GdT DAG – complexe cotangent d'une cdga

<u>But</u> ~~Définir~~ Définir la notion de complexe cotangent dans le cas affine,

<u>Plan</u> : (1) Modules / cdga

(2) Complexe cotangent

<u>Cadre / Notations / Rappel</u> :

k anneau

Ch_k cat des cpx de chaînes $\mathbb{Z}$-graduées

- munie de sa structure monoïdale sym. fermée usuelle

$$- \underset{k}{\otimes} C : Ch_k \rightleftarrows Ch_k : \underline{\hom}_k(C,-)$$

- munie de la structure (proj.) de cat. de modèle ~~sym~~ monoïdale sym

$We\, Ch_k$ = morph induisant un iso en homologie

$Fib\, Ch_k$ = morph surjectifs

Ch_k^+ = ss cat. pleine de Ch_k des objets nuls en deg <0

Ch_k^+ cat de modèle monoïdale symétrique

$$We\, Ch_k^+ = We\, Ch \cap Ch_k^+$$

$$Fib\, Ch_k^+ = \text{morph surj en deg} > 0$$

$cdga_k^{(+)}$ ss cat des monoïdes commutatifs unitaires de $Ch_k^{(+)}$

$\underset{k}{\otimes}$ coproduit dans $cdga_k$

§1 Modules

Soit $A \in cdga_k$

On définit la catégorie des A-modules (à gauche) $A\text{-dgmod}_k$

• Ob A-dgmod : $N \in Ob\, Ch_k$ tq $\exists\ A\otimes N \xrightarrow{\mu^N} N$

$$\begin{tikzcd}
A\otimes(A\otimes N) \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes\mu^N"'] & (A\otimes A)\otimes N \arrow[r, "\mu^A\otimes 1"] & A\otimes N \arrow[d, "\mu^N"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{1}\otimes N \arrow[l] \arrow[d] \\
A\otimes N \arrow[rr, "\mu^N"'] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & N \arrow[r, equal] & N
\end{tikzcd}$$

• Mor A-dgmod : $N \xrightarrow{\varphi} M \in Mor\, Ch_k$ tq

$$\begin{tikzcd}
A\otimes N \arrow[r, "\mu^N"] \arrow[d, "1\otimes\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "\varphi"] \\
A\otimes M \arrow[r, "\mu^M"'] & M
\end{tikzcd}$$

Comme A est un monoïde commutatif, on a l'équivalence de cat.

$$A\text{-dgmod} \cong \text{dgmod-}A \leftarrow (A\text{-module à droite})$$

Cette équivalence nous permet de définir une structure monoïdale symétrique fermée sur A-mod.

$\forall M, N \in A\text{-mod}$ $\quad M \otimes_A N := \mathrm{Coeg}(M\otimes A\otimes N \rightrightarrows M\otimes N) \in A\text{-mod}$

$$\underline{\mathrm{hom}}_A(M,N) := \mathrm{Eg}(\underline{\mathrm{hom}}_k(M,N) \rightrightarrows \underline{\mathrm{hom}}_k(A\otimes M, N))$$

Le foncteur oubli $\quad \mathrm{Oubli} : A\text{-mod} \longrightarrow Ch_k$ possède un adjoint à gauche

$$A\otimes_k - : Ch_k \rightleftarrows A\text{-mod} : \mathrm{Oubli}$$

Par cette adjonction, on transporte la structure de modèle de Ch_k sur A-mod.

$\forall M \xrightarrow{\varphi} N \in A\text{-mod}$ est une | éq faible / fibration | si $\mathrm{Oubli}(\varphi)$ en est une dans Ch_k

en particulier $A\otimes_k - : Ch_k \rightleftarrows A\text{-mod} : \mathrm{Oubli}$ est une adjonction de Quillen

§ A - cdga$_k$ (1)

Soit $A \in$ cdga$_k$ k corps de caractéristique 0

On définit A - cdga$_k$ sous cat. des monoïdes commutatifs unitaires de A-mod.

On a $A\text{-cdga}_k \cong A/\text{cdga}_k$ cat. des objets en dessous de A

Objet initial $A \xrightarrow{id} A$

objet final $A \longrightarrow 0$

Rappel : $\underset{k}{\otimes}$: coproduit de cdga$_k$

On a l'adjonction suivante :

$$A \underset{k}{\otimes} - : \text{cdga}_k \rightleftarrows A\text{-cdga} : \text{Oubli}$$

qui nous permet de transporter la structure de modèle de cdga$_k$ sur A - cdga$_k$ c.a

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr, "j"] & \\ B \arrow[rr] & & C \end{tikzcd}$$

est une $\left| \begin{array}{l} \text{éq. faible} \\ \text{fibration} \\ \text{cofib} \end{array} \right|$ dans A - cdga$_k$ si $B \to C$ en est une dans cdga$_k$

En ~~particulier~~ :

~~Dans~~ A - cdga est fibrante (tous les objets sont fibrants)

Les objets cofibrants de A - cdga sont les $A \rightarrowtail B$

cofibration dans cdga

§ Changement de base

soit $A \longrightarrow B \in A$ - cdga

On a l'adjonction

$$B \underset{A}{\otimes} - : A\text{-mod} \rightleftarrows B\text{-mod} : \text{Res}$$

qui est une adjonction de Quillen

De plus, si on a une éq. faible de A-cdga $B \xrightarrow{\sim} B'$ alors l'adjonction précédente induit une équ. de cat. :

$$Ho(B\text{-mod}) \cong Ho(B'\text{-mod})$$

de même $\quad Ho(B\text{-cdga}_k) \cong Ho(B'\text{-cdga}_k)$

§ Dérivations

Soient $A, B \in \mathrm{cdga}_k$ $\quad A \longrightarrow B$

$M \in B\text{-mod}$.

On définit $\underline{\mathrm{Der}}^n_A(B,M) := \{ \delta \in \underline{\hom}^n_{A\text{-mod}}(B,M) \mid \delta(bb') = \delta(b)b' + (-1)^{n|b|} b\delta(b') \}$

$\underline{\mathrm{Der}}_A(B,M) \underset{\text{ss cpx}}{\subset} \underline{\hom}_A(B,M)$

Prop $\underline{\mathrm{Der}}_A(B,M)$ est un B-mod (structure induite par celle de M)

$\exists\ \Omega_{B/A} \in \mathrm{Ob}\, B\text{-mod}$ + une dérivation de deg. 0 appelée dérivation universelle $d : B \longrightarrow \Omega_{B/A} \in \underline{\mathrm{Der}}^0_A(B, \Omega_{B/A})$

tels que $\forall M \in \mathrm{Ob}\, B\text{-mod}$

$$\begin{array}{ccc} \underline{\hom}_{B\text{-mod}}(\Omega_{B/A}, M) & \xrightarrow{\simeq} & \underline{\mathrm{Der}}_A(B,M) \quad \text{iso de } B\text{-mod} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ d \end{array}$$

□ On définit $I := \mathrm{Ker}(B \otimes_A B \xrightarrow{\mu} B) \in B\text{-bimod}$.

I est engendré par les $1 \otimes b - b \otimes 1 \quad \forall b \in B$
en tant que bimodule

Comme $b(1\otimes x - x\otimes 1) - (-1)^{|x||b|}(1\otimes x - x\otimes 1)b = -(1\otimes b - b\otimes 1)(1\otimes x - x\otimes 1)$

$\Rightarrow I/I^2$ est un B-bimod sym. (i.e $\forall b \in B$, $\forall m \in I/I^2$ $\quad b\cdot m = (-1)^{|m||b|} m\cdot b$)

On pose $\Omega_{B/A} := I/I^2$

et
$$\begin{array}{rcl} d : B & \longrightarrow & \Omega_{B/A} \\ b & \longmapsto & 1\otimes b - b\otimes 1 \end{array}$$
morph de A-mod

$d(bb') = b\,db' + (-1)^{|b||b'|} b'\,db$

$|db| = |b|$

$da = 0 \quad \forall a \in A$

$$\Omega_{B/A} \underset{B\text{-mod}}{\cong} \bigoplus_{b\in B} B\,db \Big/ \sim \qquad (*)$$

☒

Exemple : Soit (B, ∂) une A-cdga$^+$ semi libre

i.e $B \cong A \otimes S(V) = A \otimes \left(\bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n} / S_n \right)$ avec V un k-ev gradué

On a $\Omega_{B/A} \cong \bigoplus_{b \in B} Bdb / \sim$ $\quad$ $\forall v, v' \in V$ $\quad d(vv') = vdv' + (-1)^{|v||v'|} v'dv$

$\cong B \otimes V$

Comme la dérivation universelle $d : B \longrightarrow \Omega_{B/A}$ est un morphisme de complexes de chaîne, on a $\partial_\Omega d = d \partial_B$

donc $\partial_\Omega (bdv) = \partial b dv + (-1)^{|b|} b d(\partial v)$

Problème : Si on a B et $B' \in A$-cdga tels que $B \simeq B'$

on n'a pas forcément que $\Omega_{B/A} \simeq \Omega_{B'/A}$ dans A-mod

$B \simeq B' \not\Rightarrow \Omega_B \simeq \Omega_{B'}$

ex : On considère $A = k[x]$ $\quad B = k$

$B' = (A \otimes \Lambda(y), \partial)$
$\partial y = x$

On a bien $B \simeq B'$ mais $\Omega_{B/A} = 0$

$\Omega_{B'/A} = B'dy$ d'après l'ex précédent

$\rightsquigarrow$ On passe donc au cadre dérivé

§ Complexe cotangent

Def Soit $A \to B \in A/\mathrm{cdga}/_B$ et $\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\ & B^c \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd}$ rés. cofibrante

On définit le complexe cotangent à B au dessous de A par :

$$\mathbb{L}_{B/A} := \Omega_{B^c/A} \underset{B^c}{\otimes} B \in \mathrm{Ho}(B\text{-mod.})$$

$\mathbb{L}_{B/A}$ est bien indépendant du choix de la résolution B^c

□ On considère $A \rightarrowtail B_1^c \overset{\simeq}{\twoheadrightarrow} B$, $A \rightarrowtail B_2^c \overset{\simeq}{\twoheadrightarrow} B$ 2 rés. cofibrantes de B dans $A/\mathrm{cdga}/_B$.

On a donc B_2^c, fibrant et cofibrant

par l'axiome du lifting + axiome 2-3 $\quad \exists\, \varphi : B_1^c \overset{\simeq}{\longrightarrow} B_2^c$

[Dwyer-Spalinski - Lem 4.24] $\Rightarrow$ φ possède une inverse homotopique

$\psi : B_2^c \longrightarrow B_1^c$ tq $\psi\varphi \sim \mathrm{id}_{B_1^c}$

$\varphi\psi \sim \mathrm{id}_{B_2^c}$

Lemme [Manetti - Prop 5.1]

Soit $\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & S \arrow[d] & R \arrow[l, "g"'] \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$ dans A-cdga

s'il existe une homotopie en f et g, constante au dessus de B, alors les morph de B-mod induits

$$f, g : \Omega_{R/A} \underset{R}{\otimes} B \longrightarrow \Omega_{S/A} \underset{S}{\otimes} B$$

sont homotopes

$\boxed{\text{III}}$ Soit $J = \ker(S \longrightarrow B)$ $\quad \partial(t) = dt,\ \partial(dt) = 0$

$$H : R \longrightarrow \underbrace{S \bigoplus_{j \geq 0} (Jt^{j} \oplus J t^{j} dt)}_{\text{objet chemin de } A/\text{cdga}/B} \quad \text{homotopie entre } f \text{ et } g$$

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, "g"] & \\ S & S\oplus(\ ) \arrow[l, "ev_0"] \arrow[r, "ev_1"'] & S \end{tikzcd}$$

$\forall x \in R$

$H(x) = f(x) + t(g(x) - f(x)) + dt\, q(x) \ldots$

On a $\partial H(x) = H(\partial x) \Rightarrow \forall x \quad g(x) - f(x) = q(\partial x) - \partial q(x)$

$H(xy) = H(x)H(y) \Rightarrow \forall x, y \quad q(xy) = q(x) f(y) + (-1)^{|x|} f(x) q(y)$

On définit

$$\bar{q} : \Omega_{R/A} \underset{R}{\otimes} B \longrightarrow \Omega_{S/A} \underset{S}{\otimes} B$$
$$r\,dx \otimes b \longmapsto f(r)\, \delta(q(x)) \otimes b$$

bien défini car $q(x) \in J$

Par déf

$$\bar{f} : \Omega_{R/A} \underset{R}{\otimes} B \longrightarrow \Omega_{S/A} \underset{S}{\otimes} B$$
$$r\,\delta x \otimes b \longmapsto f(r)\, \delta f(x) \otimes b$$

$$\bar{g} : \Omega_{R/A} \underset{R}{\otimes} B \longrightarrow \Omega_{S/A} \underset{S}{\otimes} B$$
$$r\,\delta x \otimes b \longmapsto g(r)\, \delta(g(x)) \otimes b = f(r)\, \delta(g(x)) \otimes b$$

car $g(x) - f(x) \in J$

Il reste à vérifier que $\bar{q}$ définit une homotopie entre $\bar{f}$ et $\bar{g}$

$$\begin{aligned}(\partial\bar{q} - \bar{q}\partial)(r\,\delta x \otimes b) &= f(r)\, \delta(\partial q(x) - q(\partial x)) \otimes b \\ &= f(r)\, \delta(f(x) - g(x)) \otimes b \\ &= (\bar{f} - \bar{g})(r\,\delta x \otimes b)\end{aligned}$$

§ Un exemple

On pose $A = k$ $\quad B = k[t]/f$

On a $B^c := \left(k[t]\otimes\Lambda(y^1), \partial y = f\right) \xrightarrow{\simeq} B$ résolution cofibrante

• $\Omega_B = B\,dt/df \cong k[t]/(f, f')\, dt$

$df = f'dt$

• $\Omega_{B^c} = B^c dt \oplus B^c dy$:

$$\overset{2}{k[t]y\,dy} \longrightarrow \overset{1}{\begin{matrix} k[t]dy \\ \oplus \\ k[t]y\,dt \end{matrix}} \longrightarrow \overset{0}{k[t]dt}$$

$$dy \longmapsto df = f'dt$$
$$y\,dt \longmapsto f\,dt$$
$$y\,dy \longmapsto f\,dy - f'y\,dt$$

$$\mathbb{L}_B = \Omega_{B^c}\otimes_{B^c} B = \overset{1}{k[t]/f\; dy} \longrightarrow \overset{0}{k[t]/f\; dt}$$
$$dy \longmapsto f'dt$$

Si $f = t^2$:

Ω_{B^c} : $y\,dy \xrightarrow{\partial} t^2dy - 2ty\,dt = t(t\,dy - 2y\,dt)$

et $\partial(t\,dy - 2y\,dt) = 0$

$\Longrightarrow H_1(\Omega_{B^c}) \neq 0$

$\Omega_{B^c}\otimes_{B^c} B$: $k[t]/t^2\, dy \longrightarrow k[t]/t^2\, dt$

$dy \longmapsto 2t\,dt$

$\partial(t\,dy) = 2t^2dt = 0$

$H_1(\mathbb{L}_B) \neq 0$

§ Lien avec les dérivations

$Der_A(B,M) \simeq \underline{Hom}_A(B, B\oplus M)$

$\delta \longmapsto (id, \delta)$

Def [HAG II, 1.2.1.1]

L'ensemble simplicial des A-dérivations dérivées de B dans M est

$$\mathbb{R}\underline{Der}_A(B,M) := \mathbb{R}Map_{A/cdga/B}(B, B\oplus M) \in Ho(\Delta^{op}Ab)$$

où
- $B\oplus M$ est l'extension de carré nul de M dont le produit est donné par
$$(b,m).(b',m') := \left(bb',\ bm' + (-1)^{|b'||m|}b'm\right)$$
- $Map_{A/cdga/B}(X,Y) := \underline{hom}_{cdga}(X, \Omega^{\bullet}\underset{B}{\otimes} Y)$ (cf exposé cdga)

Prop [HAG II, 1.2.1.2] On a l'isomorphisme naturel, $\forall M \in B\,mod$

$$d^{*} : \mathbb{R}Map_{B\text{-}mod}(\mathbb{L}_{B/A}, M) \xrightarrow{\ \cong\ } \mathbb{R}\underline{Der}_A(B,M) \text{ dans } Ho(\Delta^{op}Ens)$$

[] La preuve découle de 2 adjonctions de Quillen

$$K : B\text{-}cdga^{nu} \rightleftarrows B/cdga_{/B} : I$$

$$Q : B\text{-}cdga^{nu} \rightleftarrows B\,mod : Z$$

avec $I(B \to C \xrightarrow{p} B) = Ker(p)$

$Q(C)$ donné par

$$\begin{array}{ccc} C\underset{B}{\otimes} C & \xrightarrow{\mu} & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & Q(C) \end{array}$$

$\left(QI(B\underset{A}{\otimes}B) = \Omega_{B/A}\right)$

+ une compatibilité simpliciale au niveau des Map.

$\boxtimes$

§ Quelques propriétés de $\mathbb{L}_{B/A}$

(1) $\mathbb{L}_{(-)/A} : A\text{-cdga}_k \longrightarrow Ch_k$ est un foncteur

(2) Soit $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ dans cdga_k

Alors on a la suite cofibre homotopique dans C-mod.

$$\mathbb{L}_{B/A} \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} C \longrightarrow \mathbb{L}_{C/A} \longrightarrow \mathbb{L}_{C/B}$$ (triangle distingué dans $D^{\leq 0}(C)$)

i.e.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{L}_{B/A} \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} C \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{L}_{C/A} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner h"] & \mathbb{L}_{C/B} \end{tikzcd}$$

(3) Changement de cobase

soit
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner h"] & B' \end{tikzcd} \qquad B' \simeq A' \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} B$$

Alors on a

* $\mathbb{L}_{B/A} \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} B' \longrightarrow \mathbb{L}_{B'/A'}$ iso dans $Ho(B'\text{-mod})$

* $\mathbb{L}_{B/A} \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} B' \oplus \mathbb{L}_{A'/A} \overset{\mathbb{L}}{\underset{A'}{\otimes}} B' \longrightarrow \mathbb{L}_{B'/A}$

* $$\begin{tikzcd} \mathbb{L}_{A} \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} B' \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{L}_{B} \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} B' \arrow[d] \\ \mathbb{L}_{A'} \overset{\mathbb{L}}{\underset{A'}{\otimes}} B' \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner h"] & \mathbb{L}_{B'} \end{tikzcd}$$ est homotopiquement cocartésien dans B'-mod