

SUR LES ALGÈBRES DIFFÉRENTIELLES GRADUÉES COMMUTATIVES

GEOFFREY POWELL

TABLE DES MATIÈRES

1. Objectifs	1
2. Complexes de chaîne	2
3. Algèbres différentielles graduées commutatives	3
4. Enrichissement simplicial	6
Annexe A. Algèbres simpliciales	8
Références	9

On fixe R un anneau commutatif, unitaire. Pour les applications à la théorie homotopique des algèbres différentielles graduées commutatives, on supposera de plus que $\mathbb{Q} \subset R$.

Dans ces notes, on utilise la notation *homologique*, tandis que [PTVV13] utilise la notation *cohomologique*.



1. OBJECTIFS

L'objectif est d'introduire la catégorie des *schémas affines dérivés* (à la Toën-Vezzosi [TV08]), telle qu'elle est utilisée dans [PTVV13].

L'avantage principal du cadre *dérivé* est qu'il nous permet de former des résolutions par des objets construits à partir d'algèbres lisses. Ceci est important :

- (1) en théorie des déformations (introduction du *complexe cotangent*) ;
- (2) pour la théorie (co)homologique des anneaux commutatifs, la *cohomologie d'André-Quillen* ;
- (3) en étudiant les intersections (les *limites homotopiques* se comportent mieux).

(Voir [Toë14, Section 1] ou [Cal14] pour un survol de cette motivation.)

Rappelons que, en géométrie algébrique classique, la catégorie des schémas affines est équivalente à l'opposée de la catégorie des anneaux commutatifs. La catégorie des schémas affines dérivés est en fait une ∞ -catégorie, plus précisément la $(\infty, 1)$ -catégorie associée à une catégorie de modèle.

Si $\mathbb{Q} \subset R$, la catégorie sous-jacente est

$$\mathfrak{d}\mathcal{A}ff_R \sim (\mathfrak{cdga}_R^+)^{\text{op}}$$

où $\mathfrak{cdga}_R^+$ est la catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives concentrées en degrés (homologiques) non-négatifs. Pour rendre ceci plus précis, il faut introduire la structure homotopique de $\mathfrak{cdga}_R^+$.

2. COMPLEXES DE CHAÎNE

Soit $\mathcal{C}h_R$ la catégorie des complexes de chaîne de R -modules ($\mathbb{Z}$ -gradués, notation *homologique*, différentiel de degré -1 , morphismes de degré 0); $(\mathcal{C}h_R, \otimes, \mathbb{1})$ est une catégorie symétrique monoïdale, où $\mathbb{1}$ est le module R , considéré comme complexe concentré en degré 0 et $\otimes$ est le produit tensoriel habituel :

$$(X \otimes Y)_n := \bigoplus_i X_i \otimes_R Y_{n-i}$$

$$d(x \otimes y) = (dx) \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes dy.$$

La symétrie $\tau : X \otimes Y \xrightarrow{\tau} Y \otimes X$ introduit les *signes de Koszul* :

$$\tau(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x.$$

Notation 2.1. Soit $\mathcal{C}h_R^+ \subset \mathcal{C}h_R$ la sous-catégorie pleine des complexes $\mathbb{N}$ -gradués ($X_n = 0$ si $n < 0$).

Remarque 2.2. La structure symétrique monoïdale se restreint à une structure symétrique monoïdale $(\mathcal{C}h_R^+, \otimes, \mathbb{1})$.

L'inclusion $i : \mathcal{C}h_R^+ \hookrightarrow \mathcal{C}h_R$ admet un adjoint à droite $t^+ :$

$$i : \mathcal{C}h_R^+ \rightleftarrows \mathcal{C}h_R : t^+,$$

où t^+ est la *troncature intelligente* :

$$(t^+ X)_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \ker d_0 & n = 0 \\ X_n & n > 0. \end{cases}$$

Théorème 2.3. [Hov99] Les catégories $\mathcal{C}h_R^+$ et $\mathcal{C}h_R$ admettent les structures de modèle suivantes :

- (1) $\mathcal{C}h_R : \mathcal{W} = \text{quasi-isomorphismes} ; \mathcal{Fib} = \text{surjections} ;$
- (2) $\mathcal{C}h_R^+ : \mathcal{W} = \text{quasi-isomorphismes} ; \mathcal{Fib} = \text{surjections en degrés strictement positifs}.$

Par rapport à ces structures, l'adjonction $i \dashv t^+$ est une adjonction de Quillen¹.

Remarque 2.4. Il s'agit de la structure de modèle *projective* sur $\mathcal{C}h_R$. La catégorie homotopique $\text{Ho}(\mathcal{C}h_R)$ associée est un modèle pour la catégorie dérivée $\mathcal{D}(R)$ non-bornée de la catégorie des R -modules.

Notation 2.5. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soient $R[n] \in \mathcal{C}h_R$ le complexe R concentré en degré n et $D[n]$ le complexe concentré en degrés $n, n-1$:

$$\dots 0 \rightarrow R \xrightarrow{\text{id}} R \rightarrow 0 \dots$$

de sorte qu'il existe une suite exacte courte de complexes :

$$0 \rightarrow R[n-1] \rightarrow D[n] \rightarrow R[n] \rightarrow 0.$$

Exercice 2.6. Montrer que, pour $X \in \mathcal{C}h_R$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}h_R}(D[n], X) &\cong X_n \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}h_R}(R[n], X) &\cong \ker d_n \end{aligned}$$

et que la surjection $D[n] \twoheadrightarrow R[n]$ induit l'inclusion $\ker d_n \hookrightarrow X_n$.

Exercice 2.7. Soit $f : C \rightarrow C'$ un morphisme de $\mathcal{C}h_R$. Montrer que :

1. t^+ envoie une surjection sur un morphisme surjectif en degrés strictement positifs et préserve les quasi-isomorphismes

- (1) tout carré commutatif de la forme suivante admet un relèvement (en pointillés) :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & C \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ D[n] & \longrightarrow & C' \end{array}$$

si et seulement si $C_n \rightarrow C'_n$ est surjectif ;

- (2) tout carré commutatif de la forme suivante admet un relèvement (en pointillés) :

$$\begin{array}{ccc} R[n-1] & \longrightarrow & C \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ D[n] & \longrightarrow & C' \end{array}$$

si et seulement si, $\forall (x \in C'_n, z \in C_{n-1})$ tels que $dz = 0$ et $f(z) = dx$, il existe $\tilde{x} \in C'_n$ tel que $f(\tilde{x}) = x$ et $d\tilde{x} = z$.

Notation 2.8. Soient I, J les ensembles de morphismes de $\mathcal{C}h_R$ suivants :

$$\begin{aligned} I &:= \{R[n-1] \rightarrow D[n] \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ J &:= \{0 \rightarrow D[n] \mid n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

et I^+, J^+ les ensembles de morphismes de $\mathcal{C}h_R^+$:

$$\begin{aligned} I^+ &:= \{R[n-1] \rightarrow D[n] \mid 0 < n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0 \rightarrow R[0]\} \\ J^+ &:= \{0 \rightarrow D[n] \mid 0 < n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Remarque 2.9. Les morphismes de I, I^+ sont des *cofibrations* et les morphismes de J, J^+ sont des *cofibrations triviales* (en particulier des quasi-isomorphismes).

Théorème 2.10. [Hov99] *La structure de modèle sur $\mathcal{C}h_R$ est cofibremment engendrée par (I, J) :*

- (1) $\mathcal{F}ib = J^\heartsuit$;
- (2) $\mathcal{F}ib \cap \mathcal{W} = I^\heartsuit$.

Idem pour $\mathcal{C}h_R^+$ par rapport à (I^+, J^+) .

Démonstration. Exercice (en admettant l'existence des structures de modèle). $\square$

3. ALGÈBRES DIFFÉRENTIELLES GRADUÉES COMMUTATIVES

Définition 3.1. Soient $\mathcal{C}dga_R$ (respectivement $\mathcal{C}dga_R^+$) la catégorie des monoïdes unitaires, commutatifs de $\mathcal{C}h_R$ (resp. $\mathcal{C}h_R^+$) et $\mathcal{C}dga_R \rightarrow \mathcal{C}h_R$ (resp. $\mathcal{C}dga_R^+ \rightarrow \mathcal{C}h_R^+$) le foncteur oubli de structure.

Remarque 3.2. Un objet de $\mathcal{C}dga_R$ est une algèbre différentielle graduée commutative (unitaire) A , donc une algèbre unitaire $\mathbb{Z}$ -graduée dont le produit est commutatif :

$$ab = (-1)^{|a||b|}ba,$$

munie d'une différentielle d qui est une dérivation :

$$d(ab) = (da)b + (-1)^{|a|}a(db).$$

Cette structure est encodée par les morphismes de structure dans $\mathcal{C}h_R$

$$\begin{aligned} \eta &: \mathbb{1} \rightarrow A \\ \mu &: A \otimes A \rightarrow A \end{aligned}$$

qui munissent A d'une structure de monoïde *commutatif*.

Remarque 3.3. La catégorie $\mathbf{cdga}_R^+$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{cdga}_R$ des objets dont le complexe sous-jacent appartient à $\mathcal{Ch}_R^+$.

Exercice 3.4. Montrer que l'adjonction $i \dashv t^+$ induit une adjonction

$$i : \mathbf{cdga}_R^+ \rightleftarrows \mathbf{cdga}_R : t^+.$$

Notation 3.5. Soit $\mathbb{S} : \mathcal{Ch}_R \rightarrow \mathbf{cdga}_R$ le foncteur *monoïde commutatif libre*, qui se restreint à un foncteur :

$$\mathbb{S} : \mathcal{Ch}_R^+ \rightarrow \mathbf{cdga}_R^+.$$

Remarque 3.6. Par définition, $\mathbb{S} : \mathcal{Ch}_R \rightarrow \mathbf{cdga}_R$ est l'adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathbf{cdga}_R \rightarrow \mathcal{Ch}_R$ (idem pour $\mathbf{cdga}_R^+$).

Exercice 3.7. Décrire le foncteur $\mathbb{S}$ explicitement.

Proposition 3.8. La catégorie $\mathbf{cdga}_R$ (respectivement $\mathbf{cdga}_R^+$) est complet et co-complet. En particulier

- (1) son objet initial est $\mathbb{1}$ et son objet final 0 ;
- (2) le coproduit de $A, B \in \mathbf{cdga}_R$ est $A \otimes B$ et le produit $A \oplus B$.

Théorème 3.9. Supposons que $\mathbb{Q} \subset R$. Alors $\mathbf{cdga}_R$ (respectivement $\mathbf{cdga}_R^+$) est munie d'une structure de modèles dont les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les surjections (resp. les morphismes surjectifs en degrés strictement positifs).

De plus, les adjonctions :

$$\begin{aligned} \mathbb{S} : \mathcal{Ch}_R &\rightleftarrows \mathbf{cdga}_R \\ \mathbb{S} : \mathcal{Ch}_R^+ &\rightleftarrows \mathbf{cdga}_R^+ \end{aligned}$$

sont des adjonctions de Quillen et l'adjonction de troncation :

$$\mathbf{cdga}_R^+ \rightleftarrows \mathbf{cdga}_R : t^+$$

est également une adjonction de Quillen.

Démonstration. Pour la démonstration pour des algèbres différentielles graduées commutatives concentrées en degrés non-positifs, voir [BG76], [GM03, Section V.3].

Voir [Lur14, Proposition 7.4.1.10] pour le cas $\mathbb{Z}$ -graduée. $\square$

Remarque 3.10. Tout objet de $\mathbf{cdga}_R$ (respectivement $\mathbf{cdga}_R^+$) est fibrant.

Exemple 3.11. Supposons $\mathbb{Q} \subset R$. Soit $0 < n \in \mathbb{N}$; l'inclusion $R[n-1] \hookrightarrow D[n]$ de I^+ induit une cofibration génératrice

$$\mathbb{S}(R[n-1]) \hookrightarrow \mathbb{S}(D[n]).$$

Soient $A \in \mathbf{cdga}_R^+$; un morphisme $\alpha : \mathbb{S}(R[n-1]) \rightarrow A$ est équivalente à la donnée d'un cycle dans A_{n-1} (qu'on notera α , par abus de notation). La somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}(R[n-1]) & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}(D[n]) & \xrightarrow{\quad \quad} & A \otimes_{\mathbb{S}(R[n-1])} \mathbb{S}(D[n]) \end{array}$$

fournit l'algèbre différentielle graduée :

$$A \otimes_{\mathbb{S}(R[n-1])} \mathbb{S}(D[n]) \cong (A \otimes \mathbb{S}(y_n), d),$$

où A est un sous-objet, $|y_n| = n$ et $dy_n = \alpha$ (par abus de notation).

La cofibration

$$A \mapsto (A \otimes \mathbb{S}(y_n), d)$$

est l'exemple type d'une cofibration de $\mathbf{cdga}_R^+$.

Dans le cas $n = 0$, on considère le morphisme $0 \rightarrow R[0]$, ce qui fournit la cofibration : $0 \mapsto \mathbb{S}(y_0)$ ainsi que

$$A \mapsto (A \otimes \mathbb{S}(y_0), dy_0 = 0).$$

Définition 3.12. Une *extension semi-libre* dans $\mathbf{cdga}_R^+$ est un monomorphisme de $\mathbf{cdga}_R^+$:

$$A \hookrightarrow (A \otimes \mathbb{S}(V), d)$$

où V est un R -module $\mathbb{N}$ -gradué tel que chaque V_n est un R -module libre.

Remarque 3.13. Lorsqu'on travaille dans $\mathbf{cdga}_R$, il faut imposer une condition sur la différentielle, à savoir $V \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V(n)$, où $V(n)$ sont des R -modules $\mathbb{Z}$ -gradués tel que chaque $V(n)_i$ est un R -module libre, et la différentielle envoie :

$$d : V(n) \rightarrow A \otimes \mathbb{S}\left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} V(i)\right).$$

(Il s'agit d'une condition de type *cellulaire*.)

La démonstration du Théorème 3.9 utilise le résultat suivant, qui donne également une caractérisation des cofibrations.

Proposition 3.14. Supposons $\mathbb{Q} \subset R$. Alors

(1) tout morphisme $f : A \rightarrow B$ de $\mathbf{cdga}_R^+$ se factorise en

$$A \mapsto (A \otimes \mathbb{S}(V), d) \xrightarrow{\sim} B;$$

en particulier, tout $B \in \mathbf{cdga}_R^+$ admet une résolution semi-libre

$$(\mathbb{S}(V), d) \xrightarrow{\sim} B;$$

(2) un morphisme est une cofibration si et seulement s'il est rétracté d'une extension semi-libre.

Démonstration. Version algébrique d'approximation cellulaire. □

Notation 3.15. Dénotons par $\mathbf{dAff}_R$ la catégorie homotopique des schémas affines dérivés :

$$(\mathbf{dAff}_R)^{\text{op}} := \text{Ho}(\mathbf{cdga}_R^+) \cong \mathbf{cdga}_R^+[\mathcal{W}^{-1}].$$

(Pour être plus précis, on travaillera avec la ∞ -catégorie associée ; voir la remarque 4.8.)

Exercice 3.16. Montrer que la structure de modèle sur $\mathbf{cdga}_R$ (respectivement $\mathbf{cdga}_R^+$) est cofibremment engendrée

- (1) cofibrations génératrices : $\mathbb{S}(I)$ (respectivement $\mathbb{S}(I^+)$);
- (2) cofibrations triviales génératrices : $\mathbb{S}(J)$ (resp. $\mathbb{S}(J^+)$).

Remarque 3.17. Les résolutions semi-libres jouent le rôle de *résolutions lisses*. Comparer la définition d'un morphisme *formellement lisse*, qui est également donnée par une propriété de relèvement.

Exemple 3.18. Soit B le quotient de la R -algèbre commutative A par une suite régulière $x_1, \dots, x_n$. Alors le complexe de Koszul :

$$(A \otimes \mathbb{S}(y_i), dy_i = x_i),$$

où $|y_i|$ s'identifie à l'algèbre $A \otimes \Lambda(y_i)$ et fournit une factorisation de la projection $A \twoheadrightarrow B$ (considérée dans $\mathbf{cdga}_R^+$ en degré 0)

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & (A \otimes \mathbb{S}(y_i), dy_i = x_i) \\ & \searrow & \downarrow \simeq \\ & & B \end{array}$$

en particulier, si $\mathbb{Q} \subset R$, ceci fournit une factorisation dans la structure de modèle $\xrightarrow{\sim} \twoheadrightarrow$.

4. ENRICHISSEMENT SIMPLICIAL

Rappelons que les espaces affines $n \mapsto \mathbb{A}^n$ forment un objet cosimplicial de la catégorie des schémas affines. Cette structure peut être comprise de la manière suivante ; on dispose du schéma affine cosimplicial :

$$\mathbb{A}^1 \rightrightarrows \mathbb{A}^2 \rightrightarrows \mathbb{A}^3 \dots\dots\dots$$

où $\mathbb{A}^1 \rightrightarrows \mathbb{A}^2$ sont induits par les projections $R[t_1, t_2] \hookrightarrow R[t]$, $t_i \mapsto 0$, $i \in \{1, 2\}$, et $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^1$ par la diagonale $R[t] \rightarrow R[t_1, t_2]$, $t \mapsto t_1 + t_2$.

On considère $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$ induit par la projection

$$R[t_1, \dots, t_{n+1}] \twoheadrightarrow R[t_1, \dots, t_{n+1}] / (1 - \sum t_i) \cong R[t_1, \dots, t_n].$$

Ceci induit l'objet cosimplicial recherché ; par exemple

$$\mathbb{A}^0 \rightrightarrows \mathbb{A}^1$$

correspond au diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{t \mapsto 0} & \\ R & \xrightleftharpoons[t \mapsto 1]{} & R[t] \end{array}$$

de R -algèbres.

Définition 4.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit Ω^n l'algèbre différentielle graduée commutative de $\mathbf{cdga}_R$:

$$\Omega^n := (\mathbb{S}(t_i, dt_i | 1 \leq i \leq n+1) / (1 - \sum t_i, \sum dt_i), d(t_i) = dt_i)$$

où $|t_i| = 0$ et $|dt_i| = -1$.

Proposition 4.2.

- (1) Les algèbres différentielles commutatives Ω^n forment un objet simplicial $n \mapsto \Omega^n$ de $\mathbf{cdga}_R$.
- (2) Si $\mathbb{Q} \subset R$, alors $R \rightarrow \Omega^n$ est une équivalence faible. De plus Ω^n est semi-libre, en particulier $R \xrightarrow{\sim} \Omega^n$ est une cofibration triviale.

Exemple 4.3. Supposons $\mathbb{Q} \subset R$. Pour $n = 1$, $\Omega^1 \cong \mathbb{S}(t, dt)$. Les morphismes de structure simpliciaux sont

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{S}(t, dt) \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \text{ } \\ & & R, \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \begin{array}{c} \text{ } \\ t \mapsto 0 \\ t \mapsto 1 \end{array}$$

où les morphismes verticaux envoient $dt \mapsto 0$.

Soit $A \in \mathbf{cdga}_R$, en prenant le produit tensoriel $- \otimes A$, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\simeq} & \Omega^1 \otimes A \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \\ & & A, \end{array}$$

qui exhibe $A \rightarrow \Omega^1 \otimes A$ comme un *très bon objet chemin*² de $\mathbf{cdga}_R$. En particulier, ceci peut être utilisé pour définir la relation d'homotopie (à droite).

Si $A \in \mathbf{cdga}_R^+$, on peut adapter cette construction à $\mathbf{cdga}_R^+$, en appliquant la troncation à $A \otimes \Omega^1$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\simeq} & t^+(\Omega^1 \otimes A) \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \\ & & A. \end{array}$$

Le morphisme $A \rightarrow t^+(\Omega^1 \otimes A)$ est une équivalence faible mais n'est plus en général une cofibration, donc $t^+(\Omega^1 \otimes A)$ n'est qu'un *bon objet chemin*. On peut toujours s'en servir pour définir la notion d'homotopie à droite.

Proposition 4.4. [BG76] La catégorie $\mathbf{cdga}_R$ est enrichie en ensembles simpliciaux par la structure suivante :

$$\text{Map}(A, B) := \text{Hom}_{\mathbf{cdga}_R}(A, \Omega^\bullet \otimes B),$$

muni de la structure simpliciale provenant de celle de $\Omega^\bullet$ ³. La composition est fournie par la composition dans la catégorie des Ω^n -algèbres.

Cet enrichissement se restreint à $\mathbf{cdga}_R^+$, de sorte que

$$\mathbf{cdga}_R^+ \hookrightarrow \mathbf{cdga}_R$$

est une sous-catégorie enrichie pleine. En particulier, pour $A, B \in \mathbf{cdga}_R^+$, on a :

$$\text{Map}(A, B) := \text{Hom}_{\mathbf{cdga}_R^+}(A, t^+(\Omega^\bullet \otimes B)),$$

Démonstration. Exercice ! (La structure simpliciale découle de celle décrite plus haut.) □

Démonstration. Voir [BG76], [GM03, Section V.3] pour le cas des algèbres différentielles graduées commutatives concentrées en degrés non-positifs ; l'argument s'adapte au cas $\mathbf{cdga}_R$. □

Remarque 4.5. Un élément de $\text{Map}(A, B)_1$ correspond à une *homotopie à droite* entre les deux composées

$$A \rightarrow \Omega^1 \otimes B \rightrightarrows B.$$

Exemple 4.6. Supposons $\mathbb{Q} \subset R$. Alors $t^+\Omega^n \cong R$ et $n \mapsto t^+(\Omega^n)$ est l'objet simplicial constant. Ainsi, pour $A \in \mathbf{cdga}_R^+$, $\text{Map}(A, R)$ est l'ensemble simplicial constant de valeur $\text{Hom}_{\mathbf{cdga}_R}(A, R)$.

Remarque 4.7. Le foncteur $\text{Map}(A, B)$ ne se comporte pas bien par rapport aux équivalences faibles si A n'est pas cofibrant. Par exemple, prenons $R = \mathbb{Q}$ et $A = \mathbb{Q}[x]/x^t$, pour $1 < t \in \mathbb{N}$, $|x| = 0$. L'algèbre A admet la résolution cofibrante :

$$B := (\mathbb{S}(x, y), dy = x^t) \xrightarrow{\sim} A = \mathbb{Q}[x]/x^t,$$

où $|y| = 1$.

2. c'est à dire que $A \xrightarrow{\sim} \Omega^1 \otimes A$ est une cofibration triviale et le morphisme $\Omega^1 \otimes A \rightarrow A \oplus A$ une fibration

3. $\text{Map}(A, B)_n := \text{Hom}_{\mathbf{cdga}_R}(A, \Omega^n \otimes B) \cong \text{Hom}_{\Omega^n / \mathbf{cdga}_R}(\Omega^n \otimes A, \Omega^n \otimes B)$

Considérons l'application :

$$\mathrm{Map}(A, B) \rightarrow \mathrm{Map}(A, A)$$

d'ensembles simpliciaux, induite par $B \twoheadrightarrow A$.

On vérifie que $\mathrm{Map}(A, A)$ est l'ensemble simplicial constant de valeur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cdga}_R}(A, A)$ (essentiellement puisque A est concentré en degré zéro). Pour comprendre $\mathrm{Map}(A, B)$, on considère pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cdga}_R}(\mathbb{Q}[x]/x^t, \mathbb{S}(x, y) \otimes \Omega^n).$$

On a que $(\mathbb{S}(x, y) \otimes \Omega^n)^0$ est le $\mathbb{Q}[x, t_i]$ -module engendré par les éléments $1, ydt_i$ $i \in \{1, \dots, n\}$. Le sous $\mathbb{Q}[x]$ -module des cycles est engendré par les éléments 1 et $(\frac{1}{n+1}xt_i^{n+1} - yt_i^n dt_i)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Ce module ne contient aucun élément nilpotent, donc $\mathrm{Map}(A, B)$ est l'ensemble simplicial constant de valeur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cdga}_R}(\mathbb{Q}[x]/x^t, \mathbb{Q})$ (c'est à dire $x \mapsto 0$).

L'application $\mathrm{Map}(A, B) \rightarrow \mathrm{Map}(A, A)$ n'est pas une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

Remarque 4.8. Au lieu de travailler avec la catégorie homotopique de cdga_R^+ , on peut retenir plus d'informations (la philosophie des ∞ -catégories) en considérant la catégorie enrichie en ensembles simpliciaux $\mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{I}\mathcal{F}_R^{\mathrm{op}}$ (par abus de notation !) dont :

- les objets sont les algèbres semi-libres de cdga_R^+ ;
- l'enrichissement est fourni par celui de cdga_R .

Par la remarque 4.5, cette catégorie retient tous les renseignements de $\mathrm{Ho}(\mathrm{cdga}_R^+)$.

ANNEXE A. ALGÈBRES SIMPLICIALES

Lorsque R n'est pas de caractéristique 0, on ne peut plus utiliser cdga_R^+ pour modéliser les schémas affines dérivés. Deux solutions se présentent :

- (1) utiliser les E_∞ -algèbres ;
- (2) utiliser les anneaux commutatifs simpliciaux (c'est le modèle utilisé par Toën et Vezzosi [TV08, Chapitre 2.2]).

Notation A.1. Pour R un anneau commutatif, soient $\mathcal{M}\mathcal{O}\mathcal{D}_R$ la catégorie des R -modules, $\mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{G}_R$ la catégorie des R -algèbres commutatives et $\Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{G}_R$ la catégorie des R -algèbres commutatives simpliciales.

Remarque A.2. Le foncteur oubli $\mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{G}_R \rightarrow \mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{S}$ induit un foncteur oubli :

$$\Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{G}_R \rightarrow \Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{S}.$$

Théorème A.3. [Qui67, Section II.4], [GJ09] *La catégorie $\Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{G}_R$ a la structure d'une catégorie de modèle simpliciale telle qu'un morphisme f de $\Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{G}_R$ est une fibration (respectivement équivalence faible) si et seulement s'il en est une dans $\Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{E}\mathcal{N}\mathcal{S}$.*

Remarque A.4. Le fait que $\Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{I}\mathcal{N}\mathcal{G}_R$ possède la structure d'une catégorie de modèle simpliciale rend un peu plus facile la considération de sa $(\infty, 1)$ -catégorie associée.

La relation avec cdga_R^+ provient de l'équivalence de Dold-Kan et son comportement par rapport aux structures monoïdales respectives (voir [SS03]). Rappelons que l'équivalence de Dold-Kan affirme que le foncteur complexe de chaîne normalisé

$$N : \Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{M}\mathcal{O}\mathcal{D}_R \rightarrow \mathcal{C}\mathcal{H}_R^+$$

induit une équivalence de catégories, d'inverse $\Gamma : \mathcal{C}\mathcal{H}_R^+ \rightarrow \Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{M}\mathcal{O}\mathcal{D}_R$. (Voir [Lur14, Chapitre 1] pour une généralisation du théorème de Dold-Kan.)



Remarque A.5. Le foncteur N est lax symétrique monoïdal tandis que Γ n'est que lax monoïdal (par rapport aux structures $\otimes$).

Théorème A.6. [SS03], [TV11, Appendix A] *Le foncteur N induit un foncteur :*

$$N : \Delta^{\text{op}} \mathcal{C}\mathcal{H}\text{ing}_R \rightarrow \text{cdga}_R^+$$

qui admet un adjoint à gauche.

Si $\mathbb{Q} \subset R$, alors cette adjonction forme une équivalence de Quillen.

Corollaire A.7. *Si $\mathbb{Q} \subset R$, alors la ∞ -catégorie associée à la catégorie de modèle simpliciale $\Delta^{\text{op}} \mathcal{C}\mathcal{H}\text{ing}_R$ est un modèle de $(\mathfrak{d}\mathcal{A}\mathfrak{f}\mathfrak{f}_R)^{\text{op}}$ (comme défini précédemment).*

Remarque A.8. Tout l'avantage de $\Delta^{\text{op}} \mathcal{C}\mathcal{H}\text{ing}_R$ est qu'on n'a pas besoin de l'hypothèse de caractéristique 0.

RÉFÉRENCES

- [BG76] A. K. Bousfield and V. K. A. M. Gugenheim, *On PL de Rham theory and rational homotopy type*, Mem. Amer. Math. Soc. **8** (1976), no. 179, ix+94. MR 0425956 (54 #13906)
- [Cal14] Damien Calaque, *Three lectures on derived symplectic geometry and topological field theories*, Indag. Math. (N.S.) **25** (2014), no. 5, 926–947. MR 3264781
- [GJ09] Paul G. Goerss and John F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, Reprint of the 1999 edition [MR1711612]. MR 2840650
- [GM03] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin, *Methods of homological algebra*, second ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. MR 1950475 (2003m :18001)
- [Hov99] Mark Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR 1650134 (99h :55031)
- [Lur14] Jacob Lurie, *Higher algebra*, Prépublication d'un livre, disponible à <http://www.math.harvard.edu/~lurie/>, 2014.
- [PTVV13] Tony Pantev, Bertrand Toën, Michel Vaquié, and Gabriele Vezzosi, *Shifted symplectic structures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 271–328. MR 3090262
- [Qui67] Daniel G. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, No. 43, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967. MR 0223432 (36 #6480)
- [SS03] Stefan Schwede and Brooke Shipley, *Equivalences of monoidal model categories*, Algebr. Geom. Topol. **3** (2003), 287–334 (electronic). MR 1997322 (2004i :55026)
- [Toë14] Bertrand Toën, *Derived algebraic geometry*, EMS Surv. Math. Sci. **1** (2014), no. 2, 153–240. MR 3285853
- [TV08] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry. II. Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224. MR 2394633 (2009h :14004)
- [TV11] ———, *Algèbres simpliciales S^1 -équivariantes, théorie de de Rham et théorèmes HKR multiplicatifs*, Compos. Math. **147** (2011), no. 6, 1979–2000. MR 2862069