

LA SUITE EXACTE SPIRALE ET CONNEXITÉ COSIMPLICIALE

GEOFFREY POWELL

1. RAPPELS

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ; on dénote par $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns$ les morphismes de $\mathcal{C}$.

Notation 1.1. Soit $\mathcal{S}$ la catégorie des ensembles simpliciaux, $\Delta^{\text{op}} \mathcal{E}ns$.

Une catégorie $\mathcal{C}$ enrichie dans $\mathcal{S}$ est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur

$$\text{map}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$$

tel que $\text{map}(-, -)_0 = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)$ et il existe une loi de composition pour $\text{map}(-, -)$ qui est associative et unitaire.

De plus, $\mathcal{C}$ est tensorisée et cotensorisée sur $\mathcal{S}$ s'il existe

$$\begin{aligned} \otimes & : \mathcal{C} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C} \\ \text{hom}(-, -) & : \mathcal{S}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \end{aligned}$$

qui satisfont les isomorphismes naturels suivants :

$$\begin{aligned} X \otimes (K \times L) & \cong (X \otimes K) \otimes L \\ \text{hom}(K \times L, X) & \cong \text{hom}(K, \text{hom}(L, X)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes K, Y) & \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{hom}(K, Y)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{S}}(K, \text{map}(X, Y)) \end{aligned}$$

pour $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $K, L \in \text{Ob } \mathcal{S}$.

Remarque 1.2. On dira que $\mathcal{C}$ est munie de la structure d'une *catégorie simpliciale* (cf. [GJ09, Section II.2]).

Remarque 1.3. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{map}(X, Y)_n = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes \Delta^n, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{hom}(\Delta^n, Y))$$

où $\Delta^n \in \text{Ob } \mathcal{S}$ est le représentable $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(-, [n])$.

1.1. Structure simpliciale interne. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie simpliciale et $c\mathcal{M}$ la catégorie des objets cosimpliciaux de $\mathcal{M}$.

La catégorie $c\mathcal{M}$ possède une structure simpliciale *interne*, définie par :

$$\begin{aligned} (X_{\bullet} \otimes^{\text{int}} K)^n & := X^n \otimes K \\ \text{hom}^{\text{int}}(K, X^{\bullet})^n & := \text{hom}(K, X^n) \end{aligned}$$

pour $X^{\bullet} \in \text{Ob } c\mathcal{M}$ et $K \in \text{Ob } \mathcal{S}$.

On dispose des foncteurs $c : \mathcal{M} \rightarrow c\mathcal{M}$ (structure constante), et $(-)^0 : c\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $X^{\bullet} \mapsto X^0$.

Proposition 1.4. [BRS14, Proposition A.3] Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèle simpliciale, alors $c\mathcal{M}^{\text{Reedy}}$, munie de la structure simpliciale interne, est une catégorie de modèle simpliciale. De plus les foncteurs $c, (-)^0$ induisent une adjonction de Quillen :

$$(-)^0 : c\mathcal{M}^{\text{Reedy}} \rightleftarrows \mathcal{M} : c.$$

1.2. Structure simpliciale externe. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie bicomplète ; alors $\mathcal{M}$ est tensorisée et cotensorisée sur $\mathcal{E}ns$ par :

$$\begin{aligned} X \otimes T &:= \sqcup_T X \\ \text{hom}(T, X) &:= \prod_T X \end{aligned}$$

pour $X \in \text{Ob } \mathcal{M}$ et $T \in \text{Ob } \mathcal{E}ns$.

Le coend sur Δ et $\otimes$ induisent $\otimes_\Delta : c\mathcal{M} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$. Alors, on définit $\otimes^{\text{ext}} : c\mathcal{M} \times \mathcal{S} \rightarrow c\mathcal{M}$ par

$$(X^\bullet \otimes^{\text{ext}} K)^n := X^\bullet \otimes_\Delta (K \times \Delta^n)$$

pour $n \in \mathbb{N}$, $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{M}$ et $K \in \text{Ob } \mathcal{S}$.

De même la structure cosimpliciale diagonale et hom induisent

$$\text{hom}^{\text{ext}}(-, -) := \text{diag}(\text{hom}(-, -)) : \mathcal{S}^{\text{op}} \times c\mathcal{M} \rightarrow c\mathcal{M}.$$

Explicitement, $\text{hom}^{\text{ext}}(K, X^\bullet)^n = \text{hom}(K_n, X^n)$.

Lemme 1.5. [BRS14]. La catégorie $c\mathcal{M}$ est une catégorie simpliciale pour $\otimes^{\text{ext}}$, hom^{ext} et $\text{map}^{\text{ext}}(-, -)$ défini pour $X^\bullet, Y^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{M}$ et $n \in \mathbb{N}$ par

$$\text{map}^{\text{ext}}(X^\bullet, Y^\bullet)^n := \text{Hom}_{c\mathcal{M}}(X^\bullet \otimes^{\text{ext}} \Delta^n, Y^\bullet).$$

Démonstration. (Indications.) [BRS14, A.12] fournit les isomorphismes naturels :

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}}(K, \text{map}^{\text{ext}}(X^\bullet, Y^\bullet)) \cong \text{Hom}_{c\mathcal{M}}(X^\bullet \otimes^{\text{ext}} K, Y^\bullet) \cong \text{Hom}_{c\mathcal{M}}(X^\bullet, \text{hom}^{\text{ext}}(K, Y^\bullet))$$

pour $K \in \text{Ob } \mathcal{S}$. □

Exemple 1.6. Soient $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{M}$ et $Y \in \text{Ob } \mathcal{M}$. Alors

$$\text{map}^{\text{ext}}(X^\bullet, cY)^n = \text{Hom}_{c\mathcal{M}}(X^\bullet \otimes^{\text{ext}} \Delta^n, cY) = \text{Hom}_{\mathcal{M}}(X^\bullet \otimes_\Delta \Delta^n, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{M}}(X^n, Y),$$

car c est l'adjoint à droite de $(-)^0$ et $X^\bullet \otimes_\Delta \Delta^n$ s'identifie canoniquement à X^n (version coend de Yoneda).

Remarque 1.7.  Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèle. La structure simpliciale externe n'est pas en général compatible avec la structure de Reedy sur $c\mathcal{M}$.

Néanmoins, on dispose d'une partie des propriétés de structure de catégorie de modèle simpliciale sur $c\mathcal{M}$. Le résultat suivant est fondamental.

Lemme 1.8. [BRS14, A.13] [GJ09] Soient $\mathcal{M}$ une catégorie de modèle et $f : X^\bullet \rightarrow^{\text{Reedy}} Y^\bullet$ une cofibration de Reedy de $c\mathcal{M}$ et $j : K \rightarrow L$ une cofibration de $\mathcal{S}$, alors

$$(X^\bullet \otimes^{\text{ext}} L) \sqcup_{X^\bullet \otimes^{\text{ext}} K} Y^\bullet \otimes^{\text{ext}} K \rightarrow^{\text{Reedy}} Y^\bullet \otimes^{\text{ext}} L$$

est une cofibration de Reedy. Si, de plus, f est une cofibration triviale (de Reedy), elle est également une équivalence faible (de Reedy).

Exemple 1.9. Soient $Y^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{M}$ un objet cofibrant (pour la structure de Reedy) et $j : K \rightarrow L$ une cofibration de $\mathcal{S}$, alors

$$Y^\bullet \otimes^{\text{ext}} j : Y^\bullet \otimes^{\text{ext}} K \rightarrow^{\text{Reedy}} Y^\bullet \otimes^{\text{ext}} L$$

est une cofibration de Reedy.

1.3. La variante pointée.

Notation 1.10. Soient $*$ l'objet terminal de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_*$ la catégorie des objets pointés de $\mathcal{M}$.

Définition 1.11. Soient $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{M}$, $Z^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{M}_*$ et $K \in \text{Ob } \mathcal{S}$. On définit

$$\begin{aligned} X^\bullet \otimes K &:= (X^\bullet \otimes^{\text{ext}} K) / (X^\bullet \otimes^{\text{ext}} *) \in \text{Ob } c\mathcal{M}_* \\ \overline{\text{hom}}(K, Z^\bullet) &:= \text{fib}\{\text{hom}^{\text{ext}}(K, Z^\bullet) \rightarrow \text{hom}^{\text{ext}}(*, Z^\bullet) = Z^\bullet\} \in \text{Ob } c\mathcal{M}, \end{aligned}$$

où les morphismes sont induits par $*$ $\rightarrow$ K .

Remarque 1.12. Si $X^\bullet$ est Reedy cofibrant, alors l'inclusion

$$X^\bullet \otimes^{\text{ext}} * \rightarrow^{\text{Reedy}} X^\bullet \otimes^{\text{ext}} K$$

est une cofibration de Reedy.

Notation 1.13. Pour $t \in \mathbb{N}$, on fixe le modèle standard suivant pour la sphère S^t dans $\mathcal{S}$:

$$S^t := \Delta^t / \partial \Delta^t \in \mathcal{S}.$$

Définition 1.14. Soient $t \in \mathbb{N}$, $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{M}$ et $Z^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{M}_*$.

- (1) La t -ième suspension extérieure de $X^\bullet$ est $\Sigma_{\text{ext}}^t X^\bullet := X^\bullet \otimes^{\text{ext}} \Delta^t / \partial \Delta^t$.
- (2) Le t -ième espace des lacets extérieur est $\Omega_{\text{ext}}^t Z^\bullet := \overline{\text{hom}}(\Delta^t / \partial \Delta^t, Z^\bullet)$.

Rappelons (avec la précision sur la structure simpliciale) le théorème principal sur la structure de catégorie de modèle de $\mathcal{G}$ -résolution sur la catégorie $c\mathcal{M}$:

Théorème 1.15. [Bou03] [BRS14, Theorem 3.2] Soient $\mathcal{M}$ une catégorie de modèle propre à gauche et $\mathcal{G}$ une classe de modèles injectifs pour $\text{Ho}(\mathcal{M})$. Alors, la catégorie $c\mathcal{M}$ admet la $\mathcal{G}$ -résolution structure de modèle qui est

- (1) propre à gauche ;
- (2) simpliciale (par rapport à la structure simpliciale externe).

On dénotera cette structure de modèle par $c\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$.

Remarque 1.16. Le fait que $c\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ soit simpliciale pour la structure simpliciale externe est un point fondamental, mettant en évidence une différence essentielle par rapport à la structure de Reedy. En particulier, en passant à la structure $\mathcal{G}$ -résolution

$$\text{Ho}(c\mathcal{M}^{\text{Reedy}}) \rightarrow \text{Ho}(c\mathcal{M}^{\mathcal{G}})$$

on peut utiliser la notion d'homotopie simpliciale.

1.4. Adjonctions indispensables.

Proposition 1.17. [BRS14, B.6, B.7(i)] Soient $K \in \text{Ob } \mathcal{S}$ et $L \in \text{Ob } \mathcal{S}_*$. On dispose des adjonctions de Quillen :

$$\begin{aligned} - \otimes^{\text{ext}} K : c\mathcal{M}^{\text{Reedy}} &\rightleftarrows c\mathcal{M}^{\text{Reedy}} : \text{hom}^{\text{ext}}(K, -) \\ - \otimes L : c\mathcal{M}^{\text{Reedy}} &\rightleftarrows c\mathcal{M}_*^{\text{Reedy}} : \overline{\text{hom}}(L, -) \end{aligned}$$



qui ne sont pas, en général, compatibles à la structure simpliciale.

En utilisant les adjonctions $(-)^0 : c\mathcal{M}^{\text{Reedy}} \rightleftarrows \mathcal{M} : c$ (respectivement $(-)^0 : c\mathcal{M}_*^{\text{Reedy}} \rightleftarrows \mathcal{M}_* : c$) fournies par Proposition 1.4, on obtient

Corollaire 1.18. Soient $K \in \text{Ob } \mathcal{S}$ et $L \in \text{Ob } \mathcal{S}_*$, alors on dispose des adjonctions de Quillen :

$$\begin{aligned} (- \otimes^{\text{ext}} K)^0 : c\mathcal{M}^{\text{Reedy}} &\rightleftarrows \mathcal{M} : \text{hom}^{\text{ext}}(K, c(-)) \\ (- \otimes L)^0 : c\mathcal{M}^{\text{Reedy}} &\rightleftarrows \mathcal{M}_* : \overline{\text{hom}}(L, c(-)). \end{aligned}$$

De même, Exemple 1.9 et sa version pointée fournissent :

Lemme 1.19. [BRS14, B.7(ii)] *Soit $X^\bullet$ Reedy cofibrant. Alors les foncteurs*

$$\begin{aligned} X^\bullet \otimes^{\text{ext}} - & : \mathcal{S} \rightarrow c\mathcal{M} \\ X^\bullet \overline{\otimes} - & : \mathcal{S}_* \rightarrow c\mathcal{M}_* \end{aligned}$$

transforment cofibrations en cofibrations de Reedy.

2. LA SUITE EXACTE SPIRALE

2.1. Cofibrations de base. Pour $t \in \mathbb{N}$ on a les inclusions dans $\mathcal{S}$:

$$\wedge_0^t \subset \partial \Delta^t \subset \Delta^t,$$

où $\partial \Delta^t = \wedge_0^t \cup i_0(\partial \Delta^{t-1})$, i_0 correspondant à l'inclusion de la face opposée au sommet 0.

On en tire les cofibrations suivantes

- (1) $\wedge_0^t \longrightarrow \Delta^t \longrightarrow \Delta^t / \wedge_0^t =: \Delta_0^t$
- (2) $\partial \Delta^t \longrightarrow \Delta^t \longrightarrow \Delta^t / \partial \Delta^t$
- (3) $\Delta^t / \partial \Delta^t \longrightarrow \Delta^{t+1} / \wedge_0^{t+1} \longrightarrow \Delta^{t+1} / \partial \Delta^{t+1}$

où (1), (2) sont dans $\mathcal{S}$ et (3) dans $\mathcal{S}_*$.

Remarque 2.1. Il convient de considérer $\Delta^t / \partial \Delta^t \twoheadrightarrow \Delta^{t+1} / \wedge_0^{t+1}$ comme un modèle du cône de la sphère $S^t = \Delta^t / \partial \Delta^t$.

Fixons $X^\bullet$ un objet Reedy cofibrant et appliquons respectivement les foncteurs

$$(X^\bullet \otimes^{\text{ext}} -)^0, (X^\bullet \overline{\otimes} -)^0.$$

Remarque 2.2. Soit $t \in \mathbb{N}$, alors $(X^\bullet \otimes^{\text{ext}} \partial \Delta^t)^0 \cong L^t X$.

Définition 2.3. Soient $X^\bullet$ un objet Reedy cofibrant et $t \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} L_0^t X &:= (X^\bullet \otimes^{\text{ext}} \wedge_0^t)^0 \\ C^t X^\bullet &:= (X^\bullet \overline{\otimes} \Delta^t / \wedge_0^t)^0 \\ Z^t X^\bullet &:= (X^\bullet \overline{\otimes} \Delta^t / \partial \Delta^t)^0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $X^\bullet$ Reedy cofibrant, on a le morphisme de suites cofibres dans $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{ccccc} L_0^t X & \longrightarrow & X^t & \longrightarrow & C^t X^\bullet \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ L^t X & \longrightarrow & X^t & \longrightarrow & Z^t X^\bullet \end{array}$$

et la suite cofibre dans $\mathcal{M}_*$:

$$(4) \quad Z^t X^\bullet \twoheadrightarrow C^{t+1} X^\bullet \rightarrow Z^{t+1} X^\bullet.$$

Lemme 2.4. [BRS14, Appendix B] *Soient $t \in \mathbb{N}$, $X^\bullet$ un objet Reedy cofibrant et $G \in \text{Ho}(\mathcal{M}_*)$ un objet en groupe. La suite cofibre (4) induit une suite exacte de groupes :*

$$\dots \rightarrow [Z^t X^\bullet, \Omega G] \xrightarrow{\beta} [Z^{t+1} X^\bullet, G] \xrightarrow{\gamma} [C^{t+1} X^\bullet, G] \xrightarrow{\delta} [Z^t X^\bullet, G]$$

où $[-, -] = [-, -]_{\text{Ho}(\mathcal{M}_*)}$.

Pour G un objet en groupe abélien, les suites exactes associées aux objets $\{\Omega^q G | q \in \mathbb{N}\}$ induisent un couple exact :

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} [Z^{p-1} X^\bullet, \Omega^q G] & \xleftarrow{\quad \frac{(1, -1)}{\beta} \quad} & [Z^p X^\bullet, \Omega^q G] \\ & \searrow \delta \quad \quad \quad \swarrow \gamma & \\ & [C^p X^\bullet, \Omega^q G] =: E_1^{p, q}. & \end{array}$$

Définition 2.5. La suite exacte spirale associée au couple $(X^\bullet, G)$ est la suite exacte associée au couple exact dérivé de (5).

2.2. Les groupes d'homotopie naturels. On fixe $\mathcal{G}$ une classe de modèles injectifs pour $\text{Ho}(\mathcal{M})$ et on utilise la structure de modèle $c\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$. On supposera que les hypothèses de [BRS14, Assumption 3.3] soient satisfaites. En particulier, les objets G de $\mathcal{G}$ sont des objets fibrants, pointés de $\mathcal{M}_*$ (pas simplement de $\text{Ho}(\mathcal{M})_*$); de plus, G est un objet en groupe abélien de $\text{Ho}(\mathcal{M})_*$.

Définition 2.6. Pour $t \in \mathbb{N}$, $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{M}$ et $G \in \mathcal{G}$,

$$\pi_t^{\natural}(X^\bullet, G) := [X^\bullet, \Omega_{\text{ext}}^t cG]_{c\mathcal{M}^{\mathcal{G}}}.$$

Remarque 2.7. Si f est une $\mathcal{G}$ -équivalence, $\pi_t^{\natural}(f, G)$ est un isomorphisme.

Lemme 2.8. Soient $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{M}$ Reedy cofibrant et $G \in \mathcal{G}$, alors il existe un isomorphisme naturel :

$$\pi_t^{\natural}(X^\bullet, G) \cong \pi_t \overline{\text{map}}(X^\bullet, cG).$$

Démonstration. (Indications.) Par définition, $\overline{\text{map}}(X^\bullet, cG) \in \mathcal{S}_*$ et on dispose d'isomorphismes :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{S}_*}(\Delta^t / \partial \Delta^t, \overline{\text{map}}(X^\bullet, cG)) &\cong \text{Hom}_{c\mathcal{M}_*}(X^\bullet \otimes \Delta^t / \partial \Delta^t, cG) \\ &\cong \text{Hom}_{c\mathcal{M}}(X^\bullet, \Omega_{\text{ext}}^t cG). \end{aligned}$$

Ici $\text{Hom}_{c\mathcal{M}}(X^\bullet, \Omega_{\text{ext}}^t cG)$ est pointé par le morphisme trivial $X^\bullet \rightarrow * \rightarrow \Omega_{\text{ext}}^t cG$ (idem pour $\overline{\text{map}}(X^\bullet, cG)$).

Par [BRS14, A.4], cF est $\mathcal{G}$ -fibrant et $X^\bullet$ est Reedy cofibrant par hypothèse, donc cofibrant dans $c\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$, donc $[X^\bullet, \Omega_{\text{ext}}^t cG]_{c\mathcal{M}^{\mathcal{G}}}$ se calcule comme l'ensemble des classes d'homotopie des morphismes de $\text{Hom}_{c\mathcal{M}}(X^\bullet, \Omega_{\text{ext}}^t cG)$. De plus, puisque $c\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ est une catégorie de modèle simpliciale, on peut utiliser des homotopies simpliciales. En passant aux classes d'homotopie, on obtient l'isomorphisme recherché. $\square$

Remarque 2.9. Par définition, $\text{Hom}_{c\mathcal{M}_*}(X^\bullet \otimes \Delta^t / \partial \Delta^t, cG) = \text{Hom}_{c\mathcal{M}_*}(\Sigma_{\text{ext}}^t X^\bullet, cG)$. Par adjonction on a

$$\text{Hom}_{c\mathcal{M}_*}(X^\bullet \otimes \Delta^t / \partial \Delta^t, cG) = \text{Hom}_{\mathcal{M}_*}(Z^t X^\bullet, G).$$

Puisque $Z^t \dashv \Omega_{\text{ext}}^t(c-)$ est une adjonction de Quillen pour la structure de Reedy, on a l'identification :

$$[Z^t X^\bullet, G]_{\mathcal{M}_*} \cong [X^\bullet, \Omega_{\text{ext}}^t(cG)]_{c\mathcal{M}^{\text{Reedy}}}.$$



En général, on ne peut pas remplacer $c\mathcal{M}^{\text{Reedy}}$ par $c\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$.

Proposition 2.10. Soient $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{M}$ Reedy cofibrant et $G \in \mathcal{G}$; il existe une suite exacte naturelle :

$$[C^{t+1} X^\bullet, G]_{\mathcal{M}_*} \xrightarrow{\delta} [Z^t X^\bullet, G]_{\mathcal{M}_*} \rightarrow \pi_t(X^\bullet, G) \rightarrow 0.$$

Démonstration. (Voir [BRS14, Lemma B.15].) En utilisant les identifications du Lemme 2.8 et de la Remarque 2.9, le morphisme $[Z^t X^\bullet, G]_{\mathcal{M}_*} \rightarrow \pi_t^{\natural}(X^\bullet, G)$ s'identifie au morphisme

$$[X^\bullet, \Omega_{\text{ext}}^t(cG)]_{c\mathcal{M}^{\text{Reedy}}} \rightarrow [X^\bullet, \Omega_{\text{ext}}^t(cG)]_{c\mathcal{M}^{\mathcal{G}}}.$$

Un élément $[f]$ de $[X^\bullet, \Omega_{\text{ext}}^t(cG)]_{c\mathcal{M}^{\text{Reedy}}} \cong [Z^t X^\bullet, G]_{\mathcal{M}_*}$ est représenté par un morphisme $f : X^\bullet \otimes \Delta^t / \partial \Delta^t \rightarrow cG$ de $c\mathcal{M}_*$.

La structure de modèle $c\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ est simpliciale, donc

$$X^\bullet \otimes \Delta^t / \partial \Delta^t \twoheadrightarrow X^\bullet \otimes \Delta^{t+1} / \wedge_0^{t+1}$$

est une $\mathcal{G}$ -cofibration et $X^\bullet \otimes \Delta^{t+1} / \wedge_0^{t+1} \simeq_{c\mathcal{M}^{\mathcal{G}}} *$, puisque $\Delta^{t+1} / \wedge_0^{t+1} \simeq *$ dans $\mathcal{S}_*$. Ainsi, $[f] = 0$ si et seulement s'il existe une extension :

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet \otimes \Delta^t / \partial \Delta^t & \xrightarrow{\quad} & X^\bullet \otimes \Delta^{t+1} / \wedge_0^{t+1} \simeq * \\ f \downarrow & \nearrow \text{dotted arrow} & \\ cG. & & \end{array}$$

Le résultat en découle. $\square$

2.3. La suite exacte spirale. Soient $X^\bullet \in c\mathcal{M}$ un objet Reedy cofibrant et $G \in \mathcal{M}_*$ un objet en groupe abélien dans $\text{Ho}(\mathcal{M})_*$. Ainsi $[X^\bullet, G]_{\text{Ho}(\mathcal{M})}$ est un groupe abélien simplicial, dont on peut calculer les groupes d'homotopie $\pi_*[X^\bullet, G]_{\text{Ho}(\mathcal{M})}$ en utilisant le complexe de chaînes normalisé.

Définition 2.11. Soit $A_\bullet$ un groupe abélien simplicial. Le complexe de chaînes normalisé est $(N_* A, d)$, où $N_0 A = A_0$ et, pour $1 \leq t \in \mathbb{N}$:

$$N_t A := \bigcap_{i=1}^t \ker\{d_i : A_t \rightarrow A_{t-1}\}$$

et la différentielle est induite par d_0 .

Théorème 2.12. Soient $X^\bullet$ Reedy cofibrant et $G \in \mathcal{G}$ un objet en groupe abélien. Il existe une suite exacte longue (la suite exacte spirale) :

$$\dots \rightarrow \pi_{p+1}[X^\bullet, G] \xrightarrow{\delta'} \pi_{p-1}^\natural(X^\bullet, \Omega G) \xrightarrow{\beta'} \pi_p^\natural(X^\bullet, G) \xrightarrow{\gamma'} \pi_p[X^\bullet, G] \rightarrow \dots$$

qui termine par $\pi_1^\natural(X^\bullet, G) \twoheadrightarrow \pi_1[X^\bullet, G]$ et $\pi_0^\natural(X^\bullet, G) \cong \pi_0[X^\bullet, G]$.

Démonstration. La suite exacte est obtenue en dérivant le couple exact du Lemme 2.4 (ce qui explique la notation *ad hoc*, β', γ', δ' - voir [BRS14, Appendix B] pour la notation habituelle). Les termes $\pi^\natural$ proviennent de $\text{coker}(\delta) \cong \text{image}(\beta)$, en utilisant la Proposition 2.10.

Il reste à identifier $E_2^{p,q}$. Le premier point est l'identification

$$[C^p X^\bullet, G]_{\mathcal{M}_*} \cong N_p[X^\bullet, G]$$

(voir [BRS14, Lemma B.15(1)]). L'identification de la différentielle se fait en [BRS14, Lemma B.15(2)]. $\square$

Corollaire 2.13. Un morphisme $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ est une $\mathcal{G}$ -équivalence si et seulement si $\pi_*^\natural(f, G)$ est un isomorphisme $\forall G \in \mathcal{G}$.

Démonstration. Remarque 2.7 fournit $\Rightarrow$. Pour $\Leftarrow$, on utilise la suite exacte spirale et le lemme des cinq. $\square$

3. CONNEXITÉ COSIMPLICIALE

On fixe $\mathcal{G}$ une classe de modèles injectifs pour $\text{Ho}(\mathcal{M})$ et on utilise la structure de modèle $c\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$.

3.1. La notion naturelle de connexité.

Définition 3.1. [BRS14, Section 3.4] Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (1) $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ est $\mathcal{G}$ -cosimplicialement n -connexe si, $\forall G \in \mathcal{G}$, $\pi_s^\natural(f, G)$ est un isomorphisme pour $0 \leq s < n$ et $\pi_n^\natural(f, G)$ est surjectif ;
- (2) $X^\bullet$ est $\mathcal{G}$ -cosimplicialement n -connexe si $X^\bullet \rightarrow *$ l'est.

Remarque 3.2. Ces deux notions sont reliées. En effet, on peut considérer $\text{hocofib}(f)$, la cofibre homotopique de f , et la relation entre la $\mathcal{G}$ -connexité de f et celle de $\text{hocofib}(f)$. On peut également considérer la connexité de $[X^\bullet, G]_{\mathcal{M}}$ en tant que groupe abélien simplicial. Il s'agit d'un bon exercice en utilisant les suites exactes longues relatives et la suite exacte spirale. (Voir [BRS14, Lemma 3.29].)

3.2. Morphismes quasi-colibres. Rappelons la définition de (co)squelette pour les objets cosimpliciaux. Soit $n \in \mathbb{N}$; $\Delta_{\leq n} \subset_{\text{pleine}} \Delta$ est la sous-catégorie pleine des objets $[i]$, $0 \leq i \leq n$. On pose $c_n \mathcal{M} := \text{Funct}(\Delta_{\leq n}, \mathcal{M})$, donc l'inclusion $i_n : \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$ induit un foncteur de restriction $i_n^* : c \mathcal{M} \rightarrow c_n \mathcal{M}$. Ceci admet un adjoint à gauche, λ_n (respectivement à droite, ρ_n) :

$$c \mathcal{M} \begin{array}{c} \xleftarrow{\lambda_n} \\ \xrightleftharpoons{i_n^*} \\ \xrightarrow{\rho_n} \end{array} c_n \mathcal{M}$$

Par définition, le n -squelette est le foncteur $\text{sk}_n := \lambda_n i_n^* : c \mathcal{M} \rightarrow c \mathcal{M}$, muni de la transformation naturelle $\text{sk}_n \rightarrow 1_{c \mathcal{M}}$ (cunité d'adjonction) et le n -cosquelette est le foncteur $\text{cosk}_n := \rho_n i_n^* : c \mathcal{M} \rightarrow c \mathcal{M}$, muni de la transformation naturelle $1_{c \mathcal{M}} \rightarrow \text{cosk}_n$ (unité d'adjonction). Le foncteur sk_n est l'adjoint à gauche de cosk_n .

On a les isomorphismes naturels $i_n^* \rho_n = 1_{c_n \mathcal{M}} = i_n^* \lambda_n$, en particulier on dispose de transformations naturelles :

$$\begin{aligned} \text{sk}_n &\rightarrow \text{sk}_{n+1} \\ \text{cosk}_{n+1} &\rightarrow \text{cosk}_n. \end{aligned}$$

Il y a une version relative de ces constructions. Soit $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ un morphisme de $c \mathcal{M}$; on définit $\text{cosk}_n(f)$ comme produit fibré de $\text{cosk}_n(X^\bullet) \rightarrow \text{cosk}_n(Y^\bullet) \leftarrow Y^\bullet$, de sorte qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \\ \downarrow & \searrow \text{cosk}_n(f) & \downarrow \\ \text{cosk}_n(X^\bullet) & \xrightarrow{\text{cosk}_n(f)} & \text{cosk}_n(Y^\bullet) \end{array}$$

et une transformation naturelle : $\text{cosk}_{n+1}(f) \rightarrow \text{cosk}_n(f)$.

Définition 3.3. [BRS14, Definition 3.22] Un morphisme $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ est quasi- $\mathcal{G}$ -colibre s'il existe des objets fibrants $\mathcal{G}$ -injectifs $\{G_s | s \in \mathbb{N}\}$ et diagrammes homotopiquement cartésiens dans $c \mathcal{M}^{\text{Reedy}}$:

$$\begin{array}{ccc} \text{cosk}_{n+1}(f) & \longrightarrow & \text{hom}(\Delta^n, cG_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{cosk}_n(f) & \longrightarrow & \text{hom}(\partial \Delta^n, cG_n), \end{array}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, où $\text{hom}(\Delta^n, cG_n) \rightarrow \text{hom}(\partial \Delta^n, cG_n)$ est induit par $\partial \Delta^n \subset \Delta^n$.

Remarque 3.4.

- (1) Il s'agit d'une version *homotopique* de la notion de presque $\mathcal{G}$ -colibre (voir [BRS14, Proposition 3.17]). Le carré (homotopiquement) cartésien est le dual du carré qui correspond à la notion plus familière de rattachement de cellules.

- (2) Par [BRS14, Corollary 3.25], si f est quasi- $\mathcal{G}$ -colibre et une fibration de Reedy, alors f est une $\mathcal{G}$ -fibration.

3.3. Une factorisation canonique. Pour illustrer l'importance de la notion $\mathcal{G}$ -connexité cosimpliciale, considérons la factorisation canonique établie dans [BRS14, Proposition 3.30] :

Proposition 3.5. *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie de modèle propre et $\mathcal{G}$ une classe de modèles injectifs. Pour $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ un morphisme $\mathcal{G}$ -cosimplicialement n -connexe, il existe une factorisation canonique :*

$$X^\bullet \xrightarrow[\text{Reedy}, \simeq]{j} Z^\bullet \xrightarrow{q} Y^\bullet$$

telle que q est quasi- $\mathcal{G}$ -colibre sur $\{G_s \mid s \in \mathbb{N}\}$ tel que $G_s = *$, $s \leq n$.

Démonstration. (Indications sur la construction.) On réduit au cas où f est une cofibration de Reedy entre objets Reedy cofibrants. (Ici on utilise la propriété à droite.)

Par récurrence sur s , on construit une factorisation $X^s \xrightarrow{j^s} Z^s \xrightarrow{q^s} Y^s$. Pour $s \leq n$, on pose $X^s = Z^s$ et $q^s = f^s$.

Pour l'étape de récurrence, pour avoir la propriété *Reedy*, on cherche une factorisation convenable du morphisme induit par la construction déjà effectuée :

$$X^s \sqcup_{L^s X^\bullet} L^s Z^\bullet \xrightarrow{\tilde{f}^s} Y^s \prod_{M^s Y^\bullet} M^s Z^\bullet.$$

Par hypothèse sur $\mathcal{G}$, on dispose d'une cofibration $\mathcal{G}$ -mono fonctorielle :

$$\alpha_s : X^s \sqcup_{L^s X^\bullet} L^s Z^\bullet \rightarrow G_s$$

avec G_s fibrant, $\mathcal{G}$ -injectif.

En utilisant la factorisation fonctorielle de $\mathcal{M}$, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X^s \sqcup_{L^s X^\bullet} L^s Z^\bullet & \xrightarrow{\alpha_s \times \tilde{f}^s} & G_s \prod (Y^s \prod_{M^s Y^\bullet} M^s Z^\bullet) \\ & \searrow j^s & \nearrow \simeq \\ & Z^s & \\ & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & Y^s \prod_{M^s Y^\bullet} M^s Z^\bullet. \end{array}$$

Il reste à vérifier qu'on obtient ainsi une factorisation ayant les propriétés recherchées ; pour cela, on fait appel au [BRS14, Lemme 3.23]. $\square$

RÉFÉRENCES

- [Bou03] A. K. Bousfield. Cosimplicial resolutions and homotopy spectral sequences in model categories. *Geom. Topol.*, 7 :1001–1053, 2003.
- [BRS14] G. Biedermann, G. Raptis, and M. Stelzer. The realization space of an unstable coalgebra. *ArXiv 1409.0410 :math.AT*, September 2014.
- [GJ09] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. Reprint of the 1999 edition [MR1711612].