

n -APPROXIMATIONS

GEOFFREY POWELL

1. OBJECTIFS

Soit $C \in \text{Ob } \mathcal{CA}$, on cherche à comprendre $\mathcal{M}_{\text{top}}(C)$, l'espace de module des réalisations de C comme l'homologie d'un espace $C \cong H_*X := H_*(X; \mathbb{F})$ en tant que coalgèbre instable. En particulier, est-ce que cet espace est non-vide ?

Explicitement :

Définition 1.1. Pour $C \in \text{Ob } \mathcal{CA}$, soit $\mathcal{W}_{\text{top}}(C)$ la catégorie dont les objets $X \in \text{Ob } \mathcal{S}$ tels que $H_*(X) \cong_{\mathcal{CA}} C$ et les morphismes sont les H_* -équivalences.

Remarque 1.2. On ne travaille que à $H\mathbb{F}$ -localisation près (pour $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ ceci correspond souvent à la p -complétion de Bousfield-Kan).

Les méthodes générales de Dwyer-Kan fournissent :

$$\mathcal{M}_{\text{top}}(C) \simeq \coprod_{[X]} B\text{Aut}^h(X),$$

$\text{Aut}^h(X)$ le monoïde des auto-équivalences (homologiques) de X .

Remarque 1.3.  Il faut tout de même pouvoir déterminer :

- (1) $\pi_0 \mathcal{M}_{\text{top}}(C)$;
- (2) $\text{Aut}^h(X)$ pour $[X] \in \pi_0 \mathcal{M}_{\text{top}}(C)$.

2. PASSAGE AUX ESPACES COSIMPLICIAUX

Pour former des approximations successives à la réalisation d'une coalgèbre instable, on travaille dans la catégorie $c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ des espaces cosimpliciaux, munie de la structure de modèle $\mathcal{G}$ -résolution. On introduit la notion de ∞ -approximation et la catégorie $\mathcal{W}_{\infty}(C)$ associée :

Définition 2.1. Soit $C \in \text{Ob } \mathcal{CA}$ une coalgèbre instable. La catégorie des ∞ -approximations de C est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{W}(c\mathcal{S}^{\mathcal{G}})$ dont les objets sont $X^{\bullet} \in c\mathcal{S}$ tels que $H_*(X^{\bullet}) \simeq cC$ dans $c\mathcal{CA}^{\mathcal{E}}$ (autrement dit, $H_*(X^{\bullet})$ est de type $K(C, 0)$).

L'espace classifiant associé, $\mathcal{M}_{\infty}(C)$, est l'espace de module des ∞ -approximations de C .

Remarque 2.2.  On sait déjà comment construire des objets de type $L(C, 0)$; cependant, en général, $H_*(L(C, 0))$ n'est pas un objet de type $K(C, 0)$, il faut prendre son 1-squelette $\text{sk}_1 H_*(L(C, 0))$.

Lemme 2.3. Si $X \in \text{Ob } \mathcal{W}_{\text{top}}(C)$, alors $cX \in c\mathcal{S}$ est un objet de $\mathcal{W}_{\infty}(C)$.

Rappeler que $\text{Tot} : c\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ (voir [Bou03, Section 2.8], par exemple) est défini par rapport à la structure simpliciale interne de $c\mathcal{S}$, donc

$$\text{Tot} X^{\bullet} := \text{map}(\Delta_{\text{top}}^{\bullet}, X^{\bullet}),$$

donc $(\text{Tot} X^\bullet)_n = \text{Hom}_{c\mathcal{S}}(\Delta_{\text{top}}^\bullet \times \Delta_{\text{top}}^n, X^\bullet)$. On dispose de l'adjonction

$$\Delta_{\text{top}}^\bullet \times - : \mathcal{S} \rightleftarrows c\mathcal{S} : \text{Tot}$$

Théorème 2.4. [BRS14, Theorem 6.13] *Soit C une coalgèbre instable. Supposons que, pour chaque élément de $\pi_0 \mathcal{M}_\infty(C)$, $\exists X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{S}$ un représentant tel que la suite spectrale qui calcule l'homologie de $\text{Tot}(X^\bullet)$ converge.*

Alors $\mathbb{R}\text{Tot} : c\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ induit une équivalence

$$\mathcal{M}_\infty(C) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{M}_{\text{top}}(C),$$

dont l'inverse est induite par $c : \mathcal{S} \rightarrow c\mathcal{S}$.

Démonstration. (Indications.)

- (1) Si $X^\bullet \in \text{Ob } \mathcal{W}_\infty(C)$ (on peut supposer $X^\bullet \mathcal{G}$ -fibrant), alors $H_*(X^\bullet) \simeq cH_*(X^0) = cC$. Par [BRS14, Proposition 1.5], $\Delta_{\text{top}}^\bullet \times - : \mathcal{S} \rightleftarrows c\mathcal{S} : c\mathcal{S}^\mathcal{G}$ est une adjonction de Quillen, donc le morphisme $\text{Tot}(X^\bullet) \rightarrow \text{Tot}_0(X^\bullet) = X^0$ et la convergence de la suite spectrale fournissent un isomorphisme de coalgèbres instables :

$$H_*(\text{Tot} X^\bullet) \xrightarrow{\simeq} H_*(X^0) = C.$$

En particulier, $\text{Tot} X^\bullet \in \text{Ob } \mathcal{W}_{\text{top}}(C)$.

- (2) Si $Y \in \text{Ob } \mathcal{W}_{\text{top}}(C)$, par Lemme 2.3, $cY \in \text{Ob } \mathcal{W}_\infty(C)$ et $\mathbb{R}\text{Tot}(cY) \simeq Y$.
 (3) Si $X^\bullet \in \text{Ob } \mathcal{W}_\infty(C)$, alors

$$\Delta_{\text{top}}^\bullet \times \mathbb{R}\text{Tot}(X^\bullet) \xrightarrow{\simeq} X^\bullet$$

□

Pour appliquer ce résultat on a besoin d'un critère qui garantit la convergence de la suite spectrale d'homologie pour Tot (de préférence qui ne dépend que de C).

Par exemple, en appliquant un théorème de Bousfield on a le résultat suivant :

Corollaire 2.5. [BRS14, Corollary 6.15] *Soit $C \in \text{Ob } \mathcal{CA}$ telle que $C_0 = \mathbb{F}$ et $C_1 = 0$ (C est simplement connexe). Alors*

$$\mathcal{M}_{\text{top}}(C) \simeq \mathcal{M}_\infty(C).$$

Rappelons la suite exacte spirale pour $G \in \mathcal{G}$ (donc $G = K(\mathbb{F}, m)$, $m \in \mathbb{N}$ et $\Omega G \simeq K(\mathbb{F}, m-1)$) et $X^\bullet$ Reedy cofibrant :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_{s+1}[X^\bullet, G] & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \pi_{s-1}^\natural(X^\bullet, \Omega G) & \longrightarrow & \pi_s^\natural(X^\bullet, G) & \xrightarrow{\text{Hurewicz}} & \pi_s[X^\bullet, G] \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \pi_{s-2}^\natural(X^\bullet, \Omega G) \longrightarrow \dots \end{array}$$

où, pour $G = K(\mathbb{F}, m)$, $\pi_s[X^\bullet, G] \cong \pi_s H^m(X^\bullet) \cong ((\pi^s H_* X)_m)^\vee$.

Remarque 2.6. Naturalité en G entraîne que la suite exacte spirale est une suite exacte de π_0 -modules (voir [BRS14, Theorem B.52]).

Si $X^\bullet \in \text{Ob } \mathcal{W}_\infty(C)$, par définition

$$\pi^s H_*(X^\bullet) \cong \begin{cases} C & s = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par la suite exacte spirale, on déduit que $\forall s > 0$, $\pi_{s-1}^\natural(X^\bullet, \Omega G) \cong \pi_s^\natural(X^\bullet, G)$ et $\pi_0^\natural(X^\bullet, G) \cong \text{Hom}_{\mathcal{CA}}(C, H_* G)$. Donc on a démontré :

Lemme 2.7. Pour $X^\bullet \in \text{Ob } \mathcal{W}_\infty(C)$,

$$\pi_s^{\mathfrak{h}}(X^\bullet, G) \cong \text{Hom}_{\mathcal{CA}}(C, H_*(\Omega^s G)).$$

En particulier, $\pi_s^{\mathfrak{h}}(X^\bullet, K(\mathbb{F}, m)) \cong (C_{m-s})^\vee$.

3. n -APPROXIMATIONS

L'idée fondamentale est de construire (si possible) une ∞ -approximation via sa filtration squelettique. Commençons par considérer $\mathbb{L}sk_{n+1}X^\bullet$ pour $X^\bullet$ une ∞ -approximation de $C \in \text{Ob } \mathcal{CA}$.

Rappelons que, pour $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{S}$, le morphisme canonique $\mathbb{L}sk_{n+1}X^\bullet \rightarrow X^\bullet$ induit ($\forall G \in \mathcal{G}$)

$$\pi_s^{\mathfrak{h}}(X^\bullet, G) \xrightarrow{\cong | s \leq n} \pi_s^{\mathfrak{h}}(\mathbb{L}sk_{n+1}X^\bullet, G)$$

qui est un isomorphisme pour $s \leq n$ et $\pi_{>n}^{\mathfrak{h}}(\mathbb{L}sk_{n+1}X^\bullet, G) = 0$.

En particulier, si $X^\bullet \in \text{Ob } \mathcal{W}_\infty(C)$, on connaît les groupes $\pi_s^{\mathfrak{h}}(\mathbb{L}sk_{n+1}X^\bullet, G)$, par Lemme 2.7 et troncation.

Lemme 3.1. Soient $X^\bullet \in \text{Ob } \mathcal{W}_\infty(C)$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\pi_s[\mathbb{L}sk_{n+1}X^\bullet, G] \cong \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{CA}}(C, H_*G) & s = 0 \\ 0 & 1 \leq s \leq n+1 \\ \pi_n^{\mathfrak{h}}(X^\bullet, \Omega G) & s = n+2 \\ 0 & s > n+2 \end{cases}$$

et l'isomorphisme pour $s = n+2$ est induit par le morphisme d'Hurewicz de la suite exacte spirale.

En particulier, $\pi^0 H_*(X^\bullet) \cong_{\mathcal{CA}} C$ et

$$\pi^{n+2} H_*(\mathbb{L}sk_{n+1}X^\bullet) \cong C[n+1]$$

en tant que C -comodule dans $\mathcal{U}$.

Démonstration. Les premiers points découlent facilement de la suite exacte spirale.

Par Lemme 2.7, on a

$$\pi_{n+2}[\mathbb{L}sk_{n+1}X^\bullet, K(\mathbb{F}, m)] \cong \pi_n^{\mathfrak{h}}(X^\bullet, \Omega K(\mathbb{F}, m)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{CA}}(C, H_*(\Omega^{n+1} K(\mathbb{F}, m))),$$

ce qui explique le décalage $C[n+1]$.

Enfin il faut vérifier que les isomorphismes sont respectivement de coalgèbres instables et de comodules en coalgèbres instables. $\square$

Ce lemme motive la définition suivante :

Définition 3.2. Soit $n \in \mathbb{N}$; un espace cosimplicial $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{S}$ est une n -approximation de $C \in \text{Ob } \mathcal{CA}$ si

$$\pi^s H_*(X^\bullet) \cong \begin{cases} C & s = 0 \\ 0 & 1 \leq s \leq n+1 \\ C[n+1] & s = n+2 \\ 0 & s > n+2 \end{cases}$$

où les isomorphismes sont respectivement de coalgèbres instables et de comodules en coalgèbres instables.

La catégorie $\mathcal{W}_n(C)$ des n -approximations est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{W}(c\mathcal{S}^{\mathcal{G}})$ dont les objets sont les n -approximations ; son espace classifiant est dénoté $\mathcal{M}_n(C)$.

Exemple 3.3. Une 0-approximation de C est un objet de type $L(C, 0)$.

Proposition 3.4. Soit $n \in \mathbb{N}$; $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{S}$ est une n -approximation de $C \in \text{Ob } \mathcal{CA}$ si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (1) $\mathbb{L}sk_1 X^\bullet$ est un objet de type $L(C, 0)$;

- (2) $X^\bullet \simeq \mathbb{L}sk_{n+1}X^\bullet$;
 (3) $\pi^s H_*(X^\bullet) = 0$ pour $1 \leq s \leq n+1$.

De plus, si $X^\bullet$ est une n -approximation ($n > 0$), alors $\mathbb{L}sk_n X^\bullet$ est une $(n-1)$ -approximation de $X^\bullet$.

Démonstration. Conséquence de la suite exacte spirale. □

4. n -APPROXIMATIONS +1

Rappelons la tour de Postnikov de $X^\bullet \in \mathcal{CS}$:

$$\dots \mathbb{L}sk_n X^\bullet \rightarrow \mathbb{L}sk_{n+1} X^\bullet \dots \rightarrow X^\bullet$$

qui se construit récursivement à partir de diagrammes homotopiquement cocartésiens :

$$\begin{array}{ccc} L_C(M, n+2) & \xrightarrow{w_{n+1}} & \mathbb{L}sk_{n+1} X^\bullet \\ \downarrow & h\text{-cocart} & \downarrow \\ L(C, 0) & \longrightarrow & \mathbb{L}sk_{n+2} X^\bullet, \end{array}$$

où $C = \pi^0 H_* X^\bullet$ et $M = \pi^{n+1} H_*(\mathbb{L}sk_{n+2} X^\bullet)$.

Remarque 4.1. Le choix d'indexation correspond au cas où $X^\bullet \simeq \mathbb{L}sk_{n+1} X^\bullet$ est une n -approximation de C .

Considérons la forme de ce carré lorsqu'il existe une telle extension, $\mathbb{L}sk_{n+2} X^\bullet$ étant une $n+1$ -approximation.

Rappelons que, par la suite exacte spirale, on calcule

$$\pi^s H_*(L_C(M, n+2)) \cong \begin{cases} C & s = 0 \\ C[1] & s = 2 \\ M & s = n+2 \\ M[1] & s = n+4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(avec les précisions habituelles sur les structures).

Si $\mathbb{L}sk_{n+1} X^\bullet$ est une n -approximation, on a également

$$\pi^s H_*(\mathbb{L}sk_{n+1} X^\bullet) \cong \begin{cases} C & s = 0 \\ C[n+1] & s = n+2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 4.2. [BRS14, Theorem 6.4] Soit $X_n^\bullet$ une n -approximation (cofibrante) de $C \in \text{Ob } \mathcal{CA}$. Il existe une $(n+1)$ -approximation qui étend $X_n^\bullet$ si et seulement s'il existe

$$w_{n+1} : L_C(C[n+1], n+2) \rightarrow X_n^\bullet$$

tel que

$$\pi^s H_*(w_{n+1}) : \pi^s H_*(L_C(C[n+1], n+2)) \rightarrow \pi^s H_*(\mathbb{L}sk_{n+1} X^\bullet)$$

est un isomorphisme en degrés $s = 0$ et $s = n+2$.

Pour un tel w_{n+1} , le carré homotopiquement cocartésien

$$\begin{array}{ccc} L_C(C[n+1], n+2) & \xrightarrow{w_{n+1}} & X_n^\bullet \\ \downarrow & h\text{-cocart} & \downarrow \\ L(C, 0) & \longrightarrow & X^\bullet \end{array}$$

fournit $X^\bullet$, une $(n+1)$ -approximation de C .

Démonstration. Que la condition soit nécessaire est une conséquence de la [BRS14, Proposition 5.30] et le paragraphe suivant sur la tour de Postnikov. (En plus, il faut vérifier que la condition homologique sur w_{n+1} soit satisfaite.)

Pour démontrer la suffisance, on utilise le fait que H_* préserve les carrés homotopiquement cocartésiens [BRS14, Proposition 5.6] pour calculer $\pi^s H_*(X^\bullet)$, ensuite utilisant la caractérisation donnée à la Proposition 3.4 pour identifier la $(n+1)$ -approximation. $\square$

Remarque 4.3. Le critère donner dans l'énoncé du théorème dans [BRS14] se calcule plutôt sur la composée

$$K_C(C[n+1], n+2) \rightarrow H_*(L_C(C[n+1], n+2)) \xrightarrow{H_*(w_n)} H_*(X_n^\bullet)$$

où le premier morphisme provient de la relation entre les $K_C(M, n)$ et les $H_*(L_C(M, n))$ (voir [BRS14, Proposition 5.24]).

5. ESPACES DE MODULE

On fixe $C \in \text{Ob } \mathcal{CA}$.

Remarque 5.1. Le problème d'extension d'une n -approximation à une $(n+1)$ -approximation de C devient alors celui de l'existence des morphismes w_{n+1} .

On a vu que, pour $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{S}$, l'espace de module

$$\mathcal{M}(L(C, 0) \leftarrow L_C(M, n) \rightsquigarrow X^*)$$

se comprend à l'aide de l'homologie. Explicitement

Théorème 5.2. [BRS14, Theorem 5.32] $\forall n \geq 0$, le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(L(C, 0) \leftarrow L_C(M, n) \rightsquigarrow X^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{M}(K(C, 0) \leftarrow K_C(M, n) \rightsquigarrow H_*(X^\bullet)) \\ \downarrow & \text{\scriptsize } h\text{-cart} & \downarrow \\ \mathcal{M}(X^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{M}(H_*(X^\bullet)) \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

Rappelons la catégorie $\mathcal{W}_n(C)$ de la Définition 3.2 et son espace classifiant $\mathcal{M}_n(C)$. Le lemme suivant découle de la Proposition 3.4.

Lemme 5.3. Le foncteur $\mathbb{L}sk_{n+1}$ induit une application

$$\mathbb{L}sk_{n+1} : \mathcal{M}_{n+1}(C) \rightarrow \mathcal{M}_n(C).$$

Une n -approximation $X_n^\bullet$ à C donne un objet de $\mathcal{W}_n(C)$ et donc un point de $\mathcal{M}_n(C)$.

Notation 5.4. Pour $X_n^\bullet \in \mathcal{M}_n(C)$, soit $\mathcal{M}_{n+1}(C)_{X_n^\bullet}$ la fibre de $\mathbb{L}sk_{n+1} : \mathcal{M}_{n+1}(C) \rightarrow \mathcal{M}_n(C)$ au dessus de $X_n^\bullet$.

Définition 5.5. (Cf. [BRS14, Remark 5.33].) Pour $X_n^\bullet$ une n -approximation, soient

- (1) $\mathcal{W}(L(C, 0) \leftarrow L_C(C[n+1], n+2) \rightsquigarrow X_n^\bullet)$ la sous catégorie de $\mathcal{W}(L(C, 0) \leftarrow L_C(C[n+1], n+2) \rightsquigarrow X_n^\bullet)$ des triples $W^\bullet \leftarrow U^\bullet \xrightarrow{f} V^\bullet$, où $W^\bullet \leftarrow U^\bullet$ est un objet structuré de type $L_C(C[n+1], n+2)$, $V^\bullet \simeq X_n^\bullet$ et f satisfait la condition sur w_{n+1} du Théorème 4.2 ;
- (2) $\mathcal{W}(K(C, 0) \leftarrow K_C(C[n+1], n+2) \rightsquigarrow H_* X_n^\bullet)$ la sous catégorie de $\mathcal{W}(K(C, 0) \leftarrow K_C(C[n+1], n+2) \rightsquigarrow H_* X_n^\bullet)$ des triples $Z^\bullet \leftarrow Y^\bullet \xrightarrow{g} T^\bullet$, où $Z^\bullet \leftarrow Y^\bullet$ est un objet structuré de type $K_C(C[n+1], n+2)$, $T^\bullet \simeq H_*(X_n^\bullet)$ et g est une équivalence faible.

On dénote par $\mathcal{M}(L(C, 0) \leftarrow L_C(C[n+1], n+2) \looparrowright X_n^\bullet)$ (respectivement $\mathcal{M}(K(C, 0) \leftarrow K_C(C[n+1], n+2) \looparrowright H_*X_n^\bullet)$) les espaces classifiants.

Lemme 5.6. *L'homologie induit une application*

$\mathcal{M}(L(C, 0) \leftarrow L_C(C[n+1], n+2) \looparrowright X_n^\bullet) \rightarrow \mathcal{M}(K(C, 0) \leftarrow K_C(C[n+1], n+2) \looparrowright H_*X_n^\bullet)$
compatible avec l'application
 $\mathcal{M}(L(C, 0) \leftarrow L_C(C[n+1], n+2) \leadsto X_n^\bullet) \rightarrow \mathcal{M}(K(C, 0) \leftarrow K_C(C[n+1], n+2) \leadsto H_*X_n^\bullet)$
du Théorème 5.2.

En mettant ensemble Théorème 5.2 et Théorème 4.2, on obtient :

Corollaire 5.7. [BRS14, Proposition 6.7] *Soit $X_n^\bullet$ une n -approximation. Alors, le carré suivant est homotopiquement cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n+1}(C)_{X_n^\bullet} & \longrightarrow & \mathcal{M}(K(C, 0) \leftarrow K_C(C[n+1], n+2) \leadsto H_*X_n^\bullet) \\ \mathbb{L}\mathrm{sk}_{n+1} \downarrow & \text{\scriptsize } h\text{-cart} & \downarrow \\ \mathcal{M}(X_n^\bullet) & \xrightarrow{H_*} & \mathcal{M}(H_*(X_n^\bullet)). \end{array}$$

Remarque 5.8. La partie intéressante vient avec l'identification de la différence entre $\mathcal{M}_{n+1}(C)$ et $\mathcal{M}_n(C)$ en termes de la cohomologie d'André-Quillen, mais pour cela il faut attendre le *dénouement* dans l'exposé suivant...

6. PASSAGE DE n À ∞

On dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{M}_\infty(C) & & \\ & \mathbb{L}\mathrm{sk}_{n+2} \downarrow & \searrow \mathbb{L}\mathrm{sk}_{n+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n+1}(C) & \xrightarrow{\mathbb{L}\mathrm{sk}_{n+1}} & \mathcal{M}_n(C) \longrightarrow \dots \end{array}$$

et, intuitivement, le résultat suivant paraît naturel :

Théorème 6.1. [BRS14, Theorem 6.11] *Soit $C \in \mathrm{Ob} \mathcal{CA}$, alors*

$$\mathcal{M}_\infty(C) \simeq \mathrm{holim}_n \mathcal{M}_n(C).$$

Démonstration. (Indications.)

On introduit une catégorie auxiliaire, $\mathcal{W}'_n(C)$, pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sous catégorie pleine de $\mathcal{W}(\mathrm{Func}(\mathbf{n}, c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}))$ dont les objets sont les diagrammes de $c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$

$$F(0) \rightarrow F(1) \rightarrow \dots \rightarrow F(n)$$

où $F(n) \in \mathrm{Ob} \mathcal{W}'_n(C)$ (on modifie pour $n = \infty$) et, $\forall 0 \leq i < n$

$$F(i) \simeq \mathbb{L}\mathrm{sk}_{i+1} F(i) \rightarrow \mathbb{L}\mathrm{sk}_{i+1} F(i+1)$$

est une équivalence faible. (Donc $F(i)$ est une i -approximation.)

La filtration squelettique induit un foncteur évident

$$\mathcal{W}'_n(C) \rightarrow \mathcal{W}'_n(C)$$

et la colimite homotopique induit

$$\mathrm{hocolim} : \mathcal{W}'_n(C) \rightarrow \mathcal{W}'_n(C).$$

Ces foncteurs induisent une équivalence d'homotopie $\mathcal{M}_n(C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'_n(C)$ entre les espaces classifiants.

On introduit les sous-catégories suivantes :

- (1) pour $X^\bullet$ une ∞ -approximation, soit $\text{Conj}(X^\bullet) \subset \mathcal{W}_\infty(C)$ la sous-catégorie des F tels que $F(n) \simeq \mathbb{L}sk_{n+1}X^\bullet \forall n \in \mathbb{N}$;
- (2) pour $X_n^\bullet$ une n -approximation, soit $\mathcal{W}'_n(C)_{X_n^\bullet} \subset \mathcal{W}'_n(C)$ la composante connexe qui contient $\{\mathbb{L}sk_i X_n^\bullet\}$.



$\text{Conj}(X^\bullet)$ n'est pas en général connexe.

La démonstration procède en deux étapes. Si $\mathcal{W}_\infty(C)$ est vide, on démontre facilement que $\text{holim}_n \mathcal{M}_n(C)$ est vide.

Sinon, il suffit de démontrer le résultat pour une classe de conjugaison de $\mathcal{M}_\infty(C) \simeq \mathcal{M}'_\infty(C)$, donc on fixe $X^\bullet$ une ∞ -approximation (la notion de *conjugué* a été introduite implicitement ci-dessus) et on considère $\text{Conj}(X^\bullet)$. On écrit $X_n^\bullet$ pour $\mathbb{L}sk_{n+1}X^\bullet$.

Par une généralisation d'un théorème de Dwyer-Kan (voir [BRS14, Theorem D.12]) :

$$B(\text{Conj}(X^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \text{holim}_n B\mathcal{W}'_n(C)_{X_n^\bullet}$$

est une équivalence d'homotopie et $\text{holim}_n B\mathcal{W}'_n(C)_{X_n^\bullet} \simeq \text{holim}_n \mathcal{M}(X_n^\bullet)$. $\square$

RÉFÉRENCES

- [Bou03] A. K. Bousfield. Cosimplicial resolutions and homotopy spectral sequences in model categories. *Geom. Topol.*, 7 :1001–1053, 2003.
- [BRS14] G. Biedermann, G. Raptis, and M. Stelzer. The realization space of an unstable coalgebra. *ArXiv 1409.0410 :math.AT*, September 2014.
- [GJ09] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. Reprint of the 1999 edition [MR1711612].