

CALABI-YAU DEFORMATIONS AND NEGATIVE CYCLIC HOMOLOGY - D'APRÈS *THANHOFFER DE VOLCSEY, VAN DEN BERGH*

GEOFFREY POWELL

L'objectif est d'étudier une partie de l'article [Vd12]. En particulier :

- (1) l'algèbre de Lie différentielle graduée $\mathfrak{D}(A, \eta)$ qui contrôle les déformations de l'algèbre Calabi-Yau (A, η) ;
- (2) le quasi-isomorphisme (de complexes de chaînes) entre $\mathfrak{D}(A, \eta)$ et l'homologie cyclique négative ;
- (3) la relation avec le crochet de Lie '*Menichi*'.

La première partie du groupe de travail sera consacrée aux structures de base : l'homologie et la cohomologie de Hochschild ; l'homologie cyclique ; les algèbres Calabi-Yau. Ensuite on introduira l'algèbre de Lie différentielle graduée $\mathfrak{D}(A, \eta)$ et on démontrera les théorèmes principaux de la [Vd12, Section 10]. Enfin, on se penchera sur la théorie des déformations des algèbres Calabi-Yau, ce qui établit l'intérêt de $\mathfrak{D}(A, \eta)$.¹

Programme (version préliminaire) :

- (1) *Les (co)complexes de Hochschild*. Il s'agit d'introduire une partie des structures présentées dans [Vd12, Section 4]. L'orateur pourra également consulter [Lam10], [TT05] et [Lod98].
 - [Vd12, Section 4.1] - les objets gradués sous-jacents.
 - [Vd12, Section 4.2] - structures sur les cochaînes. (On pourra probablement omettre la notion d'algèbre brace.) Crochet de Gerstenhaber $[-, -]$; différentielle exprimée en termes de $[\mu, -]$; le cup produit ; structure DG Lie. Éventuellement la notion d'algèbre de Gerstenhaber DG.
 - [Vd12, Section 4.3] - structures sur les chaînes. Concaténation (cap produit) i ; dérivé de Lie L ; différentielle $= L_\mu$; les propriétés (4.3), (4.4), (4.5).
- (2) *L'homologie cyclique*. Il s'agit d'introduire l'homologie cyclique et ses variantes négative et périodique, en suivant [Vd12, Sections 4.3 et 5.7] (et [TT05] et [Lod98]). En particulier :
 - L'opérateur B de Connes ; éventuellement la notion de *Calculus structure*.
 - L'homologie cyclique (négative, périodique et usuelle). (On pourrait introduire la notion de complexe mixte [Lod98].)
 - La suite exacte de Connes (qui relie l'homologie cyclique négative à l'homologie de Hochschild). Application : [Vd12, Proposition 5.7] - en mettant une hypothèse d'annulation (pour éviter de parler des algèbres Calabi-Yau ici).
 - L'algèbre de Lie DG $\mathfrak{D}(A, \eta)$ introduite à la [Vd12, Section 8] en supposant que η est un cycle (pas besoin de la notion d'algèbre Calabi-Yau).

Date: 23 mars 2015.

1. Dans un premier temps, on omettra la dernière partie [Vd12, Sections 11, 12], ce qui nécessiterait l'introduction d'autres techniques.

- (3) *Algèbres Calabi-Yau* - en suivant [Vd12, Section 5] (voir aussi [VdB14], [Lam10], [Gin06] ...).
 - Définition d'une algèbre Calabi-Yau.
 - Dualité de Poincaré pour une algèbre Calabi-Yau [Vd12, Proposition 5.5].
 - Notion d'une algèbre Calabi-Yau exacte [Vd12, Définition 5.9].
 - Quelques exemples : [Gin06], [BP14] ...
- (4) *L'homologie de $\mathfrak{D}(A, \eta)$* . Montrer que l'homologie de $\mathfrak{D}(A, \eta)$ est isomorphe à l'homologie cyclique négative (en tant que groupe abélien gradué).
 - Introduction de l'opérateur $I_x := i_x + uS_x$ et ses propriétés [Vd12, Section 4.3].
 - Définition du morphisme de complexes de chaîne Ψ [Vd12, Section 10].
 - Démonstration que Ψ est un quasi-isomorphisme lorsque (A, η) est Calabi-Yau (conséquence de la dualité de Poincaré).
- (5) *Le crochet de Lie sur HC^-* . Relier le crochet sur l'homologie de l'algèbre de Lie DG $\mathfrak{D}(A, \eta)$ à la structure d'algèbre de Lie sur $HC^-(A)$.
 - Définition du crochet de Menichi (comme dans l'énoncé du [Vd12, Théorème 10.2]).
 - Démonstration du [Vd12, Théorème 10.1].
- (6) *Déformations d'algèbres Calabi-Yau* - [Vd12, Section 6].
 - Il faudrait commencer par quelques rappels sur les déformations d'algèbres associatives - et éventuellement le rôle de la cohomologie de Hochschild.
 - à préciser.
- (7) *Déformations d'algèbres Calabi-Yau ; le formalisme Maurer-Cartan*. Il s'agit de traiter les [Vd12, Sections 7, 8].
 - Le formalisme Maurer-Cartan [Vd12, Section 7].
 - Le rôle de $\mathfrak{D}(A, \eta)$ dans la théorie des déformations : [Vd12, Théorème 8.1]. (Énoncé et démonstration.)

RÉFÉRENCES

- [BP14] Roland Berger and Anne Pichereau, *Calabi-Yau algebras viewed as deformations of Poisson algebras*, *Algebr. Represent. Theory* **17** (2014), no. 3, 735–773. MR 3254768
- [Gin06] V. Ginzburg, *Calabi-Yau algebras*, *ArXiv :math/0612139* (2006).
- [Lam10] Thierry Lambre, *Dualité de Van den Bergh et structure de Batalin-Vilkoviskii sur les algèbres de Calabi-Yau*, *J. Noncommut. Geom.* **4** (2010), no. 3, 441–457. MR 2670971 (2011k :16021)
- [Lod98] Jean-Louis Loday, *Cyclic homology*, second ed., *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Appendix E by Maria O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili. MR 1600246 (98h :16014)
- [Men09] Luc Menichi, *Batalin-Vilkovisky algebra structures on Hochschild cohomology*, *Bull. Soc. Math. France* **137** (2009), no. 2, 277–295. MR 2543477 (2011b :16034)
- [TT05] Dmitri Tamarkin and Boris Tsygan, *The ring of differential operators on forms in non-commutative calculus*, *Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics*, *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 105–131. MR 2131013 (2005m :16014)
- [Vd12] M. Van den Bergh and L. de Thanhoffer de Völcsey, *Calabi-Yau Deformations and Negative Cyclic Homology*, *ArXiv 1201.1520 :math.RA* (2012).
- [VdB14] Michel Van den Bergh, *Calabi-Yau algebras and superpotentials*, *Selecta Mathematica* (2014), 1–49 (English).