

LE COMPLEXE COTANGENT ET L'ALGÈBRE DE DE RHAM

GEOFFREY POWELL

TABLE DES MATIÈRES

1. Faisceaux quasi-cohérents	1
2. Le complexe cotangent revisité	3
2.1. Le cas des champs 0-géométriques	3
3. L'algèbre $\mathbf{DR}^{int}$ de de Rham	6
3.1. Complexes mixtes	6
3.2. Algèbres commutatives	8
Références	9

Fixons $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0.

1. FAISCEAUX QUASI-COHÉRENTS

Rappelons que le plongement de Yoneda (modifié) fournit le foncteur pleinement fidèle :

$$\mathbb{R}h : \mathcal{A}ff_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{S}t_{\mathbb{k}}.$$

Un champ dérivé est dit *représentable* s'il est dans l'image essentielle de ce foncteur. Ainsi un champ dérivé X est représentable si et seulement s'il est isomorphe à $\underline{h}(\mathrm{Spec}(A))$ pour $A \in \mathcal{C}dga_{\mathbb{k}}^+$ semi-libre ; on écrira parfois $\mathcal{O}_X$ pour A .

Pour tout $A \in \mathcal{C}dga_{\mathbb{k}}$, on dispose de la catégorie $\mathcal{M}od_A$ des A -modules (dans $\mathcal{C}h_{\mathbb{k}}$), munie de la structure de modèle induite par celle de $\mathcal{C}h_{\mathbb{k}}$. Cette structure est *fibrante*.

Le produit tensoriel de complexes est compatible avec la structure de modèle, donc $\mathcal{M}od_A$ fournit une ∞ -catégorie stable symétrique monoïdale.

Définition 1.1. Pour X un champ dérivé représentable, la ∞ -catégorie $\mathbf{QCoh}(X)$ des faisceaux quasi-cohérents sur X est la ∞ -catégorie associée à $\mathcal{M}od_A$.

Exemple 1.2. Soit X un champ dérivé représentable, alors $\mathcal{O}_X \in \mathbf{QCoh}(X)$ et fournit l'objet neutre pour la $\otimes$ -structure.

Rappelons qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ entre champs dérivés représentables correspond à un morphisme $\mathcal{O}_f : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ de $\mathcal{C}dga_{\mathbb{k}}^+$ et que $\mathcal{O}_f$ induit l'adjonction de Quillen :

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} - : \mathcal{M}od_{\mathcal{O}_Y} \rightleftarrows \mathcal{M}od_{\mathcal{O}_X} : \mathrm{Restr}.$$

En particulier, $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} -$ induit un morphisme de ∞ -catégories (stables, symétriques monoïdales) :

$$f^* : \mathbf{QCoh}(Y) \rightarrow \mathbf{QCoh}(X).$$

Pour F un champ dérivé quelconque, on considère la catégorie :

$$\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}/F$$

dont les objets sont les morphismes $X \rightarrow F$ de $\mathcal{D}\mathcal{S}t_k$ (où X est représentable) et dont les morphismes sont les triangles commutatifs.

Définition 1.3. Soit F un champ dérivé. La ∞ -catégorie $\mathbf{QCoh}(F)$ des faisceaux quasi-cohérents sur F est la ∞ -catégorie :

$$\mathbf{QCoh}(F) := \operatorname{holim}_{X \rightarrow F \in \mathcal{D}\mathcal{A}ff_k / F} \mathbf{QCoh}(X)$$

où la limite homotopique se forme dans la catégorie des ∞ -catégories stables.

Remarque 1.4. On peut également utiliser les dg-catégories comme cadre ; en effet les catégories $\mathbf{QCoh}(X)$ possèdent beaucoup plus de structure provenant du fait que $\mathcal{M}od_A$ est enrichie en $\mathcal{C}h_k$.

Exemple 1.5. Les faisceaux quasi-cohérents $\mathcal{O}_X$ se recollent pour donner l'objet $\mathcal{O}_F \in \mathbf{QCoh}(F)$.

On peut mettre la Définition 1.3 dans un contexte général à l'aide du théorème suivant :

Théorème 1.6. [TV08] *Les faisceaux quasi-cohérents $\mathbf{QCoh}(-)$ forment un champ dérivé, en particulier satisfont la hyper-descente étale.*

Démonstration. (Remarques.) La construction du préfaisceau simplicial sous-jacent est non-triviale (problème de strictification) ; dans [TV08], Toën et Vezzosi proposent un modèle rigidifié en utilisant les espaces classifiants à la Dwyer-Kan pour avoir un ensemble simplicial. (Si on utilise les quasi-catégories comme modèle pour les ∞ -catégories, $\mathbf{QCoh}(X)$ est par définition un ensemble simplicial.) On note que le morphisme $f^* : \mathbf{QCoh}(Y) \rightarrow \mathbf{QCoh}(X)$ est une équivalence de Quillen si $f : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ est un quasi-isomorphisme. $\square$

Remarque 1.7.  La présentation précédente est un tantôt approximative. En particulier, il faut distinguer entre les faisceaux quasi-cohérents les faisceaux de $\mathcal{O}_F$ -modules.

Dans [PTVV13], les références suivantes sont proposées : [Toë12] et [Lur].

Exemple 1.8. Soit G un schéma en groupes affine (lisse) et $BG := [*/G]$ le champ dérivé associé. La ∞ -catégorie $\mathbf{QCoh}(BG)$ est équivalente à la ∞ -catégorie des G -modules de $\mathcal{C}h_k$. (Un G -module est un complexe de chaîne M muni d'une structure de $\mathcal{O}_G$ -comodule.)

Cette équivalence proviennent de la construction de BG à partir de l'objet simplicial de $\Delta^{\text{op}}\mathcal{D}\mathcal{A}ff_k$

$$\cdots \cdots \cdots G \times G \rightrightarrows G \rightrightarrows *$$

et la notion de faisceau quasi-cohérent sur un objet de $\Delta^{\text{op}}\mathcal{D}\mathcal{A}ff_k$.

Le faisceau quasi-cohérent associé à un $\mathcal{O}_G$ -comodule M est fourni par la construction cobar (objet cosimplicial) :

$$M \rightrightarrows M \otimes \mathcal{O}_G \rightrightarrows M \otimes \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_G \cdots \cdots \cdots$$



La construction de l'inverse est un exercice instructif.

Remarque 1.9. Soit $X \in \mathcal{D}\mathcal{A}ff_k$; le foncteur 'oubli' $\mathcal{M}od_{\mathcal{O}_X} \rightarrow \mathcal{C}h_k$ correspond au foncteur de restriction lelong de $k \rightarrow \mathcal{O}_X$ ($X \rightarrow *$ dans $\mathcal{D}\mathcal{A}ff_k$). On obtient ainsi le foncteur (dérivé) des sections globales $\mathbb{R}\Gamma : \mathbf{QCoh}(X) \rightarrow \mathcal{D}(k)$.

En général, pour $F \in \mathcal{D}\mathcal{S}t_k$, on dispose du foncteur

$$\mathbb{R}\Gamma : \mathbf{QCoh}(X) \rightarrow \mathcal{D}(k)$$

analogue au foncteur des sections globales.

Exemple 1.10. Rappelons que la catégorie $\mathbf{QCoh}(BG)$ est équivalente à la catégorie des G -modules. Le foncteur

$$\mathbb{R}\Gamma : \mathbf{QCoh}(BG) \rightarrow \mathcal{D}(k)$$

est équivalente au foncteur dérivé (à droite) du foncteur $(\cdot)^G$ des G -points fixes. Ici, pour M un $\mathcal{O}_G$ -comodule, M^G est l'égalisateur de

$$M \rightrightarrows M \otimes \mathcal{O}_G.$$

2. LE COMPLEXE COTANGENT REVISITÉ

Pour $A \in \mathbf{cdga}_{\mathbb{k}}^+$, nous avons construit le module de différentiels :

$$\Omega_{A/\mathbb{k}} \in \mathbf{Mod}_A.$$

Le complexe cotangent en est son foncteur dérivé ; explicitement on prend

$$A \otimes_{QA} \Omega_{QA/\mathbb{k}} \in \mathbf{Mod}_A,$$

où $QA \xrightarrow{\sim} A$ est une résolution cofibrante de A . Ceci nous fournit, pour X un champ dérivé représentable :

$$\mathbb{L}_X \in \mathbf{QCoh}(X).$$

Remarque 2.1. Il existe une résolution cofibrante *fonctorielle* dans $\mathbf{cdga}_{\mathbb{k}}$, donc la construction de $\mathbb{L}_X$ peut être rendue fonctorielle.

Remarque 2.2. Soit $F \in \mathbf{dSt}_{\mathbb{k}}$ un champ dérivé.

- (1) Pour $x : X \rightarrow F$ un X -point (dans $\mathbf{dAff}_{\mathbb{k}}/F$), le complexe cotangent au point x est un objet $\mathbb{L}_{F,x} \in \mathbf{QCoh}(X)$ (s'il existe).
- (2) Le complexe cotangent global est un objet

$$\mathbb{L}_F \in \mathbf{QCoh}(F)$$

(s'il existe).

Lorsque F est n -géométrique, ces objets existent (et admettent des descriptions plus explicites).

Remarque 2.3.  Pour éviter les difficultés techniques associées à la définition et construction du complexe cotangent global, il faut mieux chercher à définir le complexe cotangent (pour F un champ n -géométrique par exemple) par

$$\mathbb{L}_F := \mathrm{holim}_{x: X \rightarrow F \in \mathbf{dAff}_{\mathbb{k}}/F} \mathbb{L}_{F,x}$$

dans $\mathbf{QCoh}(F)$.

(Il faut donner un sens à cette expression par rapport à la définition de $\mathbf{QCoh}(F)$ comme holim des $\mathbf{QCoh}(X)$, car $\mathbb{L}_{F,x}$ appartient à $\mathbf{QCoh}(X)$.)

2.1. Le cas des champs 0-géométriques. Soit $F \in \mathbf{dSt}_{\mathbb{k}}$ un champ 0-géométrique¹, c'est à dire que la diagonale

$$F \xrightarrow{\mathrm{diag}} F \times^h F$$

est représentable et qu'il existe un 0-atlas

$$\coprod_i U_i \rightarrow F$$

qui est un recouvrement (en particulier U_i est représentable et $U_i \rightarrow F$ est lisse $\forall i$).

1. il faut vérifier l'indexation, car il semble y avoir une incohérence dans [TV08]

Commençons par la construction de $\mathbb{L}_{F,x} \in \mathbf{QCoh}(X)$ pour $x : X \rightarrow F$ dans $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}/F$. On a le diagramme homotopiquement cartésien suivant

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X \times_F^h X & \longrightarrow & X \times^h X \\ & & \downarrow \lrcorner_h & & \downarrow \\ F & \xrightarrow{\text{diag}} & F \times^h F & & \end{array}$$

(c'est à dire qu'on identifie $X \times_F^h X$ avec le produit fibré homotopique du diagramme $\lrcorner_h$), où les champs dérivés X , $X \times_F^h X$ et $X \times^h X$ sont représentables (pour le deuxième, on utilise que $F \rightarrow F \times^h F$ soit représentable) et la composition

$$X \rightarrow X \times_F^h X \rightarrow X \times^h X$$

est la diagonale, où $X \times_F^h X \rightarrow X \times^h X$ est le morphisme canonique.

En particulier, pour tout $U \rightarrow X \times_F^h X$ de $\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_{\mathbb{k}}$, on dispose du morphisme de $\mathbf{QCoh}(U)$

$$(1) \quad \mathbb{L}_{X \times^h X}(U) \rightarrow \mathbb{L}_{X \times_F^h X}(U)$$

(avec un abus de notation évident) qui représente le morphisme naturel

$$(2) \quad \mathbb{D}er_{X \times_F^h X}(U, -) \rightarrow \mathbb{D}er_{X \times^h X}(U, -)$$

de foncteurs sur $\mathbf{QCoh}(U)$.

Rappelons que, pour $U \rightarrow G \in U/\mathfrak{d}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_{\mathbb{k}}$, par définition :

$$\mathbb{D}er_G(U, -) := \mathbb{R}\text{Map}_{U/\mathfrak{d}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_{\mathbb{k}}}(U[-], G).$$

L'espace $\mathbb{D}er_G(U, -)$ est naturellement pointé, par la dérivation triviale.

Lemme 2.4. Soit $G_1 \rightarrow F \leftarrow G_2$ un diagramme de $U/\mathfrak{d}\mathfrak{S}\mathfrak{t}_{\mathbb{k}}$. Alors on a les équivalences naturelles :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}er_{G_1 \times^h G_2}(U, -) &\simeq \mathbb{D}er_{G_1}(U, -) \times^h \mathbb{D}er_{G_2}(U, -) \\ \mathbb{D}er_{G_1 \times_F^h G_2}(U, -) &\simeq \mathbb{D}er_{G_1}(U, -) \times_{\mathbb{D}er_F(U, -)}^h \mathbb{D}er_{G_2}(U, -) \end{aligned}$$

et, par ces équivalences, le morphisme (2) correspond au morphisme naturel :

$$(3) \quad \mathbb{D}er_X(U, -) \times_{\mathbb{D}er_F(U, -)}^h \mathbb{D}er_X(U, -) \rightarrow \mathbb{D}er_X(U, -) \times^h \mathbb{D}er_X(U, -)$$

du produit fibré homotopique vers le produit, associé au diagramme naturel d'espaces pointés :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{D}er_X(U, -) & \\ & \downarrow & \\ \mathbb{D}er_X(U, -) & \longrightarrow & \mathbb{D}er_F(U, -) \end{array}$$

Démonstration. Exercice. □

Lemme 2.5. Soit $Y \rightarrow Z$ un morphisme d'espaces topologiques pointés ; alors la fibre homotopique du morphisme naturel

$$Y \times_Z^h Y \rightarrow Y \times Y$$

au point de base de $Y \times Y$ est ΩZ .

Démonstration. Le produit fibré homotopique $Y \times_Z^h Y$ est équivalent à $Y \times_Z Z^I \times_Z Y$ et le morphisme est la projection sur $Y \times Y$. La fibre de ce morphisme au point de base de $Y \times Y$ est ΩZ . □

Corollaire 2.6. Soient F, U comme auparavant. Alors, la fibre homotopique de (3)

$$\mathbb{D}er_{X \times_F^h X}(U, -) \rightarrow \mathbb{D}er_{X \times^h X}(U, -)$$

est naturellement équivalente à $\Omega \mathbb{D}er_F(U, -)$.

Définition 2.7. Soit $\tilde{\mathbb{L}}$ la fibre homotopique dans $\mathbf{QCoh}(U)$ de (1) :

$$\mathbb{L}_{X \times^h X}(U) \rightarrow \mathbb{L}_{X \times_F^h X}(U),$$

de sorte qu'on ait le triangle distingué

$$\mathbb{L}_{X \times^h X}(U) \rightarrow \mathbb{L}_{X \times_F^h X}(U) \rightarrow \Sigma \tilde{\mathbb{L}} \rightarrow$$

de $\mathbf{QCoh}(U)$.

Pour $M \in \mathbf{QCoh}(U)$, en appliquant le foncteur $\mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{QCoh}(U)}(-, M)$, on obtient la suite fibre (homotopique)

$$\mathbb{R}\mathrm{Map}(\Sigma \tilde{\mathbb{L}}, M) \rightarrow \mathbb{R}\mathrm{Map}(\mathbb{L}_{X \times_F^h X}(U), M) \rightarrow \mathbb{R}\mathrm{Map}(\mathbb{L}_{X \times^h X}(U), M)$$

et $\mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{QCoh}(U)}(\Sigma \tilde{\mathbb{L}}, M)$ est naturellement équivalente à $\Omega \mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{QCoh}(U)}(\tilde{\mathbb{L}}, M)$. On en déduit l'équivalence naturelle :

$$\Omega \mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{QCoh}(U)}(\tilde{\mathbb{L}}, M) \simeq \Omega \mathbb{D}er_F(U, M).$$

$\mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{QCoh}(U)}(\tilde{\mathbb{L}}, M)$ est défini pour tout $M \in \mathbf{QCoh}(U)$ (sans hypothèse de connexité) et l'équivalence naturelle

$$\Omega \mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{QCoh}(U)}(\tilde{\mathbb{L}}, \Sigma M) \simeq \mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{QCoh}(U)}(\tilde{\mathbb{L}}, M)$$

montre que $\mathbb{R}\mathrm{Map}_{\mathbf{QCoh}(U)}(\tilde{\mathbb{L}}, M)$ est un espace de lacets infinis (au fait un espace d'Eilenberg-MacLane généralisé).

Remarque 2.8.  Il ne me paraît pas évident qu'on dispose en général de l'équivalence faible

$$\Omega \mathbb{D}er_F(U, \Sigma M) \simeq \mathbb{D}er_F(U, M).$$

Pour F un champ n -géométrique, on peut contourner ce problème, en remplaçant $\mathbb{D}er_F(U, M)$ par sa stabilisation (cf. l'hypothèse de stabilité de [TV08, Proposition 1.4.1.11]).

Modulo ce détail technique, on conclut :

Proposition 2.9. Soient F, x, u comme ci-dessus. Alors

- (1) $\Sigma \mathbb{L}_{F, x}$ est représenté par un complexe de $\mathfrak{Mod}_{\mathcal{O}_X}^+$;
- (2) $\tilde{\mathbb{L}} \cong \mathbb{L}_{F, u} \in \mathbf{QCoh}(U)$, où $u : U \rightarrow F$ est la composition $U \rightarrow X \times_F^h X \rightarrow F$.

Pour construire $\mathbb{L}_F \in \mathbf{QCoh}(F)$, il faut établir la cohérence de cette construction. Considérons un morphisme $Z \rightarrow X$ de $\mathfrak{Aff}_{\mathbb{k}}/F$. On lui associe le carré homotopiquement cartésien de $\mathfrak{Aff}_{\mathbb{k}}/F$:

$$\begin{array}{ccc} Z \times_F^h Z & \longrightarrow & Z \times^h Z \\ \downarrow & \lrcorner h & \downarrow \\ X \times_F^h X & \longrightarrow & X \times^h X. \end{array}$$

Alors, pour $U \rightarrow Z \times_F^h Z$ de $\mathfrak{Aff}_{\mathbb{k}}$, on obtient le carré homotopiquement co-cartésien à gauche du diagramme de triangles distingués dans $\mathbf{QCoh}(U)$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{L}_{X \times^h X}(U) & \longrightarrow & \mathbb{L}_{X \times_F^h X}(U) & \longrightarrow & \Sigma \tilde{\mathbb{L}}_X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \mathbb{L}_{Z \times^h Z}(U) & \longrightarrow & \mathbb{L}_{Z \times_F^h Z}(U) & \longrightarrow & \Sigma \tilde{\mathbb{L}}_Z \end{array}$$

ce qui fournit l'équivalence entre les cofibres.

Remarque 2.10.  Pour démontrer le résultat suivant, il faut rigidifier la construction précédente.

Corollaire 2.11. *Soit F un champ dérivé 0-géométrique. Alors les $\mathbb{L}_{F,u}$ se recollent pour définir le complexe cotangent*

$$\mathbb{L}_F \in \mathbf{QCoh}(F).$$

Exemple 2.12. Considérons le cas de BG , G un groupe algébrique affine lisse. Alors, le morphisme $* \rightarrow BG$ fournit un 0-atlas de BG (essentiellement puisque tout G -fibré principal sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{k})$ est trivial). Le produit fibré homotopique

$$* \times_{BG}^h *$$

est représentable et s'identifie avec G (la structure de groupe correspond à celle provenant de l'espace de lacets via $\Omega BG \sim G$).

A l'aide de la construction précédente, on identifie :

$$\mathbb{L}_{BG}(G) \cong \Sigma^{-1} \mathbb{L}_G \in \mathbf{QCoh}(G) \cong \mathfrak{Mod}_{\mathcal{O}_G}.$$

Pour identifier $\mathbb{L}_{BG} \in \mathbf{QCoh}(BG)$, il faut exhiber le G -module qui lui correspond. Pour cela, on utilise que $\Omega_{G/\mathbb{k}}$ est non-seulement un $\mathcal{O}_G$ -module mais également un $\mathcal{O}_G$ -comodule et que ces deux structures sont compatibles. Par exemple, en tant que $\mathcal{O}_G$ -module,

$$\Omega_{G/\mathbb{k}} \cong \mathcal{O}_G \otimes \mathfrak{g}^*$$

où $\mathfrak{g}^* = \mathbb{k} \otimes_{\mathcal{O}_G} \Omega_{G/\mathbb{k}}$ (dual à l'algèbre de Lie des dérivations). Le G -module associé est $\mathfrak{g}^*$, muni de l'action coadjointe. Ainsi, $\mathbb{L}_{BG} \cong \Sigma^{-1} \mathfrak{g}^*$.

3. L'ALGÈBRE $\mathbf{DR}^{int}$ DE DE RHAM

On présente ici une simplification du matériel de [CPT⁺15, Sections 1.1-1.3], adaptée au cas qui nous intéresse.

3.1. Complexes mixtes.

Notation 3.1. Pour alléger la notation, on écrit $\mathfrak{M}$ pour la catégorie de modèle $\mathcal{Ch}_{\mathbb{k}}$ (donc *fibrante*), munie de sa structure monoïdale symétrique $\otimes$ habituelle. La catégorie de modèle $\mathfrak{M}$ est *stable*.

Définition 3.2. Soit $\mathfrak{M}^{gr}$ la catégorie $\mathfrak{M}^{\mathbb{Z}}$ (dont les objets sont les suites $(X_n | n \in \mathbb{Z})$ d'objets de $\mathfrak{M}$ et les morphismes les suites de morphismes $\mathbb{Z}$ -indexées) munie de sa structure de modèle *ponctuelle* (qui est donc *fibrante*) et de la structure symétrique monoïdale

$$(X \otimes Y)_n := \coprod_{i+j=n} X_i \otimes Y_j$$

où la symétrie est induite par $\tau : X_i \otimes Y_j \xrightarrow{\cong} Y_j \otimes X_i$ provenant de $\mathfrak{M}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, le foncteur d'évaluation $\text{eval}_n : \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}$ envoie $(X_t | t \in \mathbb{Z}) = X_n$; le foncteur d'inclusion $\iota_n : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$ envoie Y à l'objet

$$(\iota_n Y)_t = \begin{cases} Y & t = n \\ 0 & t \neq n. \end{cases}$$



Exercice 3.3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que ι_n est à la fois l'adjoint à gauche et à droite du foncteur eval_n .

La catégorie $\mathfrak{M}^{gr}$ est munie du foncteur de décalage :

$$(\cdot)(-1)[1] : \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$$

qui envoie l'objet (X_n) à $(X_{n+1}[1])$ (i.e. $(X(-1)[1])_n = X_{n+1}[1]$).

Remarque 3.4. Ce foncteur ne respecte pas la structure monoïdale, mais on dispose d'isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} (X \otimes Y)(-1)[1] &\cong X \otimes (Y(-1)[1]) \\ &\cong X(-1)[1] \otimes Y. \end{aligned}$$

Définition 3.5. Soit $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ la catégorie dont les objets sont les couples (X, ϵ) ou

- (1) X est un objet de $\mathfrak{M}^{gr}$;
- (2) ϵ est un morphisme $X \xrightarrow{\epsilon} X(-1)[1]$ tel que $\epsilon(-1)[1] \circ \epsilon = 0$.

Un morphisme $(X, \epsilon) \rightarrow (Y, \eta)$ est un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathfrak{M}^{gr}$ qui fait commuter

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\epsilon} & X(-1)[1] \\ f \downarrow & & \downarrow f(-1)[1] \\ Y & \xrightarrow{\eta} & Y(-1)[1]. \end{array}$$

Le foncteur oubli $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$ oublie le morphisme structural ϵ et le foncteur $\epsilon = 0 : \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ envoie $X \mapsto (X, 0)$.



Exercice 3.6. Montrer que le foncteur $\epsilon = 0 : \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ est pleinement fidèle et qu'il est une section du foncteur oubli $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$.

Exemple 3.7. Soit $\mathbb{1} \in \mathfrak{M}$ l'objet unité de la structure symétrique monoïdale. Alors l'objet $\mathbb{1}_\epsilon \in \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ est donné par $(\mathbb{1}_\epsilon)_0 = \mathbb{1}$, $(\mathbb{1}_\epsilon)_1 = \mathbb{1}[-1]$, tous les autres composantes étant 0. Le morphisme de structure est induit par le morphisme identité de $\mathbb{1}$.

Proposition 3.8. La catégorie $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ possède une structure symétrique monoïdale fermée pour laquelle le foncteur oubli

$$\epsilon - \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$$

est symétrique monoïdale. Explicitement, le morphisme de structure de $(X, \epsilon) \otimes (Y, \eta)$ est $\epsilon \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \eta$, interprété à l'aide des isomorphismes de la Remarque 3.4.



Démonstration. (Exercice!) Le décalage $[1]$ dans la définition de $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ est introduite précisément pour que ce résultat soit valable ; le point à vérifier est que $\epsilon^2 = 0$ sur le produit tensoriel. Pour le hom interne, voir [CPT⁺15, page 17]. $\square$

Corollaire 3.9. Le foncteur oubli $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$ admet comme adjoint à gauche le foncteur

$$\mathfrak{M}^{gr} \xrightarrow{\epsilon=0} \epsilon - \mathfrak{M}^{gr} \xrightarrow{-\otimes \mathbb{1}_\epsilon} \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}.$$

Free_ϵ

Démonstration. Exercice. □ 

Théorème 3.10. *La catégorie $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ possède une structure de catégorie de modèle monoidale pour laquelle l'adjonction*

$$\text{Free}_\epsilon : \mathfrak{M}^{gr} \rightleftarrows \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$$

est une adjonction de Quillen. Explicitement, les fibrations² et les équivalences faibles sont détectées par le foncteur oubli $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr} \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$.

Remarque 3.11.  Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $\mathbb{k}(n) := \iota_n \mathbb{k} \in \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$. L'objet $\mathbb{k}(n)$ n'est pas cofibrant ; un remplacement cofibrant $Q\mathbb{k}(n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}(n)$ est indiqué par le bicomplexe (attention aux décalages qui doivent être introduits)

$$\begin{array}{ccc} & & \vdots \\ & & \downarrow \\ & \mathbb{k} & \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{k} \\ & \downarrow & \\ \mathbb{k} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{k}, \end{array}$$

do sorte que

$$(Q\mathbb{k}(n))_i = \begin{cases} 0 & i < n \\ \mathbb{k} & i = n \\ \mathbb{k}_0 \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{k}_{-1} & i > n. \end{cases}$$

De plus, on dispose de l'inclusion

$$\text{Free}_\epsilon \mathbb{k}(n) \hookrightarrow Q\mathbb{k}(n)$$

dont la composition avec $Q\mathbb{k}(n) \rightarrow \mathbb{k}(n)$ est la projection canonique $\text{Free}_\epsilon \mathbb{k}(n) \rightarrow \mathbb{k}(n)$.

3.2. Algèbres commutatives. La catégorie $\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ étant symétrique monoidale, on peut considérer sa catégorie $\text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr})$ de monoïdes commutatifs et unitaires, munie du foncteur oubli

$$\text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}) \rightarrow \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}.$$

Théorème 3.12. *La catégorie $\text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr})$ (respectivement $\text{Comm}(\mathfrak{M}^{gr})$) est une catégorie de modèle telle que les fibrations et les équivalences faibles sont détectées par le foncteur oubli $\text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}) \rightarrow \epsilon - \mathfrak{M}^{gr}$ (resp. $\text{Comm}(\mathfrak{M}^{gr}) \rightarrow \mathfrak{M}^{gr}$).*

Démonstration. Cela découle par exemple de [Lur14, Proposition 4.5.4.6]. □

Le foncteur eval_0 d'évaluation à 0 induit un foncteur

$$\text{eval}_0 : \text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}) \rightarrow \text{Comm}(\mathfrak{M}) = \text{cdga}_{\mathbb{k}}$$

$$(A_n) \mapsto A_0.$$

Théorème 3.13. *Le foncteur $\text{eval}_0 : \text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}) \rightarrow \text{Comm}(\mathfrak{M}) = \text{cdga}_{\mathbb{k}}$ admet un adjoint à gauche*

$$\mathbf{DR}^{int} : \text{cdga}_{\mathbb{k}} \rightleftarrows \text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}),$$

le foncteur algèbre de de Rham interne. L'adjonction

$$\mathbf{DR}^{int} : \text{cdga}_{\mathbb{k}} \rightleftarrows \text{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr}) : \text{eval}_0$$

est une adjonction de Quillen.

2. typo dans [CPT⁺15, page 16] ?

Explicitement, pour $A \in \mathbf{cdga}_{\mathbb{k}}$, l'objet gradué de $\mathrm{Comm}(\mathfrak{M}^{gr})$ sous-jacent de $\mathbf{DR}^{int}(A)$ est :

$$\begin{aligned} \mathbf{DR}^{int}(A)_t &\cong \mathbb{S}_A^t(\Omega_{A/\mathbb{k}}[-1]) \\ &\cong (\Lambda_A^t \Omega_{A/\mathbb{k}})[-t] \end{aligned}$$

muni du morphisme ϵ de structure induit par la dérivation universelle $d : A \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{k}}$. 

Démonstration. (Exercice!) Le point clé est le suivant : soit $(A_n) \in \mathrm{Comm}(\epsilon - \mathfrak{M}^{gr})$; la structure multiplicative entraîne que A_1 est un A_0 -module et que le morphisme de structure $\epsilon : A_0 \rightarrow A_1[1]$ est une dérivation, donc induit un morphisme $\Omega_{A_0/\mathbb{k}} \rightarrow A_1$ de A_0 -modules. $\square$

RÉFÉRENCES

- [CPT⁺15] D. Calaque, T. Pantev, B. Toën, M. Vaquié, and G. Vezzosi, *Shifted Poisson Structures and Deformation Quantization*, ArXiv e-prints (2015).
- [Lur] Jacob Lurie, *DAG V, IX*, Disponible à <http://www.math.harvard.edu/~lurie/>.
- [Lur14] ———, *Higher algebra*, Prépublication d'un livre, disponible à <http://www.math.harvard.edu/~lurie/>, 2014.
- [PTVV13] Tony Pantev, Bertrand Toën, Michel Vaquié, and Gabriele Vezzosi, *Shifted symplectic structures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 271–328. MR 3090262
- [Toë12] Bertrand Toën, *Derived Azumaya algebras and generators for twisted derived categories*, Invent. Math. **189** (2012), no. 3, 581–652. MR 2957304
- [TV08] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry. II. Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224. MR 2394633 (2009h :14004)