

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE DÉRIVÉE I

GEOFFREY POWELL

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Des groupoïdes aux ∞ -groupoïdes	4
3. Les champs algébriques supérieurs à la Simpson	6
4. Les préchamps dérivés	7
Annexe A. Le nerf simplicial	8
Références	9

On fixe $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0.



On utilise la notation *homologique* (plus naturelle en relation avec les objets simpliciaux), tandis [PTVV13] utilise la notation *cohomologique*.



On passe sous silence les points techniques *ensemblistes*.

1. INTRODUCTION

En géométrie algébrique classique, les $\mathbb{k}$ -schémas affines correspondent aux $\mathbb{k}$ -algèbres commutatifs :

$$\begin{aligned} \mathrm{Aff}_{\mathbb{k}} &\cong (\mathcal{C}\mathcal{R}\mathrm{ing}_{\mathbb{k}})^{\mathrm{op}} \\ X &\mapsto \mathcal{O}_X \\ \mathrm{Spec}(A) &\leftarrow A. \end{aligned}$$

En géométrie algébrique dérivée, on remplace $\mathrm{Aff}_{\mathbb{k}}$ par $\mathcal{D}\mathcal{A}\mathrm{ff}_{\mathbb{k}}$, la ∞ -catégorie des schémas affines dérivés (ou sa catégorie homotopique associée) :

$$\mathcal{D}\mathcal{A}\mathrm{ff}_{\mathbb{k}} \sim (\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+)^{\mathrm{op}}$$

où $\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+$ est munie de sa structure de modèle habituelle (induite par la structure *projective* de $\mathcal{C}\mathcal{H}_{\mathbb{k}}^+$). Les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les fibrations les morphismes surjectifs en degrés > 0 . Les objets cofibrants (et fibrants, puisque $\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+$ est une catégorie de modèle fibrante) de $\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+$ sont rétractes d'algèbres différentielles graduées de la forme

$$(\mathbb{S}(V), d),$$

les *algèbres semi-libres*, où V est un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel $\mathbb{N}$ -gradué ; les cofibrations sont les rétractes d'extensions semi-libres.



Remarque 1.1. On abusera notation par la suite : $\mathcal{D}\mathcal{A}\mathrm{ff}_{\mathbb{k}}$ peut dénoter également la catégorie sous-jacente (à savoir $(\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+)^{\mathrm{op}}$).

On dispose d'un foncteur *résolution cofibrante* qui associe à une algèbre A de $\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+$ une résolution :

$$\mathbb{k} \mapsto QA \xrightarrow{\sim} A,$$

où QA est semi-libre (donc cofibrante). En particulier Q fournit un foncteur

$$Q : \mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+ \rightarrow \mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+$$

à valeurs dans la sous-catégorie pleine des objets cofibrants (et fibrants).

Remarque 1.2.  En raison du changement de variance, les objets cofibrants de $\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+$ correspondent aux objets *fibrants* de $\mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}$ et la résolution cofibrante de $\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+$ à une *résolution fibrante* de $\mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}$.

L'homologie H_* définit un foncteur sur $\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+$ à valeurs dans les $\mathbb{k}$ -algèbres $\mathbb{N}$ -graduées commutatives. En particulier $H_0 : \mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+ \rightarrow \mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{G}_{\mathbb{k}}$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion en degré 0, $\iota : \mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{G}_{\mathbb{k}} \hookrightarrow \mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+$:

$$H_0 : \mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+ \rightleftarrows \mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{G}_{\mathbb{k}} : \iota.$$

Remarque 1.3. Si on considère $\mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{G}_{\mathbb{k}}$ comme catégorie de modèle munie de la structure triviale (définie par les isomorphismes), ceci est une adjonction de Quillen. Le foncteur ι admet également un adjoint à droite, qui envoie (A, d) à A_0 ; cette adjonction n'est pas une adjonction de Quillen, car $(A, d) \mapsto A_0$ n'envoie pas les fibrations triviales sur des isomorphismes.

Remarque 1.4. Le foncteur résolution cofibrante de $\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+$ induit un foncteur pleinement fidèle de ∞ -catégories :

$$Q^{\text{op}} : \mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{F}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}$$

(dont le foncteur H_0 fournit une 'inverse'). Ainsi on peut voir la géométrie algébrique classique à l'intérieur de $\mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}$.

Exemple 1.5. En théorie des ∞ -catégories, il faut remplacer les limites et les colimites par leurs versions *homotopiques*. Dans $\mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}$, ces constructions homotopiques se comportent souvent mieux que leurs versions non-homotopiques dans $\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}$.

Par exemple, considérons deux $\mathbb{k}$ -points $0, y$ dans $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}$; en passant de $\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}$ à $\mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{G}_{\mathbb{k}}$, le produit fibré $\text{Spec}(\mathbb{k}) \times_{\mathbb{A}_{\mathbb{k}}} \text{Spec}(\mathbb{k})$ correspond à la somme amalgamée suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k}[t] & \xrightarrow{t \mapsto y} & \mathbb{k} \\ t \mapsto 0 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{k} & \longrightarrow & \mathbb{k} \otimes_{\mathbb{k}[t]} \mathbb{k}, \end{array}$$

qui est 0 si $y \neq 0$, $\mathbb{k}$ sinon (correspondant géométrique au fait que l'intersection $\mathbb{k} \times_{\mathbb{A}_{\mathbb{k}}} \mathbb{k}$ est vide sauf si $y = 0$).

Dans $\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+$, on devrait former la somme amalgamée *homotopique*. Les algèbres $\mathbb{k}[t]$ et $\mathbb{k}$ (considérées comme objets de $\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{A}_{\mathbb{k}}^+$) sont déjà cofibrantes ; par contre, les morphismes $\mathbb{k}[t] \rightrightarrows \mathbb{k}$ ne sont pas des cofibrations. Le morphisme $\mathbb{k}[t_0] \rightarrow \mathbb{k}$, $t_0 \mapsto y$, admet la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k}[t_0] & \longrightarrow & (\mathbb{S}(t_0, u_1), du_1 = t_0 - y) \\ & \searrow t_0 \mapsto y & \downarrow \simeq t_0 \mapsto y, u_1 \mapsto 0 \\ & & \mathbb{k}. \end{array}$$

La colimite *homotopique* dans $\mathfrak{dga}_{\mathbb{k}}^+$ est donnée par la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k}[t_0] & \xrightarrow{t_0 \mapsto y} & (\mathbb{S}(t_0, u_1), du_1 = t_0 - y) \\ t_0 \mapsto 0 \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{k} & \longrightarrow & \mathbb{k} \otimes_{\mathbb{k}[t_0]} (\mathbb{S}(t_0, u_1), du_1 = t_0 - y) \end{array}$$

et

$$\mathbb{k} \otimes_{\mathbb{k}[t_0]} (\mathbb{S}(t_0, u_1), du_1 = t_0 - y) \cong (\mathbb{S}(u_1), du_1 = -y).$$

l'objet géométrique correspondant est le produit fibré *homotopique* :

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{k}) \times_{\mathbb{A}_{\mathbb{k}}}^h \mathrm{Spec}(\mathbb{k}).$$

La caractéristique d'Euler de l'espace des générateurs d'une algèbre semi-libre (dont l'espace des générateurs est de dimension totale finie) est un invariant de la classe de quasi-isomorphisme, qui peut être considérée comme sa *dimension virtuelle*. La caractéristique d'Euler de $(\mathbb{S}(u_1), du_1 = -y)$ est -1 , indépendamment de la valeur de y ; ceci est à comparer au fait que $\mathbb{k} \times_{\mathbb{A}_{\mathbb{k}}} \mathbb{k}$ est soit $\mathbb{k}$, soit $\emptyset$, selon la valeur de y .

Vers les champs : En géométrie algébrique classique, une première étape est de plonger la catégorie des schémas affines dans la catégorie des schémas :

$$\mathrm{Aff}_{\mathbb{k}} \hookrightarrow \mathrm{Sch}_{\mathbb{k}},$$

en recollant des schémas affines à l'aide de la topologie de Zariski. Ainsi on dispose d'une belle catégorie qui contient non-seulement les schémas affines, les schémas projectifs, les schémas quasi-projectifs mais bien d'autres...

Remarque 1.6.  Toutefois, cette catégorie ne contient pas encore suffisamment d'objets géométriques pour (co)représenter la plupart des espaces de modules de grand intérêt.

Pour cette raison, on généralise, en considérant :

- (1) les espaces algébriques (d'après Artin) : localement un espace algébrique est le quotient d'un schéma par une relation d'équivalence étale (donc *grosso modo*, on recolle les schémas affines en utilisant la topologie *étale* au lieu de *Zariski*) ;
- (2) les champs algébriques (dont la définition dépend d'un choix de topologie de Grothendieck). Pour la topologie *étale*, il y a deux classes de champs algébriques de grand intérêt :
 - (a) les champs algébriques de *Deligne-Mumford* - ceux qui admettent une présentation *étale* par un schéma affine ;
 - (b) les champs algébriques d'*Artin* - ceux qui admettent une présentation *lisse* par un schéma affine.
- (3) Simpson a introduit les *champs algébriques supérieurs* $\mathrm{St}_{\mathbb{k}}$ et les *champs supérieurs géométriques*, qui généralisent les champs d'Artin ; $\mathrm{St}_{\mathbb{k}}$ est une ∞ -catégorie.

Le point de vue des *foncteurs des points* est extrêmement intéressant lorsqu'on recherche à généraliser la construction des champs algébriques. Notamment, on a un plongement pleinement fidèle

$$\mathrm{Sch}_{\mathbb{k}} \hookrightarrow \mathrm{Fonc}(\mathfrak{C}\mathfrak{X}\mathfrak{ing}_{\mathbb{k}}, \mathfrak{C}\mathfrak{ns}) \cong \widehat{\mathrm{Aff}_{\mathbb{k}}},$$

qui envoie un $\mathbb{k}$ -schéma X au foncteur $A \mapsto X(A) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_{\mathbb{k}}}(\mathrm{Spec}(A), X)$.

Remarque 1.7. La catégorie $\widehat{\text{Aff}}_{\mathbb{k}}$ dénote la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur $\text{Aff}_{\mathbb{k}}$; cette catégorie est complète et co-complète, les limites et colimites étant construites dans $\mathbf{Ens}$. On peut considérer qu'on rajoute *librement* des colimites par cette construction.

Remarque 1.8.

- (1) On peut caractériser l'image de $\text{Sch}_{\mathbb{k}} \hookrightarrow \widehat{\text{Aff}}_{\mathbb{k}}$: il s'agit d'un critère de coreprésentabilité.
- (2) Le *critère d'Artin* concerne la coreprésentabilité par un espace algébrique.

Pour passer aux champs algébriques, on remplace $\mathbf{Ens}$ par les *groupoïdes* (plus précisément, on utilise la théorie des catégories fibrées en groupoïdes [LMB00]).

Objectifs Généraliser la construction des champs algébriques au cadre de la géométrie algébrique dérivée :

- construire une ∞ -catégorie $\mathfrak{dSt}_{\mathbb{k}}$ de *champs dérivés* (plus précisément un ∞ -topos) ;
- munir $\mathfrak{dSt}_{\mathbb{k}}$ d'un plongement de Yoneda :

$$\mathfrak{dAff}_{\mathbb{k}} \hookrightarrow \mathfrak{dSt}_{\mathbb{k}}$$

qui devrait être pleinement fidèle, préserver les (petites) limites homotopiques, être compatible avec les coproduits, ...

- le ∞ -topos des champs dérivés, $\mathfrak{dSt}_{\mathbb{k}}$, devrait être 'suffisamment grande' pour contenir tous les objets qui nous intéressent, mais la catégorie devrait avoir un bon comportement *géométrique* ;
- $\mathfrak{dSt}_{\mathbb{k}}$ devrait être compatible avec les champs supérieurs de Simpson : l'adjonction $H_0 : \mathfrak{dga}_{\mathbb{k}} \rightleftarrows \mathfrak{CRing}_{\mathbb{k}}$ devrait induire une adjonction (de ∞ -catégories)

$$\text{St}_{\mathbb{k}} \rightleftarrows \mathfrak{dSt}_{\mathbb{k}} ;$$

- il devrait exister une notion de *champ dérivé n -géométrique* (généralisation de celle de champ algébrique d'Artin et des champs supérieurs géométriques de Simpson).

Remarque 1.9. Les champs dérivés géométriques auront de meilleures propriétés, dont l'existence d'un complexe cotangent, d'une théorie d'obstructions ...

Par rapport aux champs algébriques classiques, il y a deux étapes principales :

- (1) remplacer les groupoïdes par les ∞ -groupoïdes ;
- (2) passer de $\mathfrak{CRing}_{\mathbb{k}}$ à $\mathfrak{dga}_{\mathbb{k}}^+$.

Remarque 1.10. On peut généraliser le passage de $\text{Aff}_{\mathbb{k}}$ à $\text{Sch}_{\mathbb{k}}$ en introduisant une catégorie de *dg-schémas* (voir le survol [Toë14, Section 2]). Il est techniquement plus simple de passer directement aux champs dérivés ; on peut éventuellement voir les dg-schémas à l'intérieur de $\mathfrak{dSt}_{\mathbb{k}}$.

2. DES GROUPOÏDES AUX ∞ -GROUPOÏDES

Rappelons que le foncteur *nerf* classique est défini sur la catégorie CAT des petites catégories :

$$N : \text{CAT} \rightarrow \mathbf{\Delta}^{\text{op}} \mathbf{Ens}.$$

En général, $N\mathcal{C}$ n'est pas un *complexe de Kan* (objet fibrant de $\mathbf{\Delta}^{\text{op}} \mathbf{Ens}$), car un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\mathbb{k}}^n & \xrightarrow{\quad} & N\mathcal{C} \\ \downarrow & \nearrow \text{dotted} & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

admet une extension (en pointillés) si $0 < k < n$ (ce qui correspond aux cornes *intérieurs*), mais pas nécessairement pour $k \in \{0, n\}$. (L'extension, lorsqu'elle existe, est unique.)

Par exemple, considérer $\Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2$; un morphisme $\Lambda_1^2 \rightarrow N\mathcal{C}$ correspond à une paire de morphismes composables et donc à un 2-simplexe de $N\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ 0 & \xrightarrow{\quad g \circ f \quad} & 2. \end{array}$$

Par contre, en utilisant l'identité (qui correspond à une dégénérescence de $N\mathcal{C}$), un morphisme f de $\mathcal{C}$ détermine un morphisme $\Lambda_0^2 \rightarrow N\mathcal{C}$ représenté par la corne :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ f \nearrow & \cdots \searrow \gamma & \\ 0 & \xrightarrow{\quad \text{id} \quad} & 2. \end{array}$$

Une extension fournirait une inverse à gauche de f . Pour Λ_2^2 on obtient une conclusion analogue pour l'existence d'une inverse à droite.

Pour résumer :

Lemme 2.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie petite. Alors*

- (1) *$N\mathcal{C}$ est une ∞ -catégorie (quasi-catégorie) ;*
- (2) *$\mathcal{C}$ est un groupoïde si et seulement si $N\mathcal{C}$ est un complexe de Kan.*

La construction de $N\mathcal{C}$ ne dépend que de la troncation :

$$(N\mathcal{C})_0 \rightleftarrows (N\mathcal{C})_1$$

Remarque 2.2. Ceci revient à dire que

$$N\mathcal{C} \cong \text{cosk}_1 N\mathcal{C},$$

où cosk est le foncteur cosquelette.

En particulier, pour un groupoïde $\mathcal{G}$, la réalisation géométrique $B\mathcal{G} := |N\mathcal{G}|$ est un 1-type d'homotopie¹. Par exemple, pour G un groupe discret, BG a le type d'homotopie d'un espace d'Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$.

Remarque 2.3. Cette observation permet de voir les 1-types d'homotopie comme une généralisation des groupoïdes. Pour généraliser, on considère les complexes de Kan comme des ∞ -groupoïdes.

Définition 2.4. [Lur09, Section 1.2.16] Soient

- (1) $\mathfrak{Kan}$ la sous-catégorie simpliciale pleine de $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ (munie de son enrichissement simplicial habituel), ayant pour objets les complexes de Kan ;
- (2) $\mathcal{S}$ la ∞ -catégorie des *spaces* associée à $\mathfrak{Kan}$:

$$\mathcal{S} := N_{\Delta} \mathfrak{Kan},$$

où N_{Δ} est le foncteur *nerf simplicial* [Lur09, Définition 1.1.5.5] (voir l'Appendice A).

1. On utilise l'hypothèse groupoïde afin que $N\mathcal{G}$ soit un complexe de Kan, et donc les groupes d'homotopie se calculent facilement dans $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$; en particulier on peut alors exploiter le fait que $N\mathcal{G}$ soit un 1-cosquelette.

Remarque 2.5. Ici on mélange deux notions équivalentes d' ∞ -catégorie : la version naïve est celle d'une catégorie simpliciale ; Lurie [Lur09] utilise (principalement) la théorie des quasi-catégories. Le foncteur *nerf simplicial* N_Δ est un adjoint à droite :

$$\mathfrak{C}[-] : \Delta^{\text{op}} \mathfrak{Ens} \rightleftarrows \text{CAT}_\Delta : N_\Delta,$$

où CAT_Δ est la catégorie des catégories simpliciales petites (voir [Lur09, page 23]).

Par [Lur09, Proposition 1.1.5.10], si $\mathcal{C}$ est une catégorie simpliciale *fibrante* (ie les $\text{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ sont des complexes de Kan), alors $N_\Delta \mathcal{C}$ est une quasi-catégorie.

L'idée naïve de la construction des champs algébriques supérieurs est de remplacer les groupoides par $\mathcal{S}$. Dans la définition des champs géométriques, on impose (implicitement) une condition supplémentaire : on ne considérera que les n -types d'homotopie (pour un $n \in \mathbb{N}$).

3. LES CHAMPS ALGÈBRIQUES SUPÉRIEURS À LA SIMPSON

On remplace la catégorie des préfaisceaux $\widehat{\text{Aff}}_k$ par la catégorie des préfaisceaux simpliciaux $\Delta^{\text{op}} \widehat{\text{Aff}}_k$. La structure de modèle de $\Delta^{\text{op}} \mathfrak{Ens}$ induit la structure de modèle *projective* sur $\widehat{\text{Aff}}_k$, dont les fibrations et les équivalences faibles sont définies par leur comportement sur les sections.

Remarque 3.1. Lurie [Lur09] procède en considérant les préfaisceaux dans le contexte de la théorie des quasi-catégories.

Étant donné une topologie de Grothendieck sur Aff_k (par exemple la topologie étale), on *localise* (à la Bousfield) la structure de modèle projective : ceci correspond (à peu près) au passage aux *faisceaux* simpliciaux.

Remarque 3.2. Rappel : soit $(\mathcal{C}; \mathcal{C}of, \mathcal{F}ib, \mathcal{W})$ une catégorie de modèle ; une localisation à la Bousfield à gauche est une structure de modèle sur $\mathcal{C}$ de la forme :

$$(\mathcal{C}'; \mathcal{C}of', \mathcal{F}ib', \mathcal{W}')$$

$\mathcal{C}' = \mathcal{C}$; $\mathcal{C}of' = \mathcal{C}of$ et $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}'$. Puisque $\mathcal{C}of \cap \mathcal{W} \subseteq (\mathcal{C}of' \cap \mathcal{W}')$, par les propriétés de relèvement, on a que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}ib' &\subseteq \mathcal{F}ib \\ \mathcal{F}ib' \cap \mathcal{W}' &= \mathcal{F}ib \cap \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Souvent on part d'un ensemble de morphismes S de $\text{Ho}(\mathcal{C})$ qu'on souhaite inverser et on se pose la question suivante :

— existe-t-il une localisation à gauche $\mathcal{C}'$ telle que $\text{Ho}(\mathcal{C}') \cong \text{Ho}(\mathcal{C})[S^{-1}]$?

Sous de bonnes hypothèses de finitude et sur la structure de $\mathcal{C}$, une telle localisation existe.

Ceci nous fournit la ∞ -catégorie St_k des *champs algébriques supérieurs*.

Remarque 3.3. Cf. les structures de modèle de Jardine et de Joyal.

La dernière étape est l'introduction de la bonne notion de *champ algébrique supérieur d'Artin*. Celle-ci sera abordée ultérieurement.

Remarque 3.4. Toën et Vezzosi [TV08, Section 2.1] montrent que la construction des champs algébriques supérieurs peut être effectuée dans le cadre de la théorie générale de [TV08].

4. LES PRÉCHAMPS DÉRIVÉS

On introduit la ∞ -topos des préchamps dérivés, qui généralise la catégorie des préfaisceaux simpliciaux $\Delta^{\text{op}} \widehat{\text{Aff}}_{\mathbb{k}}$, munie de sa structure de modèle projective.

La construction à l'aide de la définition de [Lur09, Section 5.1] de Lurie de la ∞ -catégorie des préfaisceaux est conceptuellement très parlant.

Notation 4.1. Pour X un ensemble simplicial, soit X^{op} l'ensemble simplicial opposé (voir [Lur09, Section 1.2.1]), obtenu en renversant l'ordre total des ordinaux ($\underline{n} \cong \underline{n}^{\text{op}}$).

Définition 4.2. [Lur09, Définition 5.1.0.1] Soit $X \in \Delta^{\text{op}} \mathfrak{Ens}$. La ∞ -catégorie $\mathcal{P}(X)$ des préfaisceaux sur X est :

$$\mathcal{P}(X) := \text{Map}(X^{\text{op}}, \mathcal{S}).$$

Le ∞ -plongement de Yoneda ([Lur09, Proposition 5.1.3.1])

$$j : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

est induit par le passage à la catégorie simpliciale $\mathfrak{C}[X]$ associée à X (ainsi qu'un remplacement fibrant).

Exemple 4.3.

- (1) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie petite ; en prenant $X := N\mathcal{C}$, on obtient l' ∞ -catégorie des préfaisceaux :

$$\mathcal{P}(N\mathcal{C});$$



ceci n'est pas équivalente à la catégorie des préfaisceaux de complexes de Kan sur $\mathcal{C}$.

- (2) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie *simpliciale* petite ; cette-fois ci on considère l'ensemble simplicial $N_{\Delta}\mathcal{C}$ et sa ∞ -catégorie de préfaisceaux :

$$\mathcal{P}(N_{\Delta}\mathcal{C}).$$



Si $\mathcal{C}$ n'est pas *fibrante*, $N_{\Delta}\mathcal{C}$ n'est pas en général une quasi-catégorie.

Remarque 4.4. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de modèle *simpliciale*, on considère la ∞ -catégorie associée, à savoir la sous-catégorie simpliciale pleine $\mathcal{C}^{\circ}$ des objets fibrants et cofibrants. On dispose alors de la quasi-catégorie associée $N_{\Delta}(\mathcal{C}^{\circ})$, qui contient tous les renseignements de la théorie d'homotopie (supérieure) de $\mathcal{C}$.

En particulier, la construction de la ∞ -catégorie des préfaisceaux

$$\mathcal{P}(N_{\Delta}\mathcal{C}).$$

prend en compte cette structure homotopique.

Exemple 4.5. On peut utiliser la catégorie $\Delta^{\text{op}} \mathfrak{C}\mathfrak{R}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\mathfrak{g}_{\mathbb{k}}$ des $\mathbb{k}$ -algèbres commutatives simpliciales à la place de $\mathfrak{cdga}_{\mathbb{k}}^{+}$ comme modèle de $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}^{\text{op}}$; Quillen [Qui67, GJ09] munit $\Delta^{\text{op}} \mathfrak{C}\mathfrak{R}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\mathfrak{g}_{\mathbb{k}}$ d'une structure de modèle *simpliciale*. La ∞ -catégorie des préchamps dérivés est alors :

$$\mathcal{P}\left((N_{\Delta}(\Delta^{\text{op}} \mathfrak{C}\mathfrak{R}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\mathfrak{g}_{\mathbb{k}})^{\circ})^{\text{op}}\right)$$

munie du plongement de Yoneda

$$(N_{\Delta}(\Delta^{\text{op}} \mathfrak{C}\mathfrak{R}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\mathfrak{g}_{\mathbb{k}})^{\circ})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{P}\left((N_{\Delta}(\Delta^{\text{op}} \mathfrak{C}\mathfrak{R}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\mathfrak{g}_{\mathbb{k}})^{\circ})^{\text{op}}\right).$$

On note que :

$$\mathcal{P}\left((N_{\Delta}(\Delta^{\text{op}} \mathfrak{C}\mathfrak{R}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\mathfrak{g}_{\mathbb{k}})^{\circ})^{\text{op}}\right) \cong \text{Map}(N_{\Delta}(\Delta^{\text{op}} \mathfrak{C}\mathfrak{R}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\mathfrak{g}_{\mathbb{k}})^{\circ}, \mathcal{S}).$$

La construction de Toën et Vezzosi [TV05, TV08] est équivalente, mais utilise la localisation (à la Bousfield) d'une catégorie de modèle. On résume cette construction (cf. [TV08, Section 1.3.1] et [TV05]) :

- (1) On munit $\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{A}ff_k}$ de sa structure de modèle projective.  Ceci ne prend pas en compte la structure homotopique de $\mathfrak{A}ff_k$.
- (2) Le plongement de Yoneda classique (en utilisant la structure simpliciale *constante*) nous fournit le foncteur

$$h : \mathfrak{A}ff_k \rightarrow \Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{A}ff_k}.$$

- (3) On localise la structure projective de $\Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{A}ff_k}$ en inversant les morphismes $h(f)$, pour toute équivalence faible f de $\mathfrak{A}ff_k$. Ainsi on impose la *compatibilité* avec la structure homotopique de $\mathfrak{A}ff_k$.

Définition 4.6. La ∞ -catégorie des préchamps dérivés est la catégorie

$$\mathfrak{PSt}_k := \Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{A}ff_k}$$

munie de la structure de modèle projective localisée (qu'on peut considérer alors comme une ∞ -catégorie).

Proposition 4.7. [TV05] La catégorie de modèle $\mathfrak{PSt}_k$ est simpliciale.

Le plongement de Yoneda h induit un morphisme de ∞ -catégories

$$\mathfrak{A}ff_k \rightarrow \mathfrak{PSt}_k.$$

Proposition 4.8. [TV08, Section 1.3.1] Soient $A \in \mathfrak{cdga}_k^+$ une algèbre semi-libre et $F \in \Delta^{\text{op}}\widehat{\mathfrak{A}ff_k}$ un préchamp fibrant. Alors

$$\mathbb{R}\text{Map}(h(\text{Spec}(A)), F) \simeq F(\text{Spec}(A)).$$

Théorème 4.9. Le ∞ -plongement de Yoneda, $\mathfrak{A}ff_k \rightarrow \mathfrak{PSt}_k$ est

- (1) pleinement fidèle ;
- (2) préserve les petites limites homotopiques ;
- (3) préserve les coproduits homotopiques.

ANNEXE A. LE NERF SIMPLICIAL

La construction de l'adjonction

$$\mathfrak{C}[-] : \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens} \rightleftarrows \text{CAT}_\Delta : N_\Delta$$

se base sur la construction du foncteur

$$\mathfrak{C}[-] : \Delta \rightarrow \text{CAT}_\Delta,$$

qu'on peut considérer comme une catégorie simpliciale *cosimpliciale*. Plus précisément :

- (1) Le foncteur $\mathfrak{C}[-] : \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens} \rightarrow \text{CAT}_\Delta$ est une *extension de Kan* à gauche de $\mathfrak{C}[-] : \Delta \rightarrow \text{CAT}_\Delta$.
- (2) Le nerf simplicial N_Δ est défini à partir de l'adjonction : soit $\mathcal{C}$ une catégorie simpliciale, alors

$$N_\Delta(\mathcal{C})_n := \text{Hom}_{\text{CAT}_\Delta}(\mathfrak{C}[\Delta^n], \mathcal{C}),$$

muni de la structure simpliciale induite de la structure cosimpliciale de $n \mapsto \mathfrak{C}[\Delta^n]$.

Le foncteur $\mathfrak{C}[-] : \Delta \rightarrow \text{CAT}_\Delta$ est défini comme suite. Soit J un ensemble fini totalement ordonné. Pour $i, j \in J$, soit $P_{i,j}$ l'ensemble partiellement ordonné des sous-ensembles $J' \subset J$ tels que

$$\{i, j\} \subseteq J' \subseteq \{k \mid i \leq k \leq j\}.$$

(Si $i > j$, $P_{i,j}$ est vide.)

La catégorie simpliciale $\mathfrak{C}[\Delta^J]$ a pour objets les éléments de J et

$$\text{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^J]}(i, j) := NP_{i,j}.$$

La composition est induite par la réunion de sous-ensembles de J .

RÉFÉRENCES

- [GJ09] Paul G. Goerss and John F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, Reprint of the 1999 edition [MR1711612]. MR 2840650
- [LMB00] Gérard Laumon and Laurent Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 39, Springer-Verlag, Berlin, 2000. MR 1771927 (2001f :14006)
- [Lur09] Jacob Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. MR 2522659 (2010j :18001)
- [PTVV13] Tony Pantev, Bertrand Toën, Michel Vaquié, and Gabriele Vezzosi, *Shifted symplectic structures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 271–328. MR 3090262
- [Qui67] Daniel G. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, No. 43, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967. MR 0223432 (36 #6480)
- [Toë14] Bertrand Toën, *Derived algebraic geometry*, EMS Surv. Math. Sci. **1** (2014), no. 2, 153–240. MR 3285853
- [TV05] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry. I. Topos theory*, Adv. Math. **193** (2005), no. 2, 257–372. MR 2137288 (2007b :14038)
- [TV08] ———, *Homotopical algebraic geometry. II. Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224. MR 2394633 (2009h :14004)