

L'ALGÈBRE DE LIE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE $\mathfrak{D}(A, \eta)$ ET SON HOMOLOGIE

GEOFFREY POWELL

1. RAPPELS

On fixe

- R , l'anneau commutatif de base ;
- A une R -algèbre ;
- $\bar{A} := A/R$, si A est unitaire.

Convention 1.1. Pour V un R -module, ΣV est V concentré en degré *homologique* 1.

- (1) Les cochaînes de Hochschild :

$$\mathfrak{C}(A) := \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_R((\Sigma A)^{\otimes n}, \Sigma A)$$

sont munis du degré *cohomologique* $|x| = n - 1$ pour

$$x \in \mathfrak{C}^{n-1}(A) := \text{Hom}_R((\Sigma A)^{\otimes n}, \Sigma A).$$

Cochaînes normalisées : $\bar{\mathfrak{C}}(A) := \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_R((\Sigma \bar{A})^{\otimes n}, \Sigma A)$

- (2) Le crochet de Gerstenhaber est compatible avec cette graduation :

$$[-, -] : \mathfrak{C}^m(A) \otimes \mathfrak{C}^n(A) \rightarrow \mathfrak{C}^{m+n}(A).$$

- (3) Le produit de A induit $\mu \in \mathfrak{C}^1$:

$$\begin{aligned} \mu : \Sigma A \otimes \Sigma A &\rightarrow \Sigma A \\ a_1 \otimes a_2 &\mapsto -a_1 a_2 \end{aligned}$$

(où le signe provient des signes de Koszul, à cause de la suspension).

- (4) La différentielle $d := [\mu, -] : \mathfrak{C}^n(A) \rightarrow \mathfrak{C}^{n+1}(A)$.

Notation 1.2. Les chaînes de Hochschild :

$$C_\bullet(A) := \bigoplus_{n \geq 0} A \otimes (\Sigma A)^{\otimes n}$$

avec degré *homologique* $C_n(A) := A \otimes (\Sigma A)^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$. Version normalisée :

$$\bar{C}_\bullet(A) := \bigoplus_{n \geq 0} A \otimes (\Sigma \bar{A})^{\otimes n}.$$

Remarque 1.3. Pour éviter quelques ennuis techniques, ce serait plus commode de travailler avec :

$$\Sigma C_\bullet(A) \cong \bigoplus_{n \geq 0} \Sigma A \otimes (\Sigma A)^{\otimes n},$$

toutefois en distinguant le premier facteur. (Cf. la définition du cap produit et de la dérivée de Lie.)

(1) Cap produit :

$$i : \Sigma^{-1}\mathfrak{C}^k(A) \otimes C_n(A) \rightarrow C_{n-(k+1)}(A)$$

est donné par $i_\varphi(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = a_0 \varphi(a_1 \otimes \dots \otimes a_{k+1}) \otimes a_{k+2} \otimes \dots \otimes a_n$,
où $i_\varphi := i(\varphi \otimes -)$; i_φ est de degré cohomologique $|\varphi| + 1$.

(2) La dérivée de Lie définit une action de Lie

$$L : \mathfrak{C}^k(A) \otimes C_n(A) \rightarrow C_{n-k}(A)$$

donc $L_x := L(x \otimes -)$ est de degré cohomologique $|x|$.

(3) La différentielle de Hochschild est $b := L_\mu : C_n(A) \rightarrow C_{n-1}(A)$ (de degré cohomologique 1). À partir des définitions, il est formel que $(C_\bullet(A), b)$ est un DG-Lie module sur $(\mathfrak{C}^\bullet(A), d)$. En particulier, $[b, L_x] = L_{dx}$.

(4) Si A est unitaire, l'opérateur de Connes $B : C_n(A) \rightarrow C_{n+1}(A)$ (de degré cohomologique -1) envoie $a_0 \otimes \dots \otimes a_n$ à

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{ni} 1 \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_{i-1} + \\ \sum_{i=0}^n (-1)^{n(i+1)} a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_{i-2}.$$

Lorsqu'on travaille avec $\overline{C}_\bullet(A)$, il suffit de considérer le premier terme.

Remarque 1.4. Il est un bon exercice de vérifier que $[L_x, L_y] = L_{[x, y]}$; conceptuellement la démonstration devient plus claire lorsqu'on note que l'expression de L_x est 'normalisée' par la condition que b_0 (dans la notation de [Vd12]) contribue toujours au premier facteur tensoriel.

Le cap produit et la dérivée de Lie induisent :

$$i : \Sigma^{-1}\overline{\mathfrak{C}}^k(A) \otimes \overline{C}_n(A) \rightarrow \overline{C}_{n-(k+1)}(A) \\ L : \overline{\mathfrak{C}}^k(A) \otimes \overline{C}_n(A) \rightarrow \overline{C}_{n-k}(A)$$

Proposition 1.5.

$$B^2 = 0 \\ bB + Bb = 0 \\ [b, i_x] + i_{dx} = 0$$

De plus, pour $x \in \overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A)$ et l'action de L_x sur $\overline{C}_\bullet(A)$,

$$[B, L_x] = 0.$$

Le complexe cyclique négatif (normalisé) est :

$$\overline{CC}_\bullet^-(A) := \overline{C}_\bullet(A)[[u]]$$

(où u est de degré cohomologique 2), muni de la différentielle $b + uB$. Le cap produit i_x et la dérivée de Lie L_x ($x \in \overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A)$) sont définis sur $\overline{CC}_\bullet^-(A)$ par extension u -linéaire.

Corollaire 1.6. Pour $x \in \overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A)$,

$$[b + uB, L_x] = L_{dx}.$$

En particulier, $\overline{CC}_\bullet^-(A)$ est un DG-Lie module sur $\overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A)$.

Remarque 1.7. Par construction, on dispose d'une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \rightarrow u\overline{CC}_\bullet^-(A) \rightarrow \overline{CC}_\bullet^-(A) \rightarrow \overline{C}_\bullet(A) \rightarrow 0.$$

(En fait, de DG-Lie modules sur $\overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A)$.)

2. L'OPÉRATEUR DE RINEHART

Tamarkin et Tsygan [TT05] introduisent l'opérateur (qu'ils attribuent à Rinehart) :

$$S : \overline{\mathfrak{C}}^k(A) \otimes \overline{C}_n(A) \rightarrow \overline{C}_{n-k+1}(A)$$

défini explicitement comme suit

$$S_x(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) := \sum_{m,j} (-1)^{\bullet} \otimes a_{m+1} \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_j \otimes x(a_{j+1}, \dots, a_{j+|x|+1}) \otimes a_{j+|x|+2} \otimes \dots \otimes a_m$$

où $S_x := S(x \otimes -)$ et la somme est prise sur les permutations cycliques pour lesquelles a_0 apparaît à la gauche de x - explicitement $j \geq 0$ et $j + |x| + 1 \leq m$; le signe est de Koszul.

L'opérateur S_x est de degré *cohomologique* $|x| - 1$. (Le fait d'augmenter la longueur des tenseurs diminue le degré cohomologique par 1.)

Notation 2.1. Pour $x \in \overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A)$, soit

$$I_x := i_x + uS_x \in \text{End}(\overline{CC}_\bullet^-(A)),$$

qui est un opérateur linéaire de degré *cohomologique* $|x| + 1$.

Proposition 2.2 (Équation (4.8)). *Pour $x \in \overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A)$,*

$$[b + uB, I_x] + I_{dx} = uL_x.$$

Démonstration. (Indications.) Il suffit de montrer que

$$[B, i_x] + [b, S_x] = L_x - S_{dx} \in \text{End}(\overline{C}_\bullet(A)).$$

Ceci est un exercice amusant : en particulier, les signes étant de Koszul, on peut donner une démonstration 'diagrammatique'. $\square$

Remarque 2.3. Dans cet exposé, on n'a pas besoin du [Vd12, Lemma 4.2], qui interviendra plus tard, dans la démonstration du [Vd12, Theorem 10.2].

3. L'ALGÈBRE DE LIE $\mathfrak{D}(A, \eta)$

Rappelons que, pour M un DG-Lie module sur l'algèbre de Lie différentielle graduée $\mathfrak{g}$, on dispose de l'extension semi-directe (en considérant M comme algèbre de Lie abélienne) $\mathfrak{g} \ltimes M$, dont le complexe sous-jacent est $\mathfrak{g} \oplus M$ et le crochet

$$[(g_1, m_1), (g_2, m_2)] = ([g_1, g_2], g_1 m_2 - (-1)^{|g_2||m_1|} g_2 m_1)$$

(signe de Koszul). Munie de cette structure, $\mathfrak{g} \ltimes M$ est une algèbre de Lie différentielle graduée.

Exemple 3.1. On peut appliquer cette construction à $\mathfrak{g} := \overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A)$ et $M := \overline{CC}_\bullet^-(A)$, ce qui nous fournit le produit semi-direct :

$$\overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A) \ltimes \overline{CC}_\bullet^-(A).$$

Remarque 3.2. Si M est un DG-Lie module sur $\mathfrak{g}$, alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\Sigma^n M$ est un DG-Lie module sur $\mathfrak{g}$, donc on peut former

$$\mathfrak{g} \ltimes \Sigma^n M.$$

Hypothèse 3.3. Soit $\eta_0 \in \overline{CC}_d^-(A)$ un cycle de degré homologique $d \in \mathbb{N}$.

Pour ce $d \in \mathbb{N}$, on considère l'algèbre de Lie différentielle graduée :

$$(\overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A) \ltimes \Sigma^{-(d+1)}\overline{CC}_\bullet^-(A), d).$$

Par construction, la classe $\omega := \Sigma^{-(d+1)}\eta_0$ fournit un élément de degré *cohomologique* 1, telle que :

$$\begin{aligned} d\omega &= 0 \\ [\omega, \omega] &= 0. \end{aligned}$$

(Rappeler que $\Sigma^{-(d+1)}\overline{CC}_\bullet^-(A)$ est une sous-algèbre de Lie abélienne.)

Par conséquent, ω satisfait l'équation de Maurer-Cartan et

$$d_{\eta_0} := d + [\omega, -]$$

est une différentielle.

Remarque 3.4. La différentielle d_{η_0} restreinte à $\overline{\mathfrak{C}}(A)$ (considéré comme facteur direct en tant que R -module gradué de $\overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A) \ltimes \Sigma^{-(d+1)}\overline{CC}_\bullet^-(A)$) est induite par $\mu + \omega$, c'est à dire :

$$d_{\eta_0}|_{\overline{\mathfrak{C}}(A)} = [\mu + \omega, -].$$

Définition 3.5. Soit $\mathfrak{D}(A, \eta_0)$ l'algèbre de Lie différentielle graduée :

$$(\overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A) \ltimes \Sigma^{-(d+1)}\overline{CC}_\bullet^-(A), d_{\eta_0}).$$

Remarque 3.6.

- (1) Pour effectuer cette construction, on n'a que besoin d'un cycle η_0 du bon degré.
- (2) La classe d'isomorphisme de l'algèbre de Lie différentielle graduée $\mathfrak{D}(A, \eta_0)$ ne dépend que de $[\eta_0] \in HC_d^-(A)$.

Lemme 3.7. L'opérateur $[\omega, -]$ agit trivialement sur le sous-complexe $\Sigma^{-(d+1)}\overline{CC}_\bullet^-(A)$ et induit le morphisme :

$$\begin{aligned} [\omega, -] : \overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A) &\rightarrow \overline{CC}_\bullet^-(A) \\ x &\mapsto (-1)^{|x|+1} L_x \omega. \end{aligned}$$

En particulier, $\Sigma^{-(d+1)}\overline{CC}_\bullet^-(A)$ est un sous-complexe de $\mathfrak{D}(A, \eta_0)$ (et sous-algèbre de Lie abélienne).

4. LE MORPHISME Ψ_{η_0}

Proposition 4.1. Soit $\eta_0 \in \overline{CC}_d^-(A)$ un cycle, $d \in \mathbb{N}$. Alors, il existe un morphisme de complexes

$$\Psi_{\eta_0} : \mathfrak{D}(A, \eta_0) \rightarrow \Sigma^{-d+1}\overline{CC}_\bullet^-(A)$$

qui induit un morphisme de suites exacte courte de complexes

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^{-(d+1)}\overline{CC}_\bullet^-(A) & \longrightarrow & \mathfrak{D}(A, \eta_0) & \longrightarrow & \overline{\mathfrak{C}}^\bullet(A) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \Psi_{\eta_0} & & \downarrow \overline{\Psi_{\eta_0}} \\ u\Sigma^{-d+1}\overline{CC}_\bullet^-(A) & \longrightarrow & \Sigma^{-d+1}\overline{CC}_\bullet^-(A) & \longrightarrow & \Sigma^{-d+1}\overline{C}_\bullet(A), \end{array}$$

où $\overline{\Psi_{\eta_0}}$ induit le cap produit (à signe près) en homologie.

Démonstration. Il suffit d'étendre l'isomorphisme évident :

$$\Sigma^{-(d+1)} \overline{CC}_{\bullet}^{-}(A) \xrightarrow{\cong} u \Sigma^{-d+1} \overline{CC}_{\bullet}^{-}(A)$$

(rappeler que u est de degré *cohomologique* 2) à un morphisme de complexes.

Considérons le morphisme linéaire

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{C}}^{\bullet}(A) &\rightarrow \Sigma^{-d+1} \overline{CC}_{\bullet}^{-}(A) \\ x &\mapsto \Psi(x) := (-1)^{|x|-1} I_x(\omega). \end{aligned}$$

En passant au quotient par $u \Sigma^{-d+1} \overline{CC}_{\bullet}^{-}(A)$, ceci induit

$$\overline{\Psi} : x \mapsto (-1)^{|x|-1} i_x(\omega),$$

ce qui induit le cap produit en homologie.

Il ne reste que à vérifier la compatibilité avec la différentielle. Proposition 2.2 fournit la relation :

$$[b + uB, I_x] + I_{dx} = uL_x.$$

En prenant la restriction aux $(b + uB)$ -cycles, ceci donne

$$(b + uB) \circ I_x \sim uL_x - I_{dx}.$$

En particulier, pour $x \in \overline{\mathfrak{C}}^{\bullet}(A)$, puisque $\Psi(x) = \pm I_x(\omega)$ et ω est un cycle (par hypothèse),

$$\begin{aligned} (b + uB)\Psi(x) &= (-1)^{|x|-1} \{uL_x(\omega) - I_{dx}(\omega)\} \\ &= (-1)^{|dx|-1} I_{dx}(\omega) + (-1)^{|x|+1} uL_x(\omega). \end{aligned}$$

Alors, en utilisant l'identification $d_{\eta_0} x = dx + (-1)^{|x|+1} L_x \omega$ fournie par le Lemme 3.7, on obtient que Ψ_{η_0} est un morphisme de complexes. $\square$

Théorème 4.2. *Pour le couple (A, η_0) , les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1)

$$\Psi_{\eta_0} : \mathfrak{D}(A, \eta_0) \rightarrow \Sigma^{-d+1} \overline{CC}_{\bullet}^{-}(A)$$

est un quasi-isomorphisme ;

(2) *l'image $\eta \in HH_d(A)$ de $[\eta_0] \in HC_d^{-}(A)$ induit un isomorphisme*

$$- \cap \eta : HH^i(A) \xrightarrow{\cong} HH_{d-i}(A).$$

Démonstration. Par le lemme des cinq, Ψ_{η_0} est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\overline{\Psi_{\eta_0}}$ en est un et $\overline{\Psi_{\eta_0}}$ induit (à signe près) le cap produit en homologie. $\square$

Rappeler la définition [Vd12, Definition 5.9] d'une algèbre d -Calabi-Yau.

Corollaire 4.3. *Si (A, η_0) est une algèbre d -Calabi-Yau, alors Ψ_{η_0} est un quasi-isomorphisme.*

RÉFÉRENCES

- [TT05] Dmitri Tamarkin and Boris Tsygan, *The ring of differential operators on forms in noncommutative calculus*, Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 105–131. MR 2131013 (2005m :16014)
- [Vd12] M. Van den Bergh and L. de Thanhoffer de Völcsey, *Calabi-Yau Deformations and Negative Cyclic Homology*, ArXiv 1201.1520 :math.RA (2012).