

Le fibré tangent NC l'algèbre tensorielle de bi-module
 $T_A \Omega_k^1(A) =: \Omega_k^1(A)$ s'appelle le fibré tangent NC

C'est une algèbre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -graduée : la première graduation donnée par la graduation de l'algèbre A et la seconde par le "degré" de "forms" (# de d 's dans l'écriture de l'élément donné).

Koszul règle : $\alpha \in \Omega_k^p(A)$ pass à côté de $\beta \in \Omega_k^q(A)$
le signe $(-1)^{|\alpha||\beta| + \|\alpha\| \|\beta\|}$ va apparaître.

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - (-1)^{|\alpha||\beta| + \|\alpha\| \|\beta\|} \beta\alpha. \quad \Omega_k^p(A) \cong A \otimes \tilde{A}^{\otimes p}$$

Proposition : La différentielle (dite de de Rham) s'étend à une ~~opération~~ ^{dérivation} k -linéaire $d: \Omega_k^p(A) \rightarrow \Omega_k^{p+1}(A)$ de degré $(0,1)$ t.q. $d^2 = 0$ et

$$d(a_0 da_1 \dots da_n) = da_0 a_1 \dots da_n;$$

Le complexe de de Rham NC ($H^i(\Omega_k^*(A), d) = \begin{cases} k & i=0 \\ 0 & i>0 \end{cases}$)

k -complexe de de Rham NC (après Karoubi ??)
c'est le complexe d'espaces vectoriels gradués définis par

$$DR_k^i(A) = \Omega_k^i(A) / [\Omega_k^i(A), \Omega_k^i(A)]_{\text{super-commutateur}}$$

Triple de Cartan NC (d, ι_x, L_x)

1° d de de Rham; 2° la contraction $\iota: \Omega_k^1(A) \rightarrow A \otimes A$
c'est le morphisme de A -bimodules pour $\forall \alpha \in \text{Der}(A)$
 $\iota_x(da) = \alpha(a), \quad a \in A.$

Nous pouvons aisément éteindre l'application

Plus précisément, soit A associative. Son enveloppe différentielle

est une DGA $D(A)$ que est une solution du problème

de "universalité". Soit $\mathcal{C}$ une catégorie d'objets et

$\mathcal{C} :=$ morphismes $A \rightarrow D^0$ d'une DGA $D = \oplus_{n \geq 0} D^n$

Si $\varphi: A \rightarrow D^0$ et $\psi: A \rightarrow E^0$ deux objets comme ça

$\text{Mor}(\varphi, \psi) \ni \theta: D \rightarrow E + \theta(D^1) \subset E^1$ et $d_{E^0} \theta = d_A$

Alors $D(A)$ est l'objet initial dans $\mathcal{C}$ c-à-d

$\exists \iota: A \rightarrow D(A)^0$ t.g. $\forall \varphi: A \rightarrow D^0$ $\exists!$ morphisme de DGA

$\varphi: D(A) \rightarrow D$ t.g. $\varphi \circ \iota = \varphi$

Puis explicitement $D(A)$ est engendré par $\bar{a} = d_A, a \in A$

et $d(\bar{a}b) = d_A \cdot b + a \cdot d_B$

Pour si A est généré par $a_1, \dots, a_n$ alors $a_1, \dots, a_n, d_{a_1}, \dots, d_{a_n}$

sont générateurs de $D(A)$;

généralisés $\Omega_{ac}^i(A) \subseteq D(A)$ Pour voir l'isomorphisme

on a: $\iota: A \rightarrow D(A)$ injection et de plus,

$d: A \rightarrow D(A)$ $a \mapsto \bar{a} = d_A$

kanonik:

$d: D^0(A) \rightarrow D^{0+1}(A)$, $D^0(A) = A/[A, A]$ et

$D^1(A) = \Omega_{ac}^1(A)/[A, \Omega_{ac}^1(A)] = HH_0(A, \Omega_{ac}^1(A))$

à une dérivation de degré (-1) :

$\iota_x : D_k(A) \rightarrow D_k(A) \otimes D_k(A)$ et réduire cette dérivation à une dérivation de degré (-1)

$$\bar{\iota}_x := \mu \circ \sigma \circ \iota_x : D_k(A) \rightarrow D_k(A).$$

3° La dérivée de Lie NC.

$$L_x = d\iota_x + \iota_x d : D_k(A) \rightarrow D_k(A) \otimes D_k(A)$$

et la dérivée réduite

$$\bar{L}_x := \mu \circ \sigma \circ L_x : D_k(A) \rightarrow D_k(A)$$

Proposition La contraction NC réduite descend à

$$\iota_x : DR_k(A) \rightarrow D_k(A). \quad x \in \text{Der}_k(A) \text{ -double.}$$

Forme symplectique NC : $\omega \in DR_k^2(A)$, $d\omega = 0$

est symplectique si ~~la contraction réduite descend~~

~~à $DR_k^2(A)$~~ : l'application $\bar{\iota}_x(X) := \iota_x \omega$

$\iota_\omega : \text{Der}_k(A) \rightarrow D_k^1(A)$ est un isomorphisme de A -bimodules.

$DR^1(A) \xrightarrow{\bar{\iota}_x}$ est une bijection

Crochets de Poisson doubles de Van den Bergh.

Def Un crochet double de degré n sur A est

$$\{ \cdot, \cdot \} : A \otimes A \rightarrow A \otimes A \text{ de degré } n + 1.$$

a) $\{a, b\} = (-1)^{(|a|+n)(|b|+n)+1} \sigma \{b, a\}$

b) $\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{(|a|+n)|b|} b \{a, c\}$

c) Jacobi

$$0 = \{a, \{b, c\}'\} \otimes \{b, c\}'' + (-1)^{(|a|+n)(|b|+n)} \{b, \{a, c\}'\} \otimes \{a, c\}'' + (-1)^{(|a|+n)(|b|+n)} \{c, \{a, b\}'\} \otimes \{a, b\}''$$

Exemple (Géométrie) (V, D_V) - symplectique e.v.

$\rightarrow A = T^*V^*$ - symplectique u.c. Soit $\gamma \in V^*$ et $\gamma = \sum dx_i \wedge dy_i$, alors $\gamma < \alpha, \beta > +q$.

$$Der(A) = A \otimes V \quad DR^1(A) = A \otimes V^* \quad \Omega^2(A) = A \otimes T^2(V^*) \otimes A \otimes A$$

$$\omega_A = \sum 1 \otimes (\alpha_i \otimes \beta_i) \otimes 1 \in A \otimes T^2(V^*) \otimes A = \Omega^2_{MC}(A)$$

iso: $\Gamma_2: V \otimes V^* \rightarrow \Omega^2(V^*)$ induit iso

$$id_A \otimes \Gamma_2: Der(A) = A \otimes V \xrightarrow{\sim} A \otimes V^* = DR^1(A)$$

$$\theta \rightarrow \omega_A \text{ pour } \omega_A \in DR^2(A)$$

Soit $V = ev^* V = \{k \cdot x_i, T(V^*) = k(x_1, \dots, x_n)\}$

$Der(A, M)$ on peut spéifier par un morphisme $\partial: V^* \rightarrow M$

A-brand et puis doublement le cas de feuillet.

$Der(A, M) \simeq Hom_{A^e}(V^*, M) = V \otimes M$, alors le foncteur $Der(A, -)$ est représentable par A-brandule libre

$$\Rightarrow \Omega^1(A) \simeq A \otimes V^* \otimes A$$

$$\overline{Th.} \quad 0 \rightarrow A \rightarrow Der(A) / \Omega^1(A) \rightarrow \Omega(A) \rightarrow 0$$

Ou $\tau: A^{\otimes 3} \rightarrow A^{\otimes 3}$ $a \otimes b \otimes c \rightarrow (-1)^{(|a|+|b|)|c|} c \otimes a \otimes b$

Si A est une algèbre différentielle-graduée alors double crochet dg sur A est un double crochet t.q. $d\{a, b\} = \{da, b\} + (-1)^{|a|+1} \{a, db\}$

Comportement par rapport à la seconde structure de bi-module :

$$\{ab, c\} = a * \{b, c\} + (-1)^{|b|(|c|+1)} \{a, c\} * b$$

Thm (Ginzburg - Etingof - Gawley - Beeren)

$\forall$ 2-forme symplectique ω définit un crochet double

Preuve: $\forall a \in A$ h_a est une double dérivation "hamiltonienne"

: $i_{h_a} \omega = da$ (unique!).

$$\{a, b\} := h_a(b) = i_{h_a}(db) = i_{h_a} i_{h_b} \omega$$

Thm (VdB; Gawley Beeren...) Chaque crochet double définit un crochet de Kontsevich de degré n :

$$\{-, -\} = \mu \circ \{[-, -]\}: A \otimes A \rightarrow A \text{ tel que.}$$

1° $\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{(|a|+1)|b|} b\{a, c\}$ (dérivation par 1^{er} argument)

2° $\{[a, b], c\} = 0 \quad \forall a, b, c \Rightarrow \{-, -\}$ descend sur

$$\{-, -\}: A/[A, A] \otimes A \rightarrow A$$

3° $\{-, -\}$ satisfait à l'identité de Jacobi

$$\{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\} + (-1)^{(|a|+1)(|b|+1)} \{b, \{a, c\}\}$$

(Leibniz rule...)

4° $\{-, -\}: A/[A, A] \times A/[A, A] \rightarrow A/[A, A]$ - un crochet de Lie

5° $\{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\} + (-1)^{|b|+1} \{b, \{a, c\}\};$

