\mathrm{Spec} H_0(B) \rightarrow \mathrm{Spec} H_0(A)$ est une immersion ouverte pour la topologie Zariski.

Un morphisme de champs dérivés, $f : F \rightarrow G$, est une *immersion ouverte* s'il est représentable et, pour tout morphisme $U \rightarrow G$, où U est représentable, le morphisme de $\mathfrak{A}ff_k$

$$F \times_G^h U \rightarrow U$$

est une immersion ouverte entre champs représentables.

Mutatis mutandis, on a la définition de *morphisme étale*.

Afin de donner une idée comment généraliser cette définition on utilise la terminologie équivalente :

Notation 9.6.

- (1) (-1) -géométrique $\Leftrightarrow$ représentable (pour les champs dérivés) ;
- (2) (-1) -représentable $\Leftrightarrow$ représentable (pour les morphismes de champs dérivés).

Définition 9.7. [TV08, Definition 1.3.3.1]

- (1) Un champs dérivé F est 0-géométrique si
 - (a) la diagonale $F \rightarrow F \times^h F$ est (-1) -représentable ;
 - (b) F admet un 0-atlas : il existe une famille de morphismes de champs dérivés $\{U_i \rightarrow F\}$ telle que
 - (i) chaque U_i est représentable ;
 - (ii) $\coprod U_i \rightarrow F$ est un recouvrement ;
 - (iii) chaque morphisme $U_i \rightarrow F$ est lisse (ou (-1) -P).
- (2) Un morphisme $f : F \rightarrow G$ est 0-représentable si, pour tout morphisme $V \rightarrow G$, où V est représentable, le produit fibré homotopique $V \times_G^h F$ est 0-géométrique.

Remarque 9.8. Il faut considérer $\coprod U_i \rightarrow F$ comme une *présentation lisse* de F et ainsi voir la définition précédente comme généralisation de celle d'un champs algébrique d'Artin.

Remarque 9.9. La définition précédente se généralise de manière récursive ; voir [TV08, Definition 1.3.3.1]. On obtient alors les notions de :

- (1) n -géométrique (pour les champs dérivés) ;
- (2) n -représentable (pour les morphismes) ;
- (3) n -P (pour les morphismes).

Remarque 9.10. Pour nous, les conséquences suivantes vont être importantes (voir [TV08, Corollary 2.2.3.3]) :

- (1) un champ n -géométrique possède un complexe cotangent global ;
- (2) un champ n -géométrique admet une théorie d'obstructions.

(Cf. [TV08, Section 1.4.3] et les résultats [TV08, Proposition 1.4.1.11] et [TV08, Proposition 1.4.2.7].)

9.1. Champs dérivés quotients - à la Segal.

Remarque 9.11. Il existe une caractérisation des champs géométriques en termes de quotients par actions de groupoïde (plus précisément, en utilisant les groupoïdes de Segal). Voir notamment [TV08, Proposition 1.3.4.2].

Exemple 9.12. Soit X un champ dérivé géométrique, muni de la présentation :

$$\coprod U_i \rightarrow X \in \mathbf{P}$$

($\mathbb{Z}$ qu'on supposera une *fibration* afin que tous les produits fibrés considérés soient homotopiques).

On pose $X_0 := \coprod U_i$ et $X_1 := X_0 \times_X X_0$, munis des morphismes de structure :

$$X_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} X_0,$$

fournis par les deux projections et le morphisme diagonal. (La transposée des facteurs fournit un morphisme 'inverse' $X_1 \rightarrow X_1$.)

En posant $X_n := X_0^{\times_{X_1} n+1}$, on obtient le *nerf* du morphisme $\coprod U_i \rightarrow X$, un objet simplicial $X_\bullet$ dont :

- (1) tous les X_n sont des II de représentables ;
- (2) les morphismes *faces* $X_n \rightarrow X_0$ sont lisses.

L'objet $X_\bullet$ permet de retrouver le champ X (cf. [TV08, Lemma 1.3.4.3]) : le morphisme naturel

$$|X_\bullet| \xrightarrow{\sim} X$$

est une équivalence faible de $\mathfrak{d}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$.

Remarque 9.13. La construction précédente fournit un cas particulier d'un $\mathbf{P}$ -groupoïde de Segal.

Définition 9.14. Un objet simplicial $X_\bullet \in \Delta^{\text{op}}\mathfrak{d}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$ est un *groupoïde de Segal* si :

- (1) les morphismes

$$X_n \xrightarrow{\sim} X_1 \times_{X_0}^h X_1 \times_{X_0}^h \dots \times_{X_0}^h X_1$$

sont des équivalences faibles ;

- (2) le morphisme correspondant à $\Lambda_0^2 \hookrightarrow \Delta^2$

$$X_2 \xrightarrow{\sim} X_1 \times_{d_0, X_0, d_0}^h X_1$$

est une équivalence faible.

$X_\bullet$ est un $\mathbf{P}$ -groupoïde de Segal si $d_0 : X_1 \rightarrow X_0$ est dans $\mathbf{P}$.

Plus généralement, on a la définition de n - $\mathbf{P}$ -groupoïde de Segal (cf. [TV08, Definition 1.3.4.1]) et :

Proposition 9.15. [TV08, Proposition 1.3.4.2] *Tout champ dérivé n -géométrique de $\mathfrak{d}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_k$ est quotient d'un $(n-1)$ - $\mathbf{P}$ -groupoïde de Segal.*

Remarque 9.16. L'exemple 9.12 exhibe X comme quotient d'un -1 - $\mathbf{P}$ -groupoïde de Segal.

10. CHAMPS ALGÈBRIQUES SUPÉRIEURS GÉOMÉTRIQUES

Lorsqu'on considère les schémas affines Aff_k (pas dérivés), la théorie générale de Toën et Vezzosi fournit la catégorie des champs St_k , dont la catégorie sous-jacente est $\widehat{\Delta^{\text{op}} \text{Aff}_k}$, munie de la *structure de modèle projective*, localisée par rapport à la *topologie étale*.

En particulier les objets fibrants sont les préfaisceaux simpliciaux sur Aff_k tels que :

- (1) $F(\text{Spec}(A))$ est un complexe de Kan, $\forall A$;
- (2) $F(\text{Spec}(A) \amalg \text{Spec}(B)) \xrightarrow{\sim} F(\text{Spec}(A)) \times F(\text{Spec}(B))$, $\forall A, B$;
- (3) F satisfait la descente étale pour les hyper-recouvrements étale de Aff_k .

La définition de champ n -géométrique est analogue à celle de $\mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k$.

Remarque 10.1. La propriété n -géométrique pour les champs supérieurs est reliée à la structure simpliciale par [TV08, Lemma 2.1.1.2] : si $F \in \text{St}_k$ est n -géométrique, alors F est $(n+1)$ -tronqué ($\forall s \in \pi_0(F(X))$, $\pi_i^{\text{et}}(F, s) = 0$ pour $i > n$).

Exemple 10.2. Un *espace algébrique d'Artin* est un champ supérieur 1-géométrique muni d'une présentation *étale* (voir [TV08, Definition 2.1.1.4] et [TV08, Remark 2.1.1.5] pour les notions précises).

Le foncteur de troncation

$$t_0 : \mathfrak{d}\mathfrak{St}_k \rightarrow \text{St}_k$$

est compatible avec la notion de champ n -géométrique, par [TV08, Proposition 2.2.4.4(1)].

De plus est, le théorème de représentabilité de Lurie fournit une caractérisation des champs n -géométriques en termes des champs algébriques supérieurs :

Théorème 10.3. [TV08, Theorem 2.2.6.12] *Soit $F \in \mathfrak{d}\mathfrak{St}_k$ un champ dérivé. Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) F est n -géométrique ;
- (2) F vérifie les trois conditions suivantes :
 - (a) $t_0 F$ est un $(n+1)$ -champ d'Artin ($(n+1)$ -tronqué et $\exists m$ tel que $t_0 F$ est m -géométrique) ;
 - (b) F admet une théorie d'obstruction ;
 - (c) $\forall \text{Spec}(A) \in \mathfrak{d}\mathfrak{Aff}_k$,

$$\mathbb{R}F(\text{Spec}(A)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}F(\text{Spec}(A_{\leq k}))$$

où $A_{\leq k} \subset A$ est la sous-algèbre dg engendrée par les éléments de degré $\leq k$.

RÉFÉRENCES

- [GJ09] Paul G. Goerss and John F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, Reprint of the 1999 edition [MR1711612]. MR 2840650
- [Hov99] Mark Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR 1650134 (99h :55031)
- [Lur09] Jacob Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. MR 2522659 (2010j :18001)
- [Mil80] James S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980. MR 559531 (81j :14002)
- [PTVV13] Tony Pantev, Bertrand Toën, Michel Vaquié, and Gabriele Vezzosi, *Shifted symplectic structures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 271–328. MR 3090262
- [TV05] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry. I. Topos theory*, Adv. Math. **193** (2005), no. 2, 257–372. MR 2137288 (2007b :14038)
- [TV08] ———, *Homotopical algebraic geometry. II. Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224. MR 2394633 (2009h :14004)