

1° Def. Soit A une $\mathbb{C}$ -algèbre affine commutative (Nouv. $\mathbb{C}$ -algèbre char(k)=0).

A est une algèbre de Poisson si A est une $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie w.r.t. (par) une opération binaire $\{-, -\} : A \times A \rightarrow A$ tel que $\{a, b, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$.
Une algèbre affine est de Poisson si son anneau de coordonnées est une algèbre de Poisson.

Si l'algèbre A est graduée : $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ ou va dire que A est une algèbre de Poisson graduée avec un crochet de Poisson de degré 1 si $\{A_i, A_j\} \subseteq A_{i+j+1}$ et de degré l si $\{A_i, A_j\} \subseteq A_{i+j+l}$ (l est minimal avec un crochet entier pour lequel c'est vrai).

2° Soit A une $\mathbb{C}$ -algèbre $\mathbb{Z}$ -filtrée; c'est-à-dire que A munie d'une filtration $\mathcal{F}$:

$$0 = \mathcal{F}_{-1} \subseteq \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq A \text{ telle que}$$

$$a) \mathcal{F}_i \cdot \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_{i+j}; \quad b) \mathcal{F}_0 = \mathbb{C}; \quad \dim \mathcal{F}_i < \infty \quad \forall i$$

$$d) \underline{gr}^{\mathcal{F}}(A) = \bigcup_i gr_i^{\mathcal{F}}(A) \text{ ou } gr_i^{\mathcal{F}}(A) = \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i-1} \text{ est une algèbre affine commutative.}$$

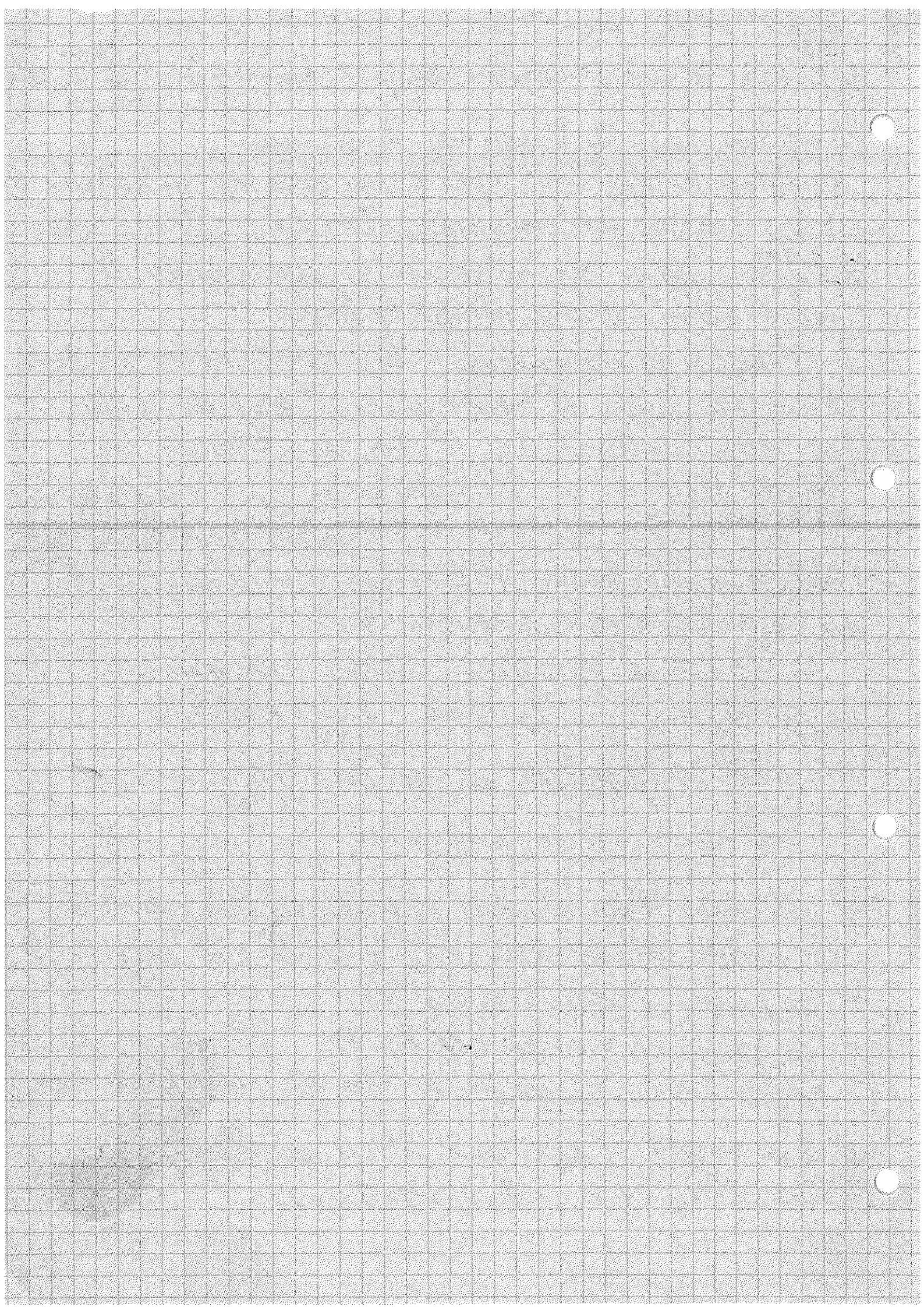
Def A munie d'une structure proto-Poisson par rapport $\mathcal{F}$,
s'il existe une opération $\langle -, - \rangle : A \times A \rightarrow A$ t.q. $\langle -, - \rangle$ est antisymétrique non nulle bilinéaire.

$$1^\circ \langle a, b, c \rangle = a \langle b, c \rangle + \langle a, c \rangle b$$

$$2^\circ \langle a, \langle b, c \rangle \rangle = \langle \langle a, b \rangle, c \rangle + \langle b, \langle a, c \rangle \rangle$$

($\langle -, c \rangle$ - dérivation de A , et $\langle a, - \rangle$ - "dérivation" de $\langle, \rangle$)

$$3^\circ \exists \text{ un entier } d, \text{ (degré de } \langle -, - \rangle) \text{ t.q. } \langle \mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j \rangle \subseteq \mathcal{F}_{i+j+d} \text{ mais } \nexists i, j \text{ t.q. } \langle \mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j \rangle \not\subseteq \mathcal{F}_{i+j+d-1}.$$



Exemples :

- 1° $\mathfrak{g}$ - une algèbre de Lie de dim. finie. Soient $x_1, \dots, x_n$ une base de $\mathfrak{g}$, alors $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \simeq S^*(\mathfrak{g}^*)$. Le crochet $[\cdot, \cdot]$ s'étend par la règle de Leibniz: $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}^* \langle \{\xi, \eta\}, x \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \langle x, x \rangle = \langle [\xi, \eta], x \rangle$ ou $d\xi = \eta$.
 - 2° Soit (V, Ω) un esp. vectoriel symplectique. On peut définir un crochet sur $S^*(V)$.
 - 3° Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre envelop. de $\mathfrak{g}$ munie de la filtration standard; alors $S^i(\mathfrak{g}) \simeq \text{gr}_i(U(\mathfrak{g})) = U_i(\mathfrak{g}) / U_{i-1}(\mathfrak{g})$ et le proto-crochet $\langle -, - \rangle$ sur $U(\mathfrak{g}) = \bigcup U_i(\mathfrak{g})$ induit le vrai crochet sur $S^*(\mathfrak{g}) = \bigoplus_i S^i(\mathfrak{g})$:
 soit $a \in \text{gr}_i(\mathfrak{g})$, $b \in \text{gr}_j(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in U_i^*(\mathfrak{g})$, $\beta \in U_j^*(\mathfrak{g})$ t.q.
 $\pi(\alpha) = a$, $\pi(\beta) = b$. $\pi: U(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g})$.
 $\{\alpha, \beta\} := \pi([\alpha, \beta]) \in \text{gr}_{i+j-1}$
 - 4° Soit A une algèbre filtrée munie d'un crochet de Poisson $\{ \cdot, \cdot \}$. Si $\{ \cdot, \cdot \}$ satisfait à la condition 3° de la déf. $\Rightarrow \{ \cdot, \cdot \}$ - proto-Poisson bracket sur A . En particulier, pour toute algèbre de Poisson finiment engendrée avec $(a_1, \dots, a_n)$ comme un ensemble des générateurs. On peut définir une filtration F :
 $F_i = 0$, $i < 0$, $F_0 = \mathbb{C}$, $F_1 = \mathbb{C} \cdot 1 + \sum_{i=1}^n \mathbb{C} \cdot a_i$ et $F_i = (F_1)^i$, $i \geq 2$.
 Alors le crochet $\{ \cdot, \cdot \}$ de Poisson est le proto-crochet.
- Proposition: Soit A une $\mathbb{C}$ -algèbre filtrée et $\langle -, - \rangle$ un proto-crochet de Poisson de degré d .

Rappel 1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} < \infty$ et e_i une base de $\mathfrak{g}$: $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ - const. de structure.
 Alors $\mathfrak{g} \simeq (\mathfrak{g}^*)^*$ et $\forall e_i \in \mathfrak{g} \rightarrow x_i \in (\mathfrak{g}^*)^* \text{ t. q.}$

$\forall f \in \mathfrak{g}^* \quad \alpha_i(f) = f(e_i)$. L'algèbre symétrique

$S(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$ du corps $\forall f, g \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} c_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} x_k$$

2) $(V, \Omega) \quad V = \langle x_i, y_i \rangle \quad \Omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i$

$$\Rightarrow f, g \in \text{Sym}(V) \quad \{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

Soit $x, y \in \text{gr}^{\mathbb{F}}(A)$ deux éléments homogènes de degré k et l respectivement. Soient $\bar{x}, \bar{y}$ ses "pull-backs" sur A : $\pi(\bar{x}) = x, \pi(\bar{y}) = y$ et $\pi = \bigoplus \pi_i$ $\pi_i := \pi|_{\mathbb{F}_i}$;

Alors $\text{gr} \langle -, - \rangle : \text{gr}^{\mathbb{F}}(A) \times \text{gr}^{\mathbb{F}}(A) \rightarrow \text{gr}^{\mathbb{F}}(A)$ s.t.

$\langle x, y \rangle \Rightarrow \pi_{i+j+d}(\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle)$ définit un crochet de Poisson de degré d : $\{-, -\} = \text{gr} \langle -, - \rangle$.

Non-commutative case.

Thm (Farkas-Letzer) Soit A une algèbre $\mathbb{N}^0$, première et de Poisson, alors il existe $\lambda \in \mathbb{Z}^+(A)$ t.q.

$\{a, b\} = \lambda [a, b] \quad \forall a, b \in A$; ici $\mathbb{Z}^+(A)$ est le "centroïde" de A (pour A première c'est le centre de l'anneau des fractions (corps gauche des fractions).
 et. dir. comme un A -mod. à droite

Pour une algèbre simple $\mathbb{Z}^+(A) = Z(A)$;

La démonstration n'est pas simple et se base sur le

Lemme de Ginzburg Soit A une algèbre de Poisson alors $\{a, c\} \{b, d\} = \{a, c\} \{b, d\}$.

Exemple : Soit V - k -e.v. $\dim_k V = n$, $x_1, \dots, x_n$ une base, Soit $A_n := T(V) \simeq k \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ l'algèbre libre.

Crochet sur A_n : $\{a, b\} = -\{b, a\}$, $\{a, b, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$
 $\{a, b, c\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}$
 $\text{Jac}(a, b, c) = \{a, \{b, c\}\} + \{b, \{a, c\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0$.

1) Chaque $\{-, -\}$ sur A_n est complètement définie par la choix d'élément $\phi_{ij} \in A_n$ t.q. $\{x_i, x_j\} = \phi_{ij}$ et réciproquement. chaque choix de ϕ_{ij} définit un crochet.

2) $\{-, -\}$ est un crochet sur $A_n \iff \text{Jac}(x_i, x_j, x_k) = 0 \quad \forall i < j < k$

Contre-exemple : $\{x_1, x_2\} = c_{12} x_1 x_2$, $\{x_2, x_3\} = c_{23} x_2 x_3$, $\{x_1, x_3\} = c_{31} x_3 x_1$

