

QUELQUES ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE HOMOTOPIQUE

GEOFFREY POWELL

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Espaces topologiques	2
2.1. (Co)limites et homotopie	3
2.2. L^∞ -catégorie des espaces topologiques	4
3. Ensembles simpliciaux	5
3.1. Ingrédients de la théorie d'homotopie des ensembles simpliciaux	6
3.2. L^∞ -catégorie des espaces (encore)	8
4. Complexes de chaîne	8
4.1. L^∞ -catégorie $\mathcal{Ch}\mathcal{A}$	11
Annexe A. Catégories de modèle	11
Références	13

1. INTRODUCTION

Notre objectif est d'introduire quelques éléments d'*algèbre homotopique* qui sont essentiels pour la compréhension de la *géométrie algébrique dérivée* (d'après Toën et Vezzosi [TV05, TV08]), le cadre utilisé dans l'étude des structures symplectiques dérivées [PTVV13] (et des structures de Poisson décalées [CPT⁺15]).

Remarque 1.1. L'approche de Toën et Vezzosi à la géométrie algébrique dérivée utilise les *catégories de modèle*, introduites par Quillen [Qui67] ; ces structures fournissent un cadre dans laquelle on peut faire de la théorie d'homotopie *abstraite*. L'approche de Lurie [Lur09] à la géométrie algébrique dérivée favorise l'utilisation des ∞ -catégories, des catégories supérieures (plus précisément des $(\infty, 1)$ -catégories).



Le lecteur est prévenu qu'il existe plusieurs modèles possibles pour les $(\infty, 1)$ -catégories ; par exemple Lurie utilise les *quasi-catégories*, tandis que Toën et Vezzosi utilise les *catégories de Segal*. Le modèle le plus simple *conceptuellement* est celle des *catégories topologiques* ; ce modèle est très proche à celui des *catégories simpliciaux* (voir [Lur09, Chapter 1]).

Cet exposé illustre les *idées* essentielles de l'algèbre homotopique à l'aide de quelques exemples fondamentaux, le but principal n'étant pas de donner les définitions précises ou de développer la théorie générale. Toutefois, la définition d'une catégorie de modèles est donnée dans l'appendice. Le lecteur pourra également consulter les références standards, par exemple :

- pour les catégories de modèle, [DS95], [Qui67], [Hov99], [GJ09], [Rie14], ...
- pour se faire quelques idées sur les ∞ -catégories (et plus généralement les catégories supérieures) : [Lur09, Chapter 1], [Rie14, Part IV], [Sim12], ...

L'article survol de Toën [Toë14, Section 2] pourrait également servir pour se donner une idée du contexte.

2. ESPACES TOPOLOGIQUES

Soit $\mathfrak{Top}$ la catégorie des espaces topologiques (compactement engendrés et Hausdorff) et des applications continues. La notion d'*homotopie* (ou déformation continue) est fondamentale.

Définition 2.1. Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de $\mathfrak{Top}$. Une homotopie (de f à g) est une famille continue $H_t : X \rightarrow Y$, $t \in I := [0, 1]$, telle que $H_0 = f$ et $H_1 = g$.

La continuité est équivalente au fait que H définit un morphisme $IX := I \times X \rightarrow Y$ et les conditions de bord correspondent au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{\quad} & IX \\ & \searrow (f,g) & \downarrow H \\ & & Y. \end{array}$$

La relation d'homotopie est une relation d'équivalence $\sim$ sur $\text{Hom}(X, Y)$ qui est compatible avec la composition. On écrit

$$[X, Y] := \text{Hom}(X, Y) / \sim$$

pour l'ensemble des classes d'homotopie.

Remarque 2.2. On obtient la notion d'équivalence d'homotopie : une application continue $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g : Y \rightarrow X$ tel que $g \circ f \sim 1_X$ et $f \circ g \sim 1_Y$.

Définition 2.3.

- (1) Soient (X, x) un espace topologie *pointé* et $n \in \mathbb{N}$; le n -ième groupe d'homotopie (ensemble pour $n = 0$) est

$$\pi_n(X, x) := [S^n, X]_{\bullet}$$

(classes d'homotopie *pointée*).

- (2) Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est une *équivalence faible* si, $\forall x \in X, n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_n(f) : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$$

est un isomorphisme. La classe des équivalences faibles est dénotée $\mathscr{W}$.

- (3) La catégorie homotopique des espaces topologiques est la catégorie localisée :

$$\mathscr{H} := \mathfrak{Top}[\mathscr{W}^{-1}]$$

(on inverse 'formellement' les équivalences faibles).

Propriétés 2.4.

- (1) Toute équivalence d'homotopie est une équivalence faible (exercice!). La réciproque est fausse.
- (2) La classe $\mathscr{W}$ contient les morphismes identité.
- (3) La classe $\mathscr{W}$ satisfait la propriété **2 sur 3** : si deux entre $\{f, g, g \circ f\}$ appartiennent à $\mathscr{W}$, le troisième aussi.

Remarque 2.5. La catégorie $\mathscr{H}$, définie comme ci-dessus, est extrêmement difficile à manipuler. La solution est d'utiliser des *résolutions* par des espaces qui ont un bon comportement par rapport à l'homotopie, à savoir les CW-complexes (plus généralement, les espaces ayant le *type d'homotopie* d'un CW-complexe).

On n'a pas besoin ici de la définition explicite d'un CW-complexe ; ce sont les propriétés suivantes qui nous intéressent :

Propriétés 2.6.

- (1) **(Le théorème de Whitehead.)** Toute équivalence faible entre deux CW-complexes est une équivalence d'homotopie.
- (2) **(Résolutions cellulaires.)** Tout espace topologique X admet une résolution $\Gamma X \xrightarrow{\sim} X$, c'est à dire une équivalence faible à partir d'un CW-complexe. (Plus généralement, tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ se relève en $\Gamma f : \Gamma X \rightarrow \Gamma Y$.)

Théorème 2.7. La catégorie $\mathcal{H}$ est équivalente à la catégorie $\mathfrak{Top}_{CW} / \sim$, dont les objets sont les CW-complexes et les morphismes les classes d'homotopie d'applications continues.

Exemple 2.8. Soit $X \subset \mathbb{R}$ le sous-espace $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_+\}$ et considérer $\mathbb{N}$ comme espace topologique discret. Il existe une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ d'ensembles, (nécessairement continue, mais pas un homéomorphisme). f est une équivalence faible mais pas une équivalence d'homotopie.

Tandis que $\mathbb{N}$ est un CW-complexe, X n'a pas le type d'homotopie d'un CW-complexe ; le morphisme f fournit une *résolution*.

Remarque 2.9. Tout espace topologique est *fibrant* : on n'a pas besoin de former une résolution $X \xrightarrow{\sim} RX \twoheadrightarrow *$ à droite, où RX est *fibrant*.

2.1. (Co)limites et homotopie. Un point embêtant lorsqu'on travaille avec la théorie d'homotopie est que plusieurs foncteurs fondamentaux *ne préservent pas les équivalences faibles*. Ceci nous oblige de considérer les *foncteurs dérivés* (lorsqu'ils existent !). Pour quelques aspects de la théorie générale, voir [Rie14, Chapter 2] et [DS95, Section 9]. Ici on illustre le phénomène par les produits fibrés et les sommes amalgamées.

Exemple 2.10. Soient X un espace topologique et $x, y \in X$. Le produit fibré de

$$\begin{array}{ccc} & * & \\ & \downarrow x & \\ * & \xrightarrow{y} & X \end{array}$$

est $\{x\} \times_X \{y\}$, donc vide si $x \neq y$ et $*$ si $x = y$.

La construction du produit fibré n'est pas invariante par équivalence faible en général ; par exemple, il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\sim} & P_x X \\ & \searrow x & \downarrow p \\ & & X \end{array}$$

où $P_x X := \{x\} \times_X X^I$ est l'espace des chemins $\gamma : I \rightarrow X$ tels que $\gamma(0) = x$ et $p(\gamma) = \gamma(1)$. Le morphisme décoré $\sim$ est une équivalence d'homotopie, puisque $P_x X$ est *contractile*, en particulier il est une équivalence faible. (La flèche $\twoheadrightarrow$ indique une *fibration*, mais nous n'en avons pas besoin ici.)

Le produit fibré de

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} & P_x X & \\ & \downarrow p & \\ * & \xrightarrow{y} & X \end{array}$$

est l'espace $P_{x,y}X$ des chemins de x à y . Si $x = y$, ceci est l'espace des lacets $\Omega_x X$ basés à x ; si X est connexe par arcs $P_{x,y}X$ est non-vide. En général ces espaces sont hautement non-triviaux.

Remarque 2.11.

- (1) Le fait que p soit une fibration entraîne que le produit fibré de (1) donne la correcte construction du point de vue de la théorie d'homotopie : il s'agit de la *limite homotopique*.
- (2) Il est intéressant de comparer cette construction avec le produit fibré *homotopique* d'un diagramme de groupoïdes

$$\mathcal{G}_1 \xrightarrow{f_1} \mathcal{G}_3 \xleftarrow{f_2} \mathcal{G}_2.$$

Le produit fibré homotopique $\mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_3}^h \mathcal{G}_2$ a pour objets les triplets (X_1, X_2, γ) , où X_i est un objet de $\mathcal{G}_i$ et $\gamma : f_1 X_1 \rightarrow f_2 X_2$ un morphisme de $\mathcal{G}_3$.

On peut également considérer les colimites homotopiques :

Exemple 2.12. Soit $X \neq \emptyset$ un espace topologique ; alors la somme amalgamée de

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$$

est $*$.

Cette construction n'est pas invariant par équivalence faible ; par exemple, considérons la factorisation à travers le cône sur X :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & CX \\ & \searrow & \downarrow \simeq \\ & & * \end{array}$$

(où $\rightarrow$ indique une *cofibration*, fait dont nous n'avons pas besoin).

La colimite de

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & CX \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$$

est ΣX , la suspension (non-réduite) de X , en général $\neq *$.

Remarque 2.13. Le fait que $X \rightarrow CX$ soit une cofibration entraîne que la colimite de (2) est la bonne construction *homotopique*, à savoir la *colimite homotopique* ou *hocolim*.

2.2. L' ∞ -catégorie des espaces topologiques. En théorie d'homotopie, on peut considérer que l'objet d'intérêt principal est

$$\mathcal{H} := \mathfrak{Top}[\mathcal{W}^{-1}],$$

qui admet un modèle plus maniable, à savoir $\mathfrak{Top}_{CW} / \sim$.

Cependant, on souhaite retenir des renseignements sur les constructions telles que les limites et colimites *homotopiques*. Ceci mène inéluctablement à la théorie des ∞ -catégories : on étudie la catégorie *topologique* des CW-complexes.

Définition 2.14. Soit $\mathcal{CW}$ la catégorie dont les objets sont les CW-complexes et l'espace des morphismes de X à Y est l'espace fonctionnel

$$\mathrm{Map}(X, Y)$$

(topologie compacte ouverte).

Remarque 2.15.

- (1) Les catégories topologiques fournissent un modèle de la théorie des $(\infty, 1)$ -catégories (voir [Lur09, Chapter 1]).
- (2) La catégorie homotopique $h\mathcal{C}$ d'une catégorie topologique $\mathcal{C}$ s'obtient en passant aux composantes connexes. Explicitement :

$$\mathrm{Hom}_{h\mathcal{C}}(X, Y) := \pi_0 \mathrm{Map}(X, Y).$$

Par exemple, la catégorie homotopique $h\mathcal{CW}$ est précisément $\mathcal{H}$.

Remarque 2.16. Rappelons en passant qu'on associe à un espace topologique X son groupoïde fondamental ΠX . On peut considérer les espaces topologiques comme modèle des ∞ -groupoïdes.

3. ENSEMBLES SIMPLICIAUX

Définition 3.1.

- (1) Soit Δ la catégorie des ordinaux finis, ayant pour objets $\{\underline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathrm{Hom}_{\Delta}(\underline{m}, \underline{n})$ l'ensemble des applications $(0, 1, \dots, m) \rightarrow (0, 1, \dots, n)$ préservant l'ordre $\leq$.
- (2) Pour $\mathcal{C}$ une catégorie,
 - (a) la catégorie $\Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{C}$ des *objets simpliciaux* de $\mathcal{C}$ est la catégorie des foncteurs $\Delta^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ et des transformations naturelles ;
 - (b) la catégorie $\Delta\mathcal{C}$ des *objets cosimpliciaux* de $\mathcal{C}$ est la catégorie des foncteurs $\Delta \rightarrow \mathcal{C}$ et des transformations naturelles.

En particulier, la catégorie des ensembles simpliciaux est $\Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns$, ou $\mathcal{E}ns$ est la catégorie des ensembles.

Exemple 3.2. On peut considérer l'ensemble totalement ordonné $\{0, 1, \dots, n\}$ comme une petite catégorie, donc $\underline{n} \mapsto \{0, 1, \dots, n\}$ définit un foncteur $\Delta \rightarrow \mathcal{CAT}$, ou $\mathcal{CAT}$ est la catégorie des petites catégories. Autrement dit, ceci définit une catégorie co-simpliciale (un objet de $\Delta\mathcal{CAT}$).

Par conséquent, pour toute petite catégorie $\mathcal{C}$, on dispose d'un ensemble simplicial $N\mathcal{C} \in \Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns$, défini par :

$$(N\mathcal{C})_n := \mathrm{Hom}_{\mathcal{CAT}}(\underline{n}, \mathcal{C}),$$

le *nerf* de $\mathcal{C}$. Cette construction définit un foncteur pleinement fidèle :

$$N : \mathcal{CAT} \rightarrow \Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns.$$

Ceci établit la relation entre les petites catégories et les ensembles simpliciaux et sert comme motivation pour la *définition* des quasi-catégories (voir [Lur09, Chapter 1]).

Définition 3.3. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\Delta^n \in \Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns$ l'ensemble simplicial représentable $\mathrm{Hom}_{\Delta}(-, \underline{n})$.

Proposition 3.4. Soient $X \in \Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns$ et $n \in \mathbb{N}$. Par le lemme de Yoneda, il existe un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}\mathcal{E}ns}(\Delta^n, X) \cong X_n.$$

Les ensembles simpliciaux fournissent un modèle combinatoire pour les espaces topologiques ; pour expliquer ce fait, on rappelle la réalisation géométrique.

Définition 3.5. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\Delta_{\mathrm{top}}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ le *simplexe topologique* enveloppe convexe de $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n+1\}$ (la base standard).



Exercice 3.6. Montrer que $\underline{n} \mapsto \Delta_{\text{top}}^n$ définit un objet cosimplicial $\in \Delta\mathfrak{Top}$ (où les applications de structure sont des restrictions de morphismes $\mathbb{R}$ -linéaires).

Définition 3.7. Soit $\text{Sing} : \mathfrak{Top} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ le foncteur *singulier* défini par

$$\text{Sing}(-)_n := \text{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta_{\text{top}}^n, -).$$

Proposition 3.8. Le foncteur admet un adjoint à gauche, la réalisation géométrique :

$$|-| : \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens} \rightleftarrows \mathfrak{Top} : \text{Sing}.$$

Démonstration. (Indications.) La réalisation géométrique $|-|$ étend l'association $|\Delta^n| := \Delta_{\text{top}}^n$ (qui est compatible avec les structures cosimpliciales). Explicitement $|X|$ est défini comme un *coend*, donc $|X|$ est un quotient de l'espace topologique

$$\coprod_n X_n \times \Delta_{\text{top}}^n$$

(où X_n est considéré comme espace topologique discret). □

Remarque 3.9. La réalisation géométrique $|X|$ d'un ensemble simplicial $X \in \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ est un CW-complexe.

Définition 3.10. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ est une *équivalence faible* si $|f|$ en est une dans $\mathfrak{Top}$. La classe des équivalences faibles dans $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ est dénotée $\mathscr{W}$.

Remarque 3.11.

- (1) La classe $\mathscr{W} \subset \text{Mor } \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ contient les isomorphismes et satisfait la propriété 2 sur 3.
- (2) Il existe une notion d'*homotopie simpliciale*, définie à l'aide de l'objet cylindre $X \times \Delta^1$, pour $X \in \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$, et donc celle d'*équivalence d'homotopie simpliciale*.
- (3) Toute équivalence d'homotopie simpliciale est une équivalence faible, mais la réciproque est fausse.

On peut construire la catégorie localisée associée : $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}[\mathscr{W}^{-1}]$. La réalisation géométrique induit un foncteur

$$\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}[\mathscr{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{H} = \mathfrak{Top}[\mathscr{W}^{-1}].$$

La théorie abstraite d'homotopie [Qui67] entraîne le résultat fondamental suivant :

Théorème 3.12. Le foncteur $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}[\mathscr{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{H} = \mathfrak{Top}[\mathscr{W}^{-1}]$ est une équivalence de catégories.

Question 3.13. Pour $X \in \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$, comment décrire les groupes d'homotopie $\pi_n(|X|, x)$ sans passer par $\mathfrak{Top}$?

3.1. Ingrédients de la théorie d'homotopie des ensembles simpliciaux. Le simplexe topologique Δ_{top}^n est homéomorphe à la n -boule et son bord $\partial\Delta_{\text{top}}^n$ est homéomorphe à la sphère S^{n-1} . Ce bord est la réalisation géométrique du bord $\partial\Delta^n \subset \Delta^n$, où

$$(\partial\Delta^n)_k \subset (\Delta^n)_k = \text{Hom}_{\Delta}(k, n)$$

est le sous-ensemble des applications $f : \{0, \dots, k\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ non surjectives.

Remarque 3.14. L'inclusion $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$ n'est pas une équivalence faible. Après réalisation géométrique elle fournit $S^{n-1} \hookrightarrow e^n$, l'inclusion d'un sous-CW-complexe.

Pour $0 \leq k \leq n$, on dispose dans $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ d'inclusions

$$\Lambda_k^n \subset \partial\Delta^n \subset \Delta^n$$

définies comme suit :

Définition 3.15 (Les cornes.). Soient $k, n \in \mathbb{N}$, où $0 \leq k \leq n$.

- (1) Soit $\iota_k : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ l'inclusion induite par $\underline{n-1} \rightarrow \underline{n}$, le morphisme qui correspond au sous-ensemble $\{0, \dots, n\} \setminus \{k\}$.
- (2) Soit $\Lambda_k^n := \bigcup_{j \neq k} \text{image}(\iota_j)$.



Exercice 3.16. Montrer que, pour $0 < n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$,

$$\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n$$

est une équivalence faible.

Remarque 3.17. Dans $\mathfrak{Top}$, pour $n > 0$,

$$|\Lambda_k^n| \hookrightarrow |\Delta^n|$$

est un rétracte par déformation forte. En particulier, il existe un rétracte $|\Delta^n| \rightarrow |\Lambda_k^n|$.



Dans $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$, le morphisme $\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n$ n'admet pas de rétracte pour $n > 1$. (Exercice : démontrer ce fait !)



Définition 3.18. Un ensemble simplicial $X \in \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ est *Kan* (ou *fibrant*) si, $\forall k, n \in \mathbb{N}$, $0 < n$ et $0 \leq k \leq n$, tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & X \\ \simeq \downarrow & \nearrow \exists & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

admet une extension.

Remarque 3.19. Une *quasi-catégorie* est un ensemble simplicial qui satisfait la condition de Kan pour les inclusions *intérieures*, $\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n$, pour $0 < k < n$.

Proposition 3.20. Soit $Y \in \mathfrak{Top}$ un espace topologique. Alors $\text{Sing}(Y)$ est Kan.



Démonstration. Exercice. □

Les complexes de Kan de $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ jouent un rôle *dual* aux CW-complexes dans $\mathfrak{Top}$.

En particulier :

- (1) (**Résolutions fibrantes.**) Pour tout $X \in \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$, il existe un complexe de Kan RX et une équivalence faible

$$X \xrightarrow{\simeq} RX.$$

- (2) (**Théorème de type Whitehead simplicial.**) La catégorie homotopique $\mathcal{H}$ est équivalente à la catégorie

$$\mathfrak{Kan} / \sim,$$

quotientée par la relation d'homotopie simpliciale, où $\mathfrak{Kan} \subset \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ est la sous-catégorie pleine des complexes de Kan.

- (3) Tout objet de $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ est en fait *cofibrant*, donc on n'a pas besoin de prendre des résolutions à gauche.

Remarque 3.21. Si $X \in \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ est Kan, il existe une définition combinatoire des groupes d'homotopie de X .

La catégorie $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ est enrichie en ensembles simpliciaux : c'est-à-dire qu'il existe des *espaces fonctionnels* (plutôt des ensembles simpliciaux fonctionnels). Rappelons d'abord que le produit (au sens catégorie) de $\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ est donné pour $X, Y \in \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ par :

$$(X \times Y)_t := X_t \times Y_t,$$

où les morphismes de structure agissent *diagonalement*.

Définition 3.22. Soient $X, Y \in \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$. L'espace fonctionnel $\text{Map}(X, Y) \in \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ est défini par :

$$\text{Map}(X, Y)_n := \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}}(X \times \Delta^n, Y).$$

Exemple 3.23. Le foncteur $Y \mapsto \text{Map}(X, Y)$ ne préserve pas les équivalences faibles. Ainsi, pour considérer un espace fonctionnel avec bon comportement *homotopique*, il faut utiliser le *foncteur dérivé* $\mathbb{R}\text{Map}$, défini par

$$\mathbb{R}\text{Map}(X, Y) := \text{Map}(X, RY) \in \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens},$$

où RY est une *résolution* de Y par un complexe de Kan.

Par exemple, pour Y un ensemble simplicial pointé et $\Delta^n/\partial\Delta^n$ un modèle simplicial de la sphère S^n , en général le π_0 de $\text{Map}_\bullet(\Delta^n/\partial\Delta^n, Y)$ (morphismes pointés) ne calcule pas le π_n de $|Y|$.

3.2. L' ∞ -catégorie des espaces (encore). Une *catégorie simpliciale* est une catégorie enrichie en ensembles simpliciaux. Les catégories simpliciales fournissent un modèle pour les $(\infty, 1)$ -catégories (voir [Lur09, Chapter 1]). (Normalement on se restreint aux catégories simpliciales *fibrantes* dont les espaces fonctionnels sont des complexes de Kan.)

Exercice 3.24. Pour $X, Y \in \Delta^{\text{op}}\mathfrak{Ens}$ où Y est de Kan, montrer que $\text{Map}(X, Y)$ est de Kan.

Remarque 3.25. Les complexes de Kan fournissent un autre modèle pour les ∞ -groupoïdes (voir [Lur09, Chapter 1]).

Définition 3.26. L' ∞ -catégorie des *espaces* est la catégorie simpliciale fibrante $\mathfrak{Kan}$, munie des espaces fonctionnels $\text{Map}(-, -)$.

Pour $\mathfrak{C}$ une catégorie simpliciale fibrante, la catégorie homotopique associée $h\mathfrak{C}$ a les mêmes objets, et morphismes

$$\text{Hom}_{h\mathfrak{C}}(X, Y) := \pi_0 \text{Map}(X, Y).$$

(Noter ici que $\text{Map}(X, Y)$ est Kan, puisque Y est Kan !)

Théorème 3.27. La catégorie homotopique $h\mathfrak{Kan}$ associée à l' ∞ -catégorie des espaces est $h\mathfrak{Kan} \cong \mathcal{H}$.

Remarque 3.28. Voir [Lur09, Chapter 1] pour la relation avec le modèle des ∞ -catégories fourni par les catégories topologiques. Le modèle $\mathfrak{Kan}$ de l' ∞ -catégorie des espaces est *équivalente* au modèle fourni par $\mathcal{CW}$.

4. COMPLEXES DE CHAÎNE

On fixe $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, par exemple la catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens ou la catégorie des R -modules à gauche sur un anneau R associatif et unitaire. On utilise une indexation *homologique* pour les complexes de chaîne, qui forment une catégorie $\text{Ch}\mathcal{A}$, dont les objets sont de la forme

$$\dots \rightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d} X_n \xrightarrow{d} X_{n-1} \xrightarrow{d} \dots,$$

indexés par $\mathbb{Z}$ (et $d^2 = 0$). On se restreindra parfois à la sous-catégorie pleine $\text{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$ des complexes indexés par $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire $X_n = 0$ pour $n < 0$).

Remarque 4.1.  Les géomètres algébristes ont tendance à utiliser une indexation cohomologique, de sorte que $\text{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$ correspond aux complexes en degrés non-positifs !

Proposition 4.2. L'inclusion $\text{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} \hookrightarrow \text{Ch}\mathcal{A}$ admet un adjoint à droite (le foncteur de troncation) :

$$\tau_{\geq 0} : \text{Ch}\mathcal{A} \rightarrow \text{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$$

tel que

$$(\tau_{\geq 0}X)_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \ker(X_0 \rightarrow X_{-1}) & n = 0 \\ X_n & n > 0. \end{cases}$$

Démonstration. Exercice. □ 

Remarque 4.3. Si $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ est surjectif, alors $(\tau_{\geq 0}f)_n$ est surjectif pour $n > 0$. Donner un exemple pour montrer que $(\tau_{\geq 0}f)_0$ n'est pas en général surjectif. 

Définition 4.4. La classe des équivalences faibles $\mathcal{W}$ de $\text{Ch}\mathcal{A}$ (respectivement $\text{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$) est la classe des *quasi-isomorphismes*, c'est-à-dire les morphismes $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ qui induisent un isomorphisme $H_*(f)$ en homologie.

La catégorie dérivée $\mathcal{D}\mathcal{A}$ est la catégorie

$$\mathcal{D}\mathcal{A} := \text{Ch}\mathcal{A}[\mathcal{W}^{-1}]$$

(respectivement $\mathcal{D}_{\geq 0}\mathcal{A} := \text{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}[\mathcal{W}^{-1}]$).

Remarque 4.5.  Comme pour $\mathcal{H}$, cette définition de $\mathcal{D}\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{D}_{\geq 0}\mathcal{A}$) n'est pas très maniable.

Remarque 4.6. L'adjonction $\text{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} \rightleftarrows \text{Ch}\mathcal{A}$ induit une adjonction dérivée $\mathcal{D}_{\geq 0}\mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{D}\mathcal{A}$.

On dispose également de la notion d'*homotopie de chaînes* :

Définition 4.7. Une homotopie de chaînes entre $f, g : X \rightrightarrows Y$ est la donnée de morphismes $\{h_n : X_n \rightarrow X_{n+1} | n \in \mathbb{Z}\}$ tels que $f_n - g_n = dh_n + h_{n-1}d$.

Remarque 4.8.

- (1) On peut exprimer la notion d'homotopie de chaînes en termes d'un *objet cylindre* explicite $IX \in \text{Ch}\mathcal{A}$, muni d'une inclusion $X \oplus X \rightarrow IX$ et d'une projection $IX \rightarrow X$.

L'homotopie de chaînes correspond à un morphisme $IX \rightarrow Y$ qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \oplus X & \xrightarrow{\quad} & IX \\ & \searrow (f,g) & \downarrow h \\ & & Y. \end{array}$$

- (2) *Objet cylindre.* Dans le cas $\mathcal{A} = \mathcal{A}b$, la catégorie des groupes abéliens, en considérant $\mathbb{Z}$ comme complexe concentré en degré zéro, le complexe $I\mathbb{Z}$ est concentré en degrés 1, 0 :

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{(1, -1)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

muni des morphismes 'évidents' : $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \hookrightarrow I\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Dans le cas général, on peut donner un sens à :

$$IX := I\mathbb{Z} \otimes X$$

(en donnant une interprétation convenable à $\otimes$ comme foncteur $\mathcal{A}b \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{Z}^{\oplus n} \otimes A := A^{\oplus n}$).

- (3) Homotopie de chaînes définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\text{Hom}(X, Y)$, compatible avec la composition. (La catégorie quotient associée est utilisée dans la construction classique de la catégorie dérivée.) On dispose alors de la notion d'équivalence d'homotopie de chaînes.
- (4) Toute équivalence d'homotopie est un quasi-isomorphisme (donc appartient à $\mathcal{W}$). La réciproque est fausse en général ; par exemple, considérer le morphisme de complexes

$$(3) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Exercice 4.9. Utiliser la 'construction' $IX := I\mathbb{Z} \otimes X$ esquissée ci-dessus pour donner une description explicite de l'objet cylindre IX pour $X \in \text{Ch}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ quelconque.

Remarque 4.10. (Foncteurs dérivés.) Le foncteur $- \otimes \mathbb{Z}/2 : \mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{A}b$ est additif mais pas exact. Il ne préserve pas l'équivalence faible du diagramme (3), car le complexe supérieur donne le complexe qui est $\mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/2$ concentré en un seul degré, tandis que le complexe supérieure est

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

qui n'a pas la même homologie(!). En fait, ce dernier complexe est $\mathbb{Z}/2 \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/2 \in \mathcal{D}\mathcal{A}b$.

En algèbre homologique classique (en supposant l'existence d'assez de projectifs et/ ou injectifs), on peut utiliser les *résolutions projectives* ou les *résolutions injectives*. Puisque nous souhaitons nous restreindre à $\text{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$, nous choisissons ici la variante *projective*.

Définition 4.11. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On définit la classe des *fibrations* de $\text{Ch}\mathcal{A}$ (respectivement $\text{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$) comme suit :

- (1) un morphisme f de $\text{Ch}\mathcal{A}$ est une fibration si f_n est surjectif $\forall n \in \mathbb{Z}$;
- (2) un morphisme f de $\text{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$ est une fibration si f_n est surjectif $\forall 0 < n \in \mathbb{N}$.

Remarque 4.12. Le foncteur $\tau_{\geq 0} : \text{Ch}\mathcal{A} \rightarrow \text{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$ préserve les fibrations.

Rappelons les points clés d'algèbre homologique classique :

Propriétés 4.13. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne ayant assez de projectifs.

- (1) (**Résolutions.**) Tout objet A admet une résolution projective $P_{\bullet} \rightarrow A$.
- (2) (**Théorème de type Whitehead.**) Les résolutions projectives sont uniques à équivalence d'homotopie de chaînes près.
- (3) On a une propriété de relèvement de morphismes ; ceci se généralise à une classe d'objets *cofibrants* (comparable aux CW-complexes), qui généralise celle des résolutions projectives. Pour un tel objet $P_{\bullet} \in \text{Ch}\mathcal{A}$ et un quasi-isomorphisme $f : C_{\bullet} \rightarrow D_{\bullet}$ qui est une fibration, tout morphisme

$$\begin{array}{ccc} & & C_{\bullet} \\ & \nearrow & \downarrow f \\ P_{\bullet} & \longrightarrow & D_{\bullet} \end{array}$$

admet un relèvement.

Remarque 4.14. Ceci mène à la théorie générale des foncteurs *additifs* dérivés : le point clé étant qu'un foncteur *additif* préserve les homotopies de chaînes. Quid des foncteurs non-additifs ?

4.1. L^∞ -catégorie $\mathcal{Ch}\mathcal{A}$. La catégorie dérivée $\mathcal{D}\mathcal{A}$ a la structure d'une catégorie triangulée ; souvent cette structure n'est pas suffisante pour effectuer des constructions. Il manque notamment les limites et colimites homotopiques. Il convient de travailler avec l' ∞ -catégorie (stable) associée.

Remarque 4.15. Comme pour $\mathcal{T}op$, tout objet de $\mathcal{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$ est fibrant. Alors la catégorie $\mathcal{D}\mathcal{A} = \mathcal{Ch}\mathcal{A}[\mathcal{W}^{-1}]$ est équivalente à la catégorie homotopique de la sous-catégorie pleine des complexes *cofibrants*.

Pour comprendre la ∞ -catégorie qui généralise cette construction, on a besoin du théorème de Dold-Kan.

Théorème 4.16. (*Théorème de Dold-Kan.*) Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Alors le foncteur complexe de chaînes normalisé $N : \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$ induit une équivalence de catégories

$$N : \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} : \Gamma.$$

Lorsque $\mathcal{A}$ est muni d'un foncteur oubli $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Ens}$ (par exemple lorsque $\mathcal{A}$ est la catégorie des R -modules, en oubliant la structure algébrique) on a un foncteur oubli au niveau des objets simpliciaux $\Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\mathcal{Ens}$ et donc une composée :

$$|-| : \mathcal{Ch}\mathcal{A} \xrightarrow{\tau_{\geq 0}} \mathcal{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} \xrightarrow{N} \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\mathcal{Ens}.$$

Dans les exemples qui nous intéressent, ce foncteur prend ses valeurs dans $\mathcal{Ran}$.

Rappelons que, pour $X, Y \in \mathcal{Ch}\mathcal{A}$, on dispose du complexe de chaîne

$$\underline{\text{Hom}}(X, Y) \in \mathcal{Ch}\mathcal{A}b$$

(lorsque $\mathcal{A}$ est la catégorie des R -modules sur un anneau commutatif, il s'agit du hom interne).

Définition 4.17. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. L' ∞ -catégorie $\mathcal{Ch}\mathcal{A}$ est la catégorie simpliciale fibrante ayant pour objets les complexes de chaîne *cofibrants* et $\text{Map}(X, Y) \in \Delta^{\text{op}}\mathcal{Ens}$ l'ensemble simplicial fibrant

$$|\underline{\text{Hom}}(X, Y)|.$$

(Une définition similaire vaut pour $\mathcal{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$.)

Remarque 4.18.  Il faut faire attention ici en considérant $\mathcal{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$. Le théorème de Dold-Kan fournit une définition différente (mais équivalente).

ANNEXE A. CATÉGORIES DE MODÈLE

On fixe $\mathcal{C}$ une catégorie.

Notation A.1.

- (1) Soient f, g morphismes de $\mathcal{C}$; on écrit $f \pitchfork g$ si, pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & \searrow \exists & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

il existe un relèvement qui rend commutatif les deux triangles.

- (2) Pour $\mathcal{M}$ une classe de morphismes de $\mathfrak{C}$, soient
- ${}^{\mathfrak{h}}\mathcal{M}$ la classe des morphismes f tels que $f \mathfrak{h} g, \forall g \in \mathcal{M}$;
 - $\mathcal{M}^{\mathfrak{h}}$ la classe des morphismes g tels que $f \mathfrak{h} g, \forall f \in \mathcal{M}$.

Remarque A.2. Les classes ${}^{\mathfrak{h}}\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^{\mathfrak{h}}$ contiennent tous les isomorphismes.

Définition A.3. Un système de factorisation faible de $\mathfrak{C}$ est une paire de classes de morphismes $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ telle que :

- (1) (**Factorisation.**) tout morphisme de $\mathfrak{C}$ se factorise comme la composée de deux morphismes

$$\xrightarrow{\in \mathcal{L}} \xrightarrow{\in \mathcal{R}} .$$

- (2) (**Orthogonalité.**) $\mathcal{L} = {}^{\mathfrak{h}}\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}^{\mathfrak{h}} = \mathcal{R}$.

Exemple A.4. La paire des classes (surj, inj) de morphismes de $\mathfrak{Cns}$ forme un système de factorisation faible.

Définition A.5. Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie complète et cocomplète (en particulier $\mathfrak{C}$ possède un objet initial $\emptyset$ et un objet final $*$).

- (1) Une structure de modèle sur $\mathfrak{C}$ est un triplet de classes de morphismes

$$(\mathcal{W}, \mathcal{Cof}, \mathcal{Fib})$$

tel que

- (a) les classes $\mathcal{W}, \mathcal{Cof}, \mathcal{Fib}$ contiennent les identités et sont stables par rétracte ;
 - (b) $\mathcal{W}$ satisfait la propriété 2 sur 3 ;
 - (c) les paires $(\mathcal{Cof}, \mathcal{Fib} \cap \mathcal{W})$ et $(\mathcal{Cof} \cap \mathcal{W}, \mathcal{Fib})$ forment des systèmes de factorisation faibles.
- (2) Une catégorie de modèle est une catégorie $\mathfrak{C}$ (co)complète, munie d'une structure de modèle.

Remarque A.6. Les classes $(\mathcal{W}, \mathcal{Cof}, \mathcal{Fib})$ sont reliées, par exemple :

$$\begin{aligned} \mathcal{Fib} &= (\mathcal{Cof} \cap \mathcal{W})^{\mathfrak{h}} \\ \mathcal{Cof} &= {}^{\mathfrak{h}}(\mathcal{Fib} \cap \mathcal{W}). \end{aligned}$$

Définition A.7. Un élément de $\mathcal{Cof} \cap \mathcal{W}$ est une *cofibration triviale* et un élément de $\mathcal{Fib} \cap \mathcal{W}$ une *fibration triviale*.

On dénote les morphismes de $\mathcal{W}, \mathcal{Cof}, \mathcal{Fib}$ respectivement par $\xrightarrow{\sim}, \twoheadrightarrow$ et $\rightarrow$.

Définition A.8. Un objet X d'une catégorie de modèle $\mathfrak{C}$ est

- (1) *cofibrant* si $\emptyset \twoheadrightarrow X$ est une cofibration ;
- (2) *fibrant* si $X \rightarrow *$ est une fibration.

Remarque A.9 (Résolutions). Les axiomes de factorisation fournissent, pour tout objet X d'une catégorie de modèle $\mathfrak{C}$:

- (1) une *résolution cofibrante*

$$\emptyset \twoheadrightarrow QX \xrightarrow{\sim} X$$

et

- (2) une *résolution fibrante*

$$X \xrightarrow{\sim} RX \rightarrow *$$

Exemple A.10 (Objet cylindre). Soit X un objet d'une catégorie de modèle $\mathfrak{C}$; le morphisme codiagonale $X \amalg X \rightarrow X$ se factorise

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{\quad} & IX \\ & \searrow & \downarrow \simeq \\ & & X. \end{array}$$

L'objet IX est un *objet cylindre*, qui permet de définir la notion d'homotopie (à gauche). (Pour un bon comportement homotopique, il faut mieux supposer X cofibrant.)

Théorème A.11. La catégorie $\Delta^{\text{op}} \mathfrak{Ens}$ est une catégorie de modèle pour $(\mathcal{W}, \mathcal{C}of, \mathcal{F}ib)$, où $\mathcal{W}$ est la classes des équivalences faibles, $\mathcal{C}of$ la classe des monomorphismes et $\mathcal{F}ib := (\mathcal{C}of \cap \mathcal{W})^{\text{h}}$.

De plus :

- (1) $\mathcal{F}ib = \{\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n > 0, 0 \leq k \leq n\}^{\text{h}}$;
- (2) $\mathcal{F}ib \cap \mathcal{W} = \{\partial \Delta^n \hookrightarrow \Delta^n \mid n \in \mathbb{N}\}^{\text{h}}$.

En particulier, les objets fibrants sont les complexes de Kan et tout objet est cofibrant.

Remarque A.12. Les fibrations de cette structure s'appellent les *fibrations de Kan*. La définition est analogue à celle des *fibrations de Serre* pour les espaces topologiques $\mathfrak{Top}$.

RÉFÉRENCES

- [CPT⁺15] D. Calaque, T. Pantev, B. Toen, M. Vaquie, and G. Vezzosi, *Shifted Poisson Structures and Deformation Quantization*, ArXiv e-prints (2015).
- [DS95] W. G. Dwyer and J. Spaliński, *Homotopy theories and model categories*, Handbook of algebraic topology, North-Holland, Amsterdam, 1995, pp. 73–126. MR 1361887 (96h :55014)
- [GJ09] Paul G. Goerss and John F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, Reprint of the 1999 edition [MR1711612]. MR 2840650
- [Hov99] Mark Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. MR 1650134 (99h :55031)
- [Lur09] Jacob Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. MR 2522659 (2010j :18001)
- [PTVV13] Tony Pantev, Bertrand Toën, Michel Vaquié, and Gabriele Vezzosi, *Shifted symplectic structures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 271–328. MR 3090262
- [Qui67] Daniel G. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, No. 43, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967. MR 0223432 (36 #6480)
- [Rie14] Emily Riehl, *Categorical homotopy theory*, New Mathematical Monographs, vol. 24, Cambridge University Press, Cambridge, 2014. MR 3221774
- [Sim12] Carlos Simpson, *Homotopy theory of higher categories*, New Mathematical Monographs, vol. 19, Cambridge University Press, Cambridge, 2012. MR 2883823 (2012m :18019)
- [Toë14] Bertrand Toën, *Derived algebraic geometry*, EMS Surv. Math. Sci. **1** (2014), no. 2, 153–240. MR 3285853
- [TV05] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry. I. Topos theory*, Adv. Math. **193** (2005), no. 2, 257–372. MR 2137288 (2007b :14038)
- [TV08] ———, *Homotopical algebraic geometry. II. Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224. MR 2394633 (2009h :14004)