A - $\mathbb{Z}$-grad, unité. <u>Calcul non-commutative</u> M, N, A-bimodules $\mathbb{Z}$-gradués.

<u>Koszul regle</u>: Si l'élément a de degré $|a|$ "passe par" l'élément b de degré $|b|$ le degré $(-1)^{|a||b|}$ à paraître.

<u>Module décalé</u> : ΣM $(\Sigma M)^i := M^{i+1}$ $\otimes = \otimes_{\mathbb{C}}$

Soient φ, ψ deux morphisms de A-bimodules gradués alors $(\varphi \otimes \psi)(a \otimes b) = (-1)^{|\psi||a|} \varphi(a) \otimes \psi(b)$

Notation de Sweedler: $a \in A \otimes A$ $a = a' \otimes a'' = \sum_i a_i' \otimes a_i''$

Si $\Psi : A \to A \otimes A$ $\Psi(a) = \Psi(a)' \otimes \Psi(a)''$

la structure extérieure : $a(b' \otimes b'')c = ab' \otimes b''c$

la structure intérieure $a * (b' \otimes b'') * c = (-1)^{|a||b'| + |c||a| + |c||b''|} (b' c) \otimes (a b'')$

$\sigma :=$ "flip" ou "twist" $\sigma(a \otimes b) = (-1)^{|a||b|} b \otimes a$

alors deux structures de bi-module se lient par

$$\underset{\text{(de degré } n)}{\sigma(a(b' \otimes b'')c)} = a * \sigma(b' \otimes b'') * c$$

Déf. Une dérivation d'une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée à valeur d'une bimodule gradué est

$$\partial : A \longrightarrow M \text{ s.t. } \partial(ab) = \partial(a) b + (-1)^{n|a|} a\, \partial(b)$$

Soit $M = A \otimes A$ alors $\mathbb{D}er(A)$ - <u>les dérivations doubles</u> $A \longrightarrow A \otimes A$.
(la structure extérieure)

$\mathbb{D}er(A)$ est un groupe abélien, mais, par rapport la structure intérieure ~~extérieure~~ c'est A-bimodule :

$\partial \to a * \partial * b$ $(a * \partial * b)(c) = a * (\partial c' \otimes \partial c'') * b$.

<u>Exemple</u> 1° Soit $A_n = k\langle x_1, \dots, x_n \rangle$. On a n dérivations doubles

$$\partial_i (x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 \otimes 1 & i = j \end{cases}$$ et ~~partial cyclic~~ "dérivation cyclique partielle"

est composition $\bar{\partial}_i = \mu \circ \partial_i : A_n \to A_n$

Un carquois $\mathbb{Z}$-gradué Q :

1) V_Q – ensemble des vertexes

2) $E_Q(v,w)$, $v,w \in V_Q$ $\quad E_Q(v,w) = \coprod_{k\in\mathbb{Z}} E_Q^k(v,w)$

$e \in E_Q^k(v,w) \Rightarrow v = t(e),\ v = h(e)$
la "source" le "but"

$\deg e = k$ $\qquad w = h(e) \longleftarrow v = t(e)$

<u>Chemin de longueur n</u> est $p = e_n e_{n-1} \cdots e_1$ t.q.

$t(e_{i+1}) = h(e_i) \quad 1 \le i \le n-1 \qquad t(p) = v_0 \quad h(p) = v_k$

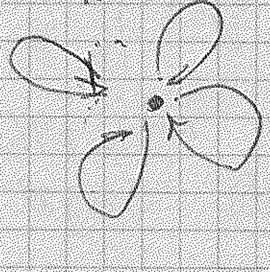
$$v_n \xleftarrow{e_n} v_{n-1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow v_1 \xleftarrow{e_1} v_0$$

$\deg p = \sum \deg e_i$. Chaque vertex est le chemin de longueur et de degré 0.

<u>composition de chemins</u> : concatenation

$\mathbb{K}Q = \langle p \rangle$; $p \cdot q = \begin{cases} qp & h(p) = t(q) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\mathbb{K}Q$ comme Free_n :



Soit $P = x_{i_0} \dots x_{i_k}$ un monôme dans A_n alors

$$\bar{\partial}_i P = \sum_{i_p = i} x_{i_{p+1}} \dots x_{i_k} x_{i_0} \dots x_{i_{p-1}} \quad \Big| \quad \partial_i : A_n^{(k+1)} \to A_n^{(k)}$$

2° Soit $A = kQ$ l'algèbre des chemins sur un carquois alors $\forall$ e, f flèches $e \in Q$ $\exists$ $\partial_e(f)$:

$$\partial_e(f) = \begin{cases} h(e) \otimes t(e) & \text{si } f = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \underset{\text{but}}{h(e)} \bullet \longleftarrow \bullet \underset{\text{source}}{t(e)}$$

$$\bar{\partial}_e = \mu \circ \sigma \circ \partial_e : kQ / [kQ, kQ] \to kQ$$

Déf. Le fibré cotangent noncommutatif.

l'algèbre tensorielle $T_A \operatorname{Der}(A)$ du bimodule $\mathbb{D}\mathrm{er}(A)$ est un monoïde libre sur $\operatorname{Der}(A)$ dans la catégorie monoïdale de A-bimodules;

A-algèbre $T_A(\operatorname{Der}(A))$ s'appelle le fibré cotangent NC.

Les formes différentielles NC : $\Omega^1_k(A)$ - A-bimodule engendré par ~~deux~~ symboles a et da avec la relation $d(ab) = (da)b + a(db)$

Prop. Le foncteur $M \to \operatorname{Der}_k(A, M)$ est représentable par le bimodule $\Omega^1_k(A)$:

$$\operatorname{Der}_k(A, M) = \operatorname{Hom}_{A\text{-bimod}}(\Omega^1_k(A), M);$$

La suite courte est exacte:

$$0 \to \Omega^1(A) \xrightarrow{\phi} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \to 0$$

$\phi(da) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$ et $\mu(a \otimes b) = ab$.

$\phi(da) = \Delta(a) \qquad \operatorname{Der}_k(A, A^e) = \operatorname{Hom}_{A\text{-bim}}(\Omega^1_k(A), A^e) \simeq \mathbb{D}\mathrm{er}(A)$

Bar : $B_* A$ .. $\cdots \xrightarrow{b} B_1 \xrightarrow{b} B_0 \xrightarrow{\mu} A \to 0$

$$B_j = B_j A = A \otimes A^{\otimes j} \otimes A$$

bar-complexe est acyclique. Soit $\delta : A \to M$ $\delta \in Der(A, M)$

On va définir $\tilde{\delta} : A^{\otimes 3} \to M$; $\underline{\tilde{\delta}(a' \otimes a \otimes a'') := a' \cdot \delta(a) \cdot a''}$

<u>lemme</u> $\tilde{\delta}$ est une dérivation $\Leftrightarrow$ $\tilde{\delta} \in$ 2-cocycle :

$(b\tilde{\delta})(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = \tilde{\delta}(a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) - \tilde{\delta}(a_0 \otimes a_1 a_2 \otimes a_3) +$
$+ \tilde{\delta}(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 a_3) = a_0 a_1 \delta(a_2) a_3 - a_0 \delta(a_1 a_2) a_3 + a_0 \delta(a_1) a_2 a_3$ (*)

$\Rightarrow \tilde{\delta}\big|_{dB_2} \equiv 0 \Rightarrow \hat{\delta}$ bien définie homomorph de bimod

les $\tilde{\delta} : B_1 / dB_2 \to M$ par acyclicité (exacte) $B_1 / dB_2 = dB_1$

et $dB_1 = \{2\text{-cocycles}\} \Rightarrow dB_1 = \ker(B_0 \to A) =$
$= \ker \mu = \Omega^1_k(A) \Rightarrow \hat{\delta} \in Hom_{A^e}(\Omega^1(A), M)$.

On peut re-faire dans le sens opposé :

$\forall$ $\Omega^1_k(A) \to M$ des bimodules induit une dérivation $\delta : A \to M$.

Soit $I = \mathrm{Ker}(A \otimes A \to A)$ et $\tilde{A} = A/k$ $\tilde{x} = p(x)$

$p : A \to \tilde{A}$

<u>Proposition</u> 1° $d : A \to I$ $\quad x \to dy = y \otimes 1 - 1 \otimes y$ est une dérivation

2° l'application $A \otimes \tilde{A} \to I$

$$x \otimes \tilde{y} \longrightarrow x \otimes y - xy \otimes 1 = x\,dy$$

est un isomorphisme des bimodules à gauche ;

$$\left((x \otimes \tilde{y})\,z = x \otimes \widetilde{yz} - xy \otimes \tilde{z} \right)$$

$d : x \otimes \tilde{y} \to x \otimes y - xy \otimes 1$ est correctement définie car si y et $y + \lambda \in \hat{A}$ pour $\tilde{y}$ alors

$$x \otimes (y + \lambda) \longrightarrow x(\lambda + y) \otimes 1 = x \otimes y + x \otimes \lambda - \lambda x \otimes 1 - xy \otimes 1$$

$$= x \otimes y - xy \otimes 1 + x \otimes \lambda - x \otimes \lambda = x \otimes y - xy \otimes 1 \text{ dans } I$$

<u>1° d est surjective</u> : I est engendré par $\langle x \otimes y - xy \otimes 1 \rangle$

Car $I = dB_1$ alors $d(x \otimes \tilde{y}) = -d(x \otimes y \otimes 1)$

Mais d est un morphisme des A-bimodules $\quad d(x \otimes y \otimes z) = d(x \otimes y \otimes 1)z =$

$= -d(x \otimes \tilde{y})z \Rightarrow I$ est engendré par l'image de d ~~en~~ autant que A-bimodule

2° <u>d est une injection:</u> $\quad \mu : A \otimes A \to A \quad I = \mathrm{Ker}\,\mu$

$\mathrm{Im}\,d \subset I$; Soit $\bar{\mu} : A \otimes A/\mathrm{Im}\,d \to A$. On peut définir $\varphi : A \to A \otimes A/\mathrm{Im}\,d$ $\quad \varphi(a) = a \otimes 1 + \mathrm{Im}\,d \Longrightarrow$

$$\bar{\mu}(\varphi(a)) = \bar{\mu}(a \otimes 1 + \mathrm{Im}\,d) = \mu(a \otimes 1) = a$$

$$\varphi(\bar{\mu}(x \otimes y + \mathrm{Im}\,d)) = \varphi(xy) = xy \otimes 1 + \mathrm{Im}\,d$$

$-5''$

Car $x\otimes y - xy\otimes 1 \in \mathrm{Im}\, d \Rightarrow xy\otimes 1 + \mathrm{Im}\, d = x\otimes y + \mathrm{Im}\, d$

du coup φ est $\overline{\mu}^{-1} \Rightarrow \overline{\mu} \in \mathrm{Iso}. \Rightarrow \mathrm{Im}\, d = \mathrm{Ker}\, \mu = I.$