

DÉFORMATIONS D'ALGÈBRES CALABI-YAU

GEOFFREY POWELL

RÉSUMÉ. On fixe $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0. L'objectif de ces notes est d'introduire le groupoïde de déformations $\mathrm{Def}_{A,\eta_0}(R)$ associé à une $\mathbb{k}$ -algèbre associative unitaire A munie d'un cycle $\eta_0 \in \overline{CC}_d^-(A)$, où R est une $\mathbb{k}$ -algèbre locale nilpotente, en suivant [Vd12, Section 6].

Les résultats principaux sont les suivants :

- (1) Proposition 2.6 : si (A, η_0) est d -Calabi-Yau, alors tout objet de $\mathrm{Def}_{A,\eta_0}(R)$ a la structure d'une algèbre d -Calabi-Yau.
- (2) Theorem 7.6 : il existe un morphisme de groupoïdes essentiellement surjectif

$$\mathcal{MC}_{\mathfrak{D}(A,\eta_0)}(R) \rightarrow \mathrm{Def}_{A,\eta_0}(R)$$



sans hypothèse Calabi-Yau.

En particulier, si (A, η_0) est d -Calabi-Yau, alors l'algèbre de Lie DG $\mathfrak{D}(A, \eta_0)$ contrôle les déformations Calabi-Yau de (A, η_0) .

1. LA CATÉGORIE $\mathfrak{Nilp}$

Définition 1.1. Soit $\mathfrak{Nilp}$ la catégorie des $\mathbb{k}$ -algèbres commutatives locales $(R, \mathfrak{m})$ telles que

- $R/\mathfrak{m} \cong \mathbb{k}$ (en tant que $\mathbb{k}$ -algèbres) ;
- $\dim_{\mathbb{k}} R < \infty$.

Les morphismes de $\mathfrak{Nilp}$ sont les morphismes de $\mathbb{k}$ -algèbres.

Lemme 1.2. Soit $R \in \mathfrak{Nilp}$; alors $\mathfrak{m}$ est nilpotent.

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{m}$; puisque $\dim_{\mathbb{k}} \mathfrak{m} < \infty$, il existe un polynomial $p(t) \neq 0$ de $\mathbb{k}[t]$ tel que $p(x) = 0$. De plus, puisque $(R, \mathfrak{m})$ est local, p n'a pas de terme constant (sinon $p(x) \in R$ serait inversible). On écrit $p(t) = t^n q(t)$, où $n > 0$ est maximal (donc $q(0) \neq 0$). Alors $q(x) \in R$ est inversible, donc $x^n = 0$. $\square$

Lemme 1.3. Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$ et Z un R -module. Alors $Z = 0$ si et seulement si $Z \otimes_R \mathbb{k} = 0$.

Démonstration. $(\Rightarrow)$ est évident. $(\Leftarrow)$ La condition $Z \otimes_R \mathbb{k} = 0$ est équivalent à $\mathfrak{m}Z = Z$. La nilpotence de $\mathfrak{m}$ (Lemme 1.2) entraîne que $Z = 0$. $\square$

La condition de platitude est importante dans la suite. On rappelle le résultat suivant :

Proposition 1.4. Soit $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$ et M un R -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) M est R -plat ;
- (2) $M \otimes_R^{\mathbb{L}} \mathbb{k} \xrightarrow{\cong} M \otimes_R \mathbb{k}$;
- (3) $\mathrm{Tor}_1^R(M, \mathbb{k}) = 0$.

Démonstration. Exercice ! $\square$

Date: 1^{er} juin 2015.

Lemme 1.5. Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$ et M un R -module plat. Alors

$$M \cong (M \otimes_R \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} R.$$

Démonstration. Choisir une section s (en tant que $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels) de la projection $M \twoheadrightarrow M \otimes_R \mathbb{k}$. Alors s induit un morphisme de R -modules :

$$s_R : (M \otimes_R \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} R \rightarrow M.$$

Par construction, $s_R \otimes_R \mathbb{k}$ est un isomorphisme.

Soit Z le conoyau de s_R ; alors $Z \otimes_R \mathbb{k} = 0$, donc $Z = 0$ par Lemme 1.3, ce qui établit la surjectivité de s_R .

Soit K le noyau de s_R . La platitude de M entraîne que $K \otimes_R \mathbb{k} = 0$ (exercice!), donc $K = 0$ par Lemme 1.3. $\square$

Remarque 1.6. Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$, A une $\mathbb{k}$ -algèbre et B une R -algèbre telle que

- $B \otimes_R \mathbb{k} \cong A$;
- B est R -plat.

Alors, en tant que R -module, $B \cong A \otimes_{\mathbb{k}} R$. Cet isomorphisme fournit une structure de R -algèbre sur $A \otimes_{\mathbb{k}} R$, par transport de structure.

2. LISSITUDE HOMOLOGIQUE

Rappelons la définition suivante qui intervient dans la définition d'une algèbre Calabi-Yau.

Définition 2.1. Soit R un anneau commutatif. Une R -algèbre B est homologique-ment lisse si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- B est R -plat;
- B est un B^e -module parfait (admet une B^e -résolution projective de type fini et de longueur finie).

Proposition 2.2. Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$ et $\mathcal{A}$ une R -algèbre. Pour tout idempotent $\bar{e} \in \mathcal{A} \otimes_R \mathbb{k}$ il existe un idempotent $e \in \mathcal{A}$ tel que $e \mapsto \bar{e}$ sous la réduction modulo $\mathfrak{m}$.

Démonstration. On choisit $f \in \mathcal{A}$ une préimage de $\bar{e}$, donc $f^2 - f \in \mathfrak{m}$ et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(f^2 - f)^n = 0$, par Lemme 1.2. En particulier, $f^n = f^{n+1}g$ où $g = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-f)^{i-1}$ commute avec f .

On pose $e = (fg)^n = f^n g^n$; alors on vérifie facilement que $e^2 = e$. De plus, $f^k \equiv \bar{e} \pmod{\mathfrak{m}} \ (\forall k > 0)$, donc $\bar{e}g \equiv -\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-\bar{e})^i = -\bar{e} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i = \bar{e}$. On en déduit que $e \equiv \bar{e}$. $\square$

Corollaire 2.3. Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$ et $\mathcal{A}$ une R -algèbre. Pour tout $\mathcal{A} \otimes_R \mathbb{k}$ -projectif $\bar{P}$ de type fini, il existe un $\mathcal{A}$ -projectif P de type fini tel que

$$P \otimes_R \mathbb{k} \cong \bar{P}.$$

Démonstration. Le projectif $\bar{P}$ est de la forme $\bar{e}(\mathcal{A} \otimes_R \mathbb{k})^{\oplus n}$ où $\bar{e}$ est un idempotent de

$$\text{End}_{\mathbb{k}}((\mathcal{A} \otimes_R \mathbb{k})^{\oplus n}) \cong \text{End}_R(\mathcal{A}^{\oplus n}) \otimes_R \mathbb{k}.$$

On relève $\bar{e}$ en $e \in \text{End}_R(\mathcal{A}^{\oplus n})$ à l'aide de la Proposition 2.2 et on pose $P := e\mathcal{A}^{\oplus n}$. Par construction, P est un $\mathcal{A}$ -projectif de type fini tel que $P \otimes_R \mathbb{k} \cong \bar{P}$. $\square$

Proposition 2.4. Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$, $\mathcal{A}$ une R -algèbre R -plate et M un $\mathcal{A}$ -module R -plat. Alors M est $\mathcal{A}$ -parfait si et seulement si $M \otimes_R \mathbb{k}$ est $\mathcal{A} \otimes_R \mathbb{k}$ -parfait.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si $P_{\bullet} \rightarrow M$ est une $\mathcal{A}$ -résolution projective de longueur finie telle que chaque P_n est de type fini, alors $P_{\bullet} \otimes_R \mathbb{k} \rightarrow M \otimes_R \mathbb{k}$ fournit une telle résolution sur $\mathcal{A} \otimes_R \mathbb{k}$ (le complexe est exact car M est R -plat).

($\Leftarrow$) Soit $\overline{P}_\bullet \rightarrow M \otimes_R \mathbb{k}$ une $A \otimes_R \mathbb{k}$ -résolution projective finie, de type fini. À l'aide du Corollaire 2.3 et du Lemme 1.3, en utilisant l'hypothèse que M est R -plat on peut construire (exercice!) un relèvement en une résolution projective de longueur finie $P_\bullet \rightarrow M$ telle que chaque P_n est projectif de type fini. $\square$

Corollaire 2.5. Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$ et B une R -algèbre R -plate. Alors B est homologiquement lisse si et seulement si $B \otimes_R \mathbb{k}$ l'est.

Démonstration. L'hypothèse entraîne que $B^e = B \otimes_R B^\circ$ est R -plat. Donc, B est un B^e -module parfait si et seulement si $B \otimes_R \mathbb{k}$ est un $(B \otimes_R \mathbb{k})^e \cong B^e \otimes_R \mathbb{k}$ -module parfait, par la Proposition 2.4. $\square$

2.1. Application aux déformations d'algèbres Calabi-Yau. Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$ et B une R -algèbre. La réduction modulo $\mathfrak{m}$ induit un morphisme de $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels :

$$HC_*^-(B) \otimes_R \mathbb{k} \rightarrow HC_*^-(B \otimes_R \mathbb{k})$$

où HC^- est l'homologie cyclique négative.

Proposition 2.6. [Vd12, Lemma 6.1] Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$, B une R -algèbre R -plate et $\eta \in HC_d^-(B)$ ($d \in \mathbb{N}$).

Si $(B \otimes_R \mathbb{k}, \bar{\eta})$ est une algèbre d -Calabi-Yau (où $\bar{\eta}$ est l'image de η dans $HC_d^-(B \otimes_R \mathbb{k})$), alors (B, η) est une algèbre d -Calabi-Yau.

Démonstration. Par le Corollaire 2.5, il suffit de montrer que le morphisme induit par η

$$\mathbb{R} \operatorname{Hom}_{B^e}(B, B^e) \rightarrow \Sigma^{-d} B$$

est un isomorphisme, ou de manière équivalente, que son cône $C\eta$ est trivial.

Les constructions montrent que $C\eta$ est un complexe parfait et l'hypothèse sur $\bar{\eta}$ entraîne que $C\eta \otimes_R^{\mathbb{L}} \mathbb{k} = 0$. Une généralisation des arguments utilisés ci-dessus montre alors que $C\eta = 0$. $\square$

3. DÉFORMATIONS

Soit A une $\mathbb{k}$ -algèbre associative unitaire.

Définition 3.1. Pour $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$, soit $\operatorname{Def}_A(R)$ le groupoïde :

- objets : (B, s) où B est une R -algèbre associative unitaire R -plate et s est un isomorphisme de $\mathbb{k}$ -algèbres $B \otimes_R \mathbb{k} \xrightarrow{\cong} A$;
- morphismes : $\varphi : (B, s) \rightarrow (B', s')$ un morphisme $\varphi : B \rightarrow B'$ de R -algèbres associatives compatible avec s, s' .

Remarque 3.2. Par définition $\varphi : B \rightarrow B'$ induit un isomorphisme $\varphi \otimes_R \mathbb{k}$ de $\mathbb{k}$ -algèbres, donc φ est lui-même un isomorphisme. Ainsi $\operatorname{Def}_A(R)$ est bien un groupoïde.

Remarque 3.3. L'homologie cyclique négative induit un foncteur

$$HC_*^-(_) : \operatorname{Def}_A(R) \rightarrow R\text{-}\mathfrak{Mod} \xrightarrow{\text{oubli}} \mathfrak{Ens}$$

tel que, pour $\varphi : (B, s) \rightarrow (B', s')$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} HC_*^-(B) & \xrightarrow{\varphi_*} & HC_*^-(B') \\ \downarrow & & \downarrow \\ HC_*^-(B \otimes_R \mathbb{k}) & \xrightarrow{s_*} HC_*^-(A) \xleftarrow{s'_*} & HC_*^-(B' \otimes_R \mathbb{k}) \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont induits par la réduction modulo $\mathfrak{m}$.

Le foncteur $HC_*^-(-)$ permet la définition d'un autre groupoïde (cf. Définition A.1) :

Définition 3.4. Pour $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$ et une classe $\eta_0 \in HC_d^-(A)$, soit $\text{Def}_{A, \eta_0}(R)$ le groupoïde :

- objets : $((B, s), \eta)$ où $(B, s) \in \text{Def}_A(R)$ et $\eta \in HC_d^-(B)$ tel que s induit $\eta \in HC_d^-(B) \mapsto \eta_0 \in HC_d^-(A)$;
- morphismes : $\varphi : ((B, s), \eta) \rightarrow ((B', s'), \eta')$ où φ est un morphisme de $\text{Def}_A(R)$ tel que $\varphi_*(\eta) = \eta'$.

Remarque 3.5. Proposition 2.6 entraîne que, si (A, η_0) est une algèbre d -Calabi-Yau et $((B, s), \eta) \in \text{Def}_{A, \eta_0}(R)$, alors (B, η) est une algèbre d -Calabi-Yau.

Donc, $\text{Def}_{A, \eta_0}(R)$ correspond bien à un groupoïde de déformations de (A, η) en algèbres Calabi-Yau.

Remarque 3.6.

- (1) On dispose du foncteur oubli :

$$\text{Def}_{A, \eta_0}(R) \rightarrow \text{Def}_A(R).$$

- (2) La naturalité en R fournit des pseudo-foncteurs

$$\text{Def}_{A, \eta_0}(-), \text{Def}_A(-) : \mathfrak{Nilp} \rightarrow \mathfrak{Groupoids}$$

ainsi qu'une transformation naturelle $\text{Def}_{A, \eta_0}(-) \rightarrow \text{Def}_A(-)$.

4. ÉLÉMENTS DE MAURER-CARTAN ET LE GROUPE DE JAUGE

Définition 4.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie différentielle graduée. L'ensemble des éléments de Maurer-Cartan est

$$\text{MC}(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g}^1 \mid dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0\}.$$

Si la différentielle $d = [\delta, -]$ pour $\delta \in \mathfrak{g}^1$, la condition Maurer-Cartan est équivalente à

$$[x + \delta, x + \delta] = 0.$$

Définition 4.2. Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente (non-graduée) et $\hat{U}(\mathfrak{n})$ la complétion de son algèbre enveloppante à l'idéal d'augmentation. Le groupe de jauge $G(\mathfrak{n})$ est le groupe des éléments *grouplike* de $\hat{U}(\mathfrak{n})$.

Remarque 4.3. La fonction exponentielle induit une bijection

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} &\xrightarrow{\cong} G(\mathfrak{n}) \\ x &\mapsto e^x. \end{aligned}$$

La structure de groupe sur $\mathfrak{n}$ est fournie explicitement par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff.

Si $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Lie abélienne, $G(\mathfrak{n}) \cong \mathfrak{n}$ en tant que groupe abéliens.

Lemme 4.4. Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente et M un $\mathfrak{n}$ -module nilpotent. Alors la structure de $\mathfrak{n}$ -module sur M induit une structure de $G(\mathfrak{n})$ -module sur M .

Démonstration. L'hypothèse entraîne que M est un $\hat{U}(\mathfrak{n})$ -module :

$$\hat{U}(\mathfrak{n}) \otimes M \rightarrow M$$

(ici on utilise l'hypothèse que M est un $\mathfrak{n}$ -module nilpotent). Par restriction aux éléments *grouplike* on obtient l'action recherchée. $\square$

Exemple 4.5. Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$ et $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie différentielle graduée. Par extension de scalaires, on dispose d'algèbres de Lie différentielles graduées :

$$\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m} \hookrightarrow \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} R.$$

De plus, $(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})^0$ est nilpotente et $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} R$ est un $(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})^0$ -module nilpotent.

Le groupe de jauge $G(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$ (par convention on omet le degré 0 de la notation) agit sur les ensembles d'éléments de Maurer-Cartan

$$\mathrm{MC}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}) \subset \mathrm{MC}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} R).$$



On utilise l'action adjointe *modifiée* - cf. [Vd12, (7.1) et (7.2)]. Si la différentielle est induite par $\delta \in \mathfrak{g}^1$, l'action modifiée est donnée par :

$$\exp(x) * y = \exp(x) \cdot_{\mathrm{ad}} (y + \delta) - \delta,$$

où $\cdot_{\mathrm{ad}}$ dénote l'action adjointe.

Notation 4.6. Dans la situation de l'Exemple 4.5, on écrit

$$\mathcal{MC}_{\mathfrak{g}}(R)$$

pour le groupoïde de transport associé à l'action de $G(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$ sur $\mathrm{MC}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$.

5. PRODUITS SEMI-DIRECTS ET L'ACTION DU GROUPE DE JAUGE

Lemme 5.1. [Vd12, Lemma 8.4] Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente et M un $\mathfrak{n}$ -module. Alors le produit semi-direct $\mathfrak{n} \ltimes M$ est une algèbre de Lie nilpotente et les inclusions $M \rightarrow \mathfrak{n} \ltimes M \leftarrow \mathfrak{n}$ induisent un isomorphisme de groupes de jauge

$$G(\mathfrak{n}) \ltimes M \xrightarrow{\cong} G(\mathfrak{n} \ltimes M),$$

où l'action de $G(\mathfrak{n})$ sur le groupe abélien M est fournie par le Lemme 4.4.

En particulier, une structure de $G(\mathfrak{n} \ltimes M)$ -module est déterminée par ses restrictions aux sous-groupes $M \hookrightarrow G(\mathfrak{n}) \ltimes M \hookleftarrow G(\mathfrak{n})$.

Exemple 5.2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie DG nilpotente et M un $\mathfrak{g}$ -module DG nilpotent. Alors le sous-groupe $M^0 \subset G(\mathfrak{g} \ltimes M)$ agit sur $\mathfrak{g} \ltimes M$ par l'action adjointe, donc

$$m(g', m') = (g', m' - g' \cdot_{\mathrm{ad}} m).$$



Ici il ne s'agit pas ici de l'action modifiée sur les éléments de Maurer-Cartan.

En particulier, si la différentielle de M est induit par l'action de $\delta \in \mathfrak{g}^1$ sur M (ie $dm = \delta \cdot m$), alors en degré 1

$$m(\delta, m') = (\delta, m' - dm),$$

c'est à dire que l'action de m modifie m' par un bord.

L'action du sous-groupe $G(\mathfrak{g})$ est donnée par :

$$e^g(g', m') = (e^g \cdot_{\mathrm{ad}} g', e^g \cdot_{\mathrm{ad}} m').$$

(En tant que $\mathfrak{g}$ -module, $\mathfrak{g} \ltimes M$ est une somme directe.)

Remarque 5.3. Voir [Vd12, Lemma 8.5] pour l'action modifiée sur les éléments de Maurer-Cartan.

On généralise l'Exemple 5.2 à l'aide du Lemme suivant (qui généralise également l'Exemple 4.5) :

Lemme 5.4. Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie DG et M un $\mathfrak{g}$ -module DG. Alors $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}$ est une algèbre de Lie DG nilpotente aussi bien que les algèbres de Lie DG

$$(\mathfrak{g} \ltimes M) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m} \subset (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}) \ltimes (M \otimes_{\mathbb{k}} R).$$

Cette inclusion induit un morphisme de groupes de gauge :

$$G((\mathfrak{g} \ltimes M) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}) \hookrightarrow G((\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}) \ltimes (M \otimes_{\mathbb{k}} R))$$

et l'inclusion des ensembles d'éléments de Maurer-Cartan

$$MC((\mathfrak{g} \ltimes M) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}) \hookrightarrow MC((\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}) \ltimes (M \otimes_{\mathbb{k}} R))$$

est $G((\mathfrak{g} \ltimes M) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$ -équivariant.

En particulier, $\mathcal{MC}_{\mathfrak{g}}(R)$ est un sous-groupoïde du groupoïde de transport associé à l'action de $G((\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}) \ltimes (M \otimes_{\mathbb{k}} R))$ sur $MC((\mathfrak{g} \ltimes M) \otimes_{\mathbb{k}} R)$.

Remarque 5.5. L'intérêt de considérer l'action de $G((\mathfrak{g} \ltimes M) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$ sur $MC((\mathfrak{g} \ltimes M) \otimes_{\mathbb{k}} R)$ est lorsque la différentielle de $\mathfrak{g} \ltimes M$ est induite par un élément de $(\mathfrak{g} \ltimes M)^1$. En ce cas, l'action du groupe de gauge devient limpide. En particulier, on peut appliquer l'identification de l'action de $M \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}$ fournie par Exemple 5.2.

6. DÉFORMATIONS ET LE FORMALISME DE MAURER-CARTAN

Théorème 6.1. Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$ et A une $\mathbb{k}$ -algèbre associative unitaire. Il existe une équivalence de groupoïdes

$$\Phi(R) : \mathcal{MC}_{\overline{\mathfrak{C}}(A)}(R) \xrightarrow{\cong} \text{Def}_A(R).$$

Notation 6.2. Pour A une $\mathbb{k}$ -algèbre unitaire, $\overline{A} := A/\mathbb{k}$.

Remarque 6.3. La R -algèbre $A \otimes_{\mathbb{k}} R$ est unitaire et $(A \otimes_{\mathbb{k}} R)/R \cong \overline{A} \otimes_{\mathbb{k}} R$.

Le complexe de Gerstenhaber réduit est :

$$\overline{\mathfrak{C}}^n(A) := \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\overline{A}^{\otimes n+1}, A) \subset \text{Hom}_{\mathbb{k}}(A^{\otimes n+1}, A)$$

où l'inclusion est induite par la projection $A \rightarrow \overline{A}$.

Notation 6.4. On pose

$$\begin{aligned} B &:= A \otimes_{\mathbb{k}} R \\ \mathfrak{g} &:= \overline{\mathfrak{C}}(A), \end{aligned}$$

donc $\mathfrak{g}$ est une $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie différentielle graduée.

En particulier $\mathfrak{g}^0 = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\overline{A}, A) \subset \text{End}_{\mathbb{k}}(A)$ en tant que $\mathbb{k}$ -algèbre de Lie (crochet commutateur sur $\text{End}_{\mathbb{k}}(A)$).

Lemme 6.5. L'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^0 \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m} &\rightarrow \text{Aut}^R(B) \\ \varphi &\mapsto 1_B + \varphi \end{aligned}$$

est bijective, où $\text{Aut}^R(B)$ est le sous-groupe des automorphismes de R -modules de $B = A \otimes_{\mathbb{k}} R$ qui sont compatibles avec l'unité $R \rightarrow B$.

Démonstration. Exercice ! □

Rappelons que le groupe de gauge $G(\mathfrak{g}^0 \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$ est le groupe des éléments *grouplike* de $\hat{U}(\mathfrak{g}^0 \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$. La bijection du Lemme 6.5 est compatible avec cette structure de groupe :

Proposition 6.6. (Cf. [Mar12, Proposition 4.1].) Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$ et A une $\mathbb{k}$ -algèbre associative unitaire. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\overline{A}, A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m} & \xrightarrow{\exp} & \hat{U}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\overline{A}, A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}) \\ \log(\cdot + 1) \uparrow \cong \downarrow \exp(\cdot) - 1 & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\overline{A}, A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m} & \xrightarrow[1_B + -]{} & \mathrm{End}_R(B, B) \end{array}$$

où le morphisme d'algèbres $\hat{U}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\overline{A}, A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}) \rightarrow \mathrm{End}_R(B, B)$ est induit par l'inclusion d'algèbres de Lie : $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\overline{A}, A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m} \hookrightarrow \mathrm{End}_R(B, B)$.

En particulier, la bijection du Lemme 6.5 fournit un isomorphisme de groupes :

$$G(\mathfrak{g}^0 \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}) \cong \mathrm{Aut}^R(B).$$

Démonstration. Essentiellement tautologique. $\square$

Remarque 6.7. $\hat{\mathfrak{Z}}$ Le morphisme $\log$ est défini en utilisant la structure d'algèbre associative de $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(A)$. Dans cette situation, on aurait pu utiliser la partie inférieure du diagramme pour définir la structure de groupe sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\overline{A}, A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}$; c'est l'approche utilisée dans [Mar12].

L'action de $G(\mathfrak{g}^0 \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$ sur $\mathrm{MC}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$ provient de l'action adjoint de $\mathfrak{g}^0$ sur $\mathfrak{g}$, autrement dit de la structure de $\hat{U}(\mathfrak{g}^0)$ -module de $\mathfrak{g}$.

Proposition 6.8. Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$ et A une $\mathbb{k}$ -algèbre associative unitaire. Pour $x \in \mathfrak{g}^0 \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}$ et $\varphi \in \overline{\mathfrak{C}}^n(A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\overline{A}^{\otimes n+1}, A) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m} \subset \mathrm{Hom}_R((A \otimes_{\mathbb{k}} R)^{\otimes n+1}, A \otimes_{\mathbb{k}} R)$,

$$\exp(x) \cdot_{\mathrm{ad}} \varphi = \exp(x) \circ \varphi \circ (\exp(-x))^{\otimes n+1},$$

où à droite, $\exp(x)$ et $\exp(-x)$ sont considérés comme des automorphismes (de R -modules) de $A \otimes_{\mathbb{k}} R$ et $\circ$ dénote la composition.

Démonstration. (Indications - cf. [Tho15] ou [Mar12, Lemma 4.7].) Le crochet de Gerstenhaber est défini en termes de la structure pré-Lie sur $\overline{\mathfrak{C}}(A)$, qu'on dénotera ici $\diamond$. En particulier :

$$[x, \varphi] := x \diamond \varphi - \varphi \diamond x.$$

Par récurrence, on obtient :

$$\mathrm{ad}(x)^n \varphi = \sum (-1)^i \binom{n}{i} x^{\circ n-i} \circ \varphi \diamond (x^{\diamond i}).$$

En développant $x^{\diamond i}$ et en prenant la somme, on obtient l'expression recherchée. $\square$

Démonstration du Théorème 6.1. (Indications.) Par la remarque 1.6, tout objet de $\mathrm{Def}_A(R)$ est isomorphe au R -module $A \otimes_{\mathbb{k}} R$ (s étant le morphisme canonique), muni d'une multiplication déformée.

Les éléments de $\mathrm{MC}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$ fournissent des déformations (en tant qu'algèbre unitaire) de la multiplication de A . Les propositions 6.6 et 6.8 montrent que l'action du groupe de jauge $G(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$ correspond aux morphismes de $\mathrm{Def}_A(R)$. $\square$

7. LE FORMALISME DE MAURER-CARTAN POUR (A, η_0)

On fixe $d \in \mathbb{N}$ et $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$. Soient A une $\mathbb{k}$ -algèbre associative et $\eta_0 \in \overline{\mathcal{CC}}_d^-(A)$ un cycle.

Remarque 7.1. $\hat{\mathfrak{Z}}$ Il n'y a aucune hypothèse de type Calabi-Yau sur A dans cette section.

Notation 7.2. On pose $M := \Sigma^{-d-1} \overline{CC}_\bullet^-(A)$, donc M est un $\mathfrak{g}$ -module différentiel gradué (cf. Notation 6.4).

Remarque 7.3. Rappelons que $\mathfrak{D}(A, \eta_0)$ est l'algèbre de Lie différentielle graduée $\mathfrak{g} \ltimes M$ munie de la différentielle tordue par l'élément de Maurer-Cartan $\eta_0 \in \overline{CC}_d^-(A)$.

Remarque 7.4. On a l'inclusion d'algèbres de Lie DG nilpotentes :

$$\mathfrak{D}(A, \eta_0) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m} \hookrightarrow (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}) \ltimes (M \otimes_{\mathbb{k}} R)$$

où l'algèbre de Lie DG à droite est munie de la différentielle tordue par

$$\eta_0 \otimes 1 \in M \otimes_{\mathbb{k}} R \cap \text{MC}((\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}) \ltimes (M \otimes_{\mathbb{k}} R)).$$

Ainsi Lemme 5.4 permet de simplifier l'étude du groupoïde $\mathcal{MC}_{\mathfrak{D}(A, \eta_0)}(R)$.

Lemme 7.5. Soit $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$, alors changement de base fournit un isomorphisme de complexes :

$$\overline{CC}_\bullet^-(A) \otimes_{\mathbb{k}} R \cong \overline{CC}_\bullet^-(A \otimes_{\mathbb{k}} R),$$

où $\overline{CC}_\bullet^-(A \otimes_{\mathbb{k}} R)$ est formé dans la catégorie des R -algèbres.

Démonstration. On utilise le fait que R est de dimension finie sur $\mathbb{k}$, donc $- \otimes_{\mathbb{k}} R$ commute au produit dans la définition de $\overline{CC}_\bullet^-$. $\square$

La projection d'algèbres de Lie différentielle graduée $\mathfrak{D}(A, \eta_0) \twoheadrightarrow \overline{\mathfrak{C}}(A)$ induit un morphisme de groupoïdes :

$$\mathcal{MC}_{\mathfrak{D}(A, \eta_0)}(R) \rightarrow \mathcal{MC}_{\overline{\mathfrak{C}}(A)}(R) \cong \text{Def}_A(R).$$

Théorème 7.6. [Vd12, Proposition 6.2, Theorem 8.1] Soient $(R, \mathfrak{m}) \in \mathfrak{Nilp}$, A une $\mathbb{k}$ -algèbre associative unitaire et $\eta_0 \in \overline{CC}_d^-(A)$ un cycle. Il existe un morphisme de groupoïdes $\Phi(R)$ qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{MC}_{\mathfrak{D}(A, \eta_0)}(R) & \longrightarrow & \mathcal{MC}_{\overline{\mathfrak{C}}(A)}(R) \\ \Phi(R) \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Def}_{A, \eta_0}(R) & \longrightarrow & \text{Def}_A(R) \end{array}$$

et $\Phi(R)$ est

- (1) essentiellement surjectif sur les objets ;
- (2) surjectif sur les morphismes.

Démonstration. Par le Lemme A.3, pour définir le morphisme de groupoïdes

$$\Phi(R) : \mathcal{MC}_{\mathfrak{D}(A, \eta_0)}(R) \rightarrow \text{Def}_{A, \eta_0}(R)$$

il suffit de donner le foncteur

$$\mathcal{MC}_{\mathfrak{D}(A, \eta_0)}(R) \rightarrow \text{Def}_A(R)$$

ainsi que, pour chaque élément de $\mathcal{MC}_{\mathfrak{D}(A, \eta_0)}(R)$, d'une classe dans le groupe associé d'homologie cyclique négative $HC_d^-(B)$, naturelle par rapport aux morphismes de $\mathcal{MC}_{\mathfrak{D}(A, \eta_0)}(R)$.

Le foncteur est fourni par la composition :

$$\mathcal{MC}_{\mathfrak{D}(A, \eta_0)}(R) \rightarrow \mathcal{MC}_{\overline{\mathfrak{C}}(A)}(R) \rightarrow \text{Def}_A(R).$$

On vérifie facilement que la donnée d'une classe de $\text{MC}(\mathfrak{D}(A, \eta_0) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$ est équivalente à la donnée

- (1) d'une classe de $MC(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$, qui détermine un produit déformé $\tilde{\mu}$ sur $A \otimes_{\mathbb{k}} R$, donc l'objet associé $(A \otimes_{\mathbb{k}} R, \tilde{\mu})$ de $\text{Def}_A(R)$;
- (2) d'une classe $\tilde{\eta}$ de $(M \otimes_{\mathbb{k}} R)^1 \cong \overline{CC}_d^-(A \otimes_{\mathbb{k}} R)$ (l'isomorphisme est fourni par Lemme 7.5) qui est une déformation de la classe η_0 et qui est un cycle, c'est à dire que :

$$L_{\tilde{\mu}} \tilde{\eta} = 0.$$

On lui associe sa classe d'homologie $[\tilde{\eta}] \in HC_d^-(A \otimes_{\mathbb{k}} R, \tilde{\mu})$.

Pour compléter la construction de $\Phi(R)$, il suffit de montrer la naturalité de ces classes par rapport aux morphismes de $\mathcal{MC}_{\mathfrak{D}(A, \eta_0)}(R)$. Ceci se fait en deux étapes, qui correspondent respectivement aux actions des sous-groupes $G(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$ et $M^0 \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}$ du groupe de jauge $G(\mathfrak{D}(A, \eta_0) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$.

- (1) Pour $G(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m})$, il suffit de démontrer l'analogue de la Proposition 6.8 : que l'action adjointe du groupe de jauge sur $\overline{CC}_d^-(A \otimes_{\mathbb{k}} R)$ correspond bien à l'action de $\text{Aut}^R(A \otimes_{\mathbb{k}} R)$. On laisse au soin du lecteur attentif la démonstration de ce fait (il s'agit d'un bon exercice).
- (2) Le cas de $M^0 \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}$ découle de l'Exemple 5.2, qui montre que la classe dans $HC_d^-(A \otimes_{\mathbb{k}} R)$ reste inchangée.

Il est facile de vérifier que $\Phi(R)$ est essentiellement surjectif sur les objets (on choisit un cycle qui représente la classe d'homologie cyclique) et qu'il est surjectif sur les morphismes. $\square$

Remarque 7.7.  $\Phi(R)$ n'est pas une équivalence de groupoïdes. En effet, on a rajouté des automorphismes par rapport à $\text{Def}_{A, \eta_0}(R)$, qui proviennent des cycles de $M^0 \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{m}$.

ANNEXE A. UN LEMME CATÉGORIQUE

Définition A.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur. La catégorie $\mathcal{C}_F$ a pour objets les couples $(X \in \text{ob } \mathcal{C}, y \in F(X))$; un morphisme $(X, y) \rightarrow (X', y')$ est la donnée d'un morphisme $f : X \rightarrow X'$ de $\mathcal{C}$ tel que $F(f)y = y'$.

La projection canonique $\mathcal{C}_F \rightarrow \mathcal{C}$ envoie (X, y) à X .

Lemme A.2. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur. Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, alors $\mathcal{C}_F$ est un groupoïde.

Démonstration. Exercice. $\square$

Lemme A.3. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur. Un foncteur $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_F$ est équivalent à la donnée d'un foncteur $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ainsi que

$$y_A \in FG(A), \forall A \in \text{ob } \mathcal{D}$$

tel que, pour $\alpha : A \rightarrow A'$ morphisme de $\mathcal{D}$, $FG(\alpha)y_A = y_{A'}$.

Démonstration. Exercice. $\square$

RÉFÉRENCES

- [Mar12] Martin Markl, *Deformation theory of algebras and their diagrams*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 116, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. MR 2931635
- [Tho15] Jean-Claude Thomas, *Déformations d'une algèbre associative*, Groupe de travail Angers-Nantes 2014-2015, 2015.
- [Vd12] M. Van den Bergh and L. de Thanhoffer de Völcsey, *Calabi-Yau Deformations and Negative Cyclic Homology*, ArXiv 1201.1520 :math.RA (2012).