

ESPACES COSIMPLICIAUX

GEOFFREY POWELL

1. CONTEXTE

Rappels 1.1. $\mathcal{CA}$ dénote la catégorie des coalgèbres instables (sur $\mathbb{F}$) et $c\mathcal{CA}$ sa catégorie d'objets cosimpliciaux. $\mathcal{CA}$ est considérée comme catégorie de modèle par rapport à la structure discrète (qui est propre) et elle est munie de l'ensemble de modèles injectifs

$$\mathcal{E} := \{H_*(K(\mathbb{F}, m)) | m \in \mathbb{N}\},$$

où $H_* = H_*(-; \mathbb{F})$ prend ses valeurs dans $\mathcal{CA}$. Ainsi on dispose de $c\mathcal{CA}^{\mathcal{E}}$, la structure de modèle $\mathcal{E}$ -résolution.

En particulier

- (1) dans $\mathcal{CA}$: $\mathcal{E}$ -monic $\Leftrightarrow$ injectif (cf. [BRS14, Proposition 2.15] ;
- (2) tout objet de $c\mathcal{CA}$ est Reedy cofibrant, donc $\mathcal{E}$ -cofibrant.

Rappelons $\mathcal{S} := \Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns$, la catégorie des ensembles simpliciaux, munie de sa structure de modèle habituelle (qui est propre) ; la catégorie $c\mathcal{S}$ est notre modèle pour les espaces cosimpliciaux.

Notation 1.2. $\mathcal{G} := \{K(\mathbb{F}, m) | m \in \mathbb{N}\}$. (En prenant $K(\mathbb{F}, m) \in \Delta^{\text{op}}\mathcal{A}b$ (utiliser le foncteur de Kan), les hypothèses [BRS14, Assumption 3.3] sont satisfaites.)

Définition 1.3. Un espace $G \in \text{Ob } \mathcal{S}$ est un GEM (espace d'Eilenberg-MacLane généralisé) si

$$G \simeq \prod_i K(\mathbb{F}, m_i).$$

Leur importance ici provient du fait standard suivant :

Lemme 1.4. Soient $X, G \in \text{Ob } \mathcal{S}$ où G est un GEM. Alors H_* induit un isomorphisme

$$[X, G] \cong \text{Hom}_{\mathcal{CA}}(H_*X, H_*G).$$

En particulier, pour $G = K(\mathbb{F}, m)$:

$$H^m(X; \mathbb{F}) \cong [X, K(\mathbb{F}, m)] \cong \text{Hom}_{\mathcal{CA}}(H_*X, H_*(K(\mathbb{F}, m))).$$

Lemme 1.5. [BRS14, Lemma 5.2] Soit $X \in \text{Ob } \mathcal{S}$.

- (1) Il existe un $\mathcal{G}$ -monomorphisme canonique :

$$X \rightarrow \prod_{m \geq 0} \prod_{X \rightarrow K(\mathbb{F}, m)} K(\mathbb{F}, m).$$

- (2) X est $\mathcal{G}$ -injectif $\Leftrightarrow$ X est rétracte d'un GEM fibrant.
- (3) Tout GEM est $\mathcal{G}$ -injectif.

Donc $\mathcal{G}$ forme un ensemble de modèles injectifs pour $c\mathcal{S}$.

Démonstration. Sans difficulté. □

Théorème 1.6. [BRS14, Theorem 5.3] La catégorie des espaces cosimpliciaux admet la structure de modèle $c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ -résolution.

Remarque 1.7. On montre dans Corollaire 3.4 que $c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ est propre à droite (donc propre).

Le foncteur $H_* : c\mathcal{S} \rightarrow c\mathcal{CA}$ envoie $\mathcal{G}$ à $\mathcal{E}$, donc on peut comparer les structures $c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ et $c\mathcal{CA}^{\mathcal{E}}$.

Proposition 1.8. [BRS14, Section 5.1]

- (1) $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ est une $\mathcal{G}$ -équivalence $\Leftrightarrow H_*(f)$ est une $\mathcal{E}$ -équivalence.
- (2) $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ est $\mathcal{G}$ -cosimplicialement n -connexe si et seulement si $H_*(f)$ est $\mathcal{E}$ -cosimplicialement n -connexe.
- (3) H_* induit un foncteur $\mathrm{Ho}(c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}) \rightarrow \mathrm{Ho}(c\mathcal{CA}^{\mathcal{E}})$ qui préserve les produits finis.
- (4) [BRS14, Lemma 5.8] Les structures simpliciales extérieures (par rapport aux ensembles simpliciaux finis) pour $c\mathcal{S}$ et $c\mathcal{CA}$ sont compatibles via H_* .
- (5) $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ est une $\mathcal{G}$ -cofibration $\Leftrightarrow f$ est une cofibration de Reedy et $H_*(f)$ est une $\mathcal{E}$ -cofibration.
- (6) [BRS14, Lemma 5.2] Si $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ est une fibration $\mathcal{G}$ -injective, alors $H_*(f)$ est $\mathcal{E}$ -injective.

Démonstration. (Indications)

- (1) Essentiellement formelle, puisque $K(\mathbb{F}, m)$ représente $H^*(-; \mathbb{F})$.
- (2) La connexité est définie en terme des groupes d'homotopie naturels $\pi_s^\natural$. Noter que, pour $C^\bullet \in c\mathcal{CA}$, $H \in \mathcal{E}$ et $s \in \mathbb{N}$, le morphisme de Hurewicz

$$\pi_s^\natural(C^\bullet, H) \rightarrow \pi_s \mathrm{Hom}_{c\mathcal{A}}(C^\bullet, H)$$

est un isomorphisme, puisque $\mathcal{CA}$ est une catégorie de modèle discrète (voir [BRS14, Remark 4.3]); donc, en général, les groupes $\pi_s^\natural(X^\bullet, G)$ et $\pi_s^\natural(H_*(X^\bullet), H_*G)$ ne sont pas isomorphes (exercice !)

Par [BRS14, Lemma 3.29(iv)], f est $\mathcal{G}$ -cosimplicialement n -connexe si et seulement si, $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\pi_s[Y^\bullet, K(\mathbb{F}, m)] \rightarrow \pi_s[X^\bullet, K(\mathbb{F}, m)]$$

est un isomorphisme pour $0 \leq s < n$ et surjectif pour $s = n$. Ce morphisme identifie avec

$$\pi_s[H_*(Y^\bullet), H_*(K(\mathbb{F}, m))] \rightarrow \pi_s[H_*(X^\bullet), H_*(K(\mathbb{F}, m))]$$

d'où l'équivalence avec la condition $\mathcal{E}$ -cosimplicialement n -connexe pour $H_*(f)$.

- (3) Conséquence de la propriété universelle de Ho et du théorème de Künneth.
- (4) Conséquence formelle du théorème de Künneth (et un argument d'adjonction).
- (5) Encore une conséquence de la représentabilité.
- (6) Utiliser le fait que toute fibration $\mathcal{G}$ -injective est rétracte (à homotopie près) d'une projection $Y \times G \rightarrow Y$, où G est un GEM [Bou03].

□

2. DIAGRAMMES HOMOTOPIQUEMENT COCARTÉSIENS

Définition 2.1. Un carré commutatif

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} X^\bullet & \xrightarrow{i} & Y^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ W^\bullet & \longrightarrow & Z^\bullet \end{array}$$

est homotopiquement n -cocartésien dans $c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ si le morphisme canonique

$$\mathrm{hocolim}(W^\bullet \leftarrow X^\bullet \rightarrow Y^\bullet) \rightarrow Z^\bullet$$

est $\mathcal{G}$ -cosimplicialement n -connexe.

Proposition 2.2. [BRS14, Propositions 5.5 et 5.6] Soit (1) un carré homotopiquement n -cocartésien de $c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ tel que i est 0-connexe (ie $\pi^0 H_*(X^\bullet) \hookrightarrow \pi^0 H_*(Y^\bullet)$). Alors

$$\begin{array}{ccc} H_*(X^\bullet) & \xrightarrow{i} & H_*(Y^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(W^\bullet) & \longrightarrow & H_*(Z^\bullet) \end{array}$$

est homotopiquement n -cocartésien dans $c\mathcal{A}^{\mathcal{G}}$.

Démonstration. On peut supposer que i est une $\mathcal{G}$ -cofibration et on forme la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \xrightarrow{i} & Y^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ W^\bullet & \xrightarrow{j} & P^\bullet \end{array}$$

Alors j est 0-connexe.

Écrivons C_i, C_j pour les cofibres (homotopiques puisque i, j sont des cofibrations) de i, j respectivement. En appliquant H_* , on obtient le diagramme commutatif de $c\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ccccc} H_*(X^\bullet) & \xrightarrow{H_*i} & H_*(Y^\bullet) & \longrightarrow & H_*(C_i) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ H_*(W^\bullet) & \xrightarrow{\quad} & C & \longrightarrow & H_*(C_i) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ H_*(W^\bullet) & \xrightarrow{H_*j} & H_*(P^\bullet) & \longrightarrow & H_*(C_j), \end{array}$$

où C est la somme amalgamée. H_*i, H_*j sont des $\mathcal{E}$ -cofibrations par Proposition 1.8 (5).

Le fait que $C_i \rightarrow C_j$ est une $\mathcal{G}$ -équivalence (par construction du pushout homotopique) entraîne la $\mathcal{E}$ -équivalence verticale.

Admettons pour l'instant que la première et la dernière lignes soient des suites cofibres homotopiques (ceci correspond au cas $W^\bullet = *$ et $n = \infty$). Alors toutes les lignes sont des suites cofibres (homotopiques), donc le morphisme $C \rightarrow H_*(P^\bullet)$ est une $\mathcal{E}$ -équivalence.

Par hypothèse, $P^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ est $\mathcal{G}$ -cosimplicialement n -connexe, donc $H_*(P^\bullet) \rightarrow H_*(Z^\bullet)$ est $\mathcal{E}$ -cosimplicialement n -connexe. Le résultat en découle.

Il reste à démontrer le cas $W^\bullet = *$ et $n = \infty$, en supposant i 0-connexe. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \xrightarrow{i} & Y^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & Z^\bullet \end{array}$$

induit

$$\begin{array}{ccccc} H_*(X^\bullet) & \xrightarrow{H_*i} & H_*(Y^\bullet) & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ c\mathbb{F} & \longrightarrow & C & \longrightarrow & H_*(Z^\bullet), \end{array}$$

où C est la somme amalgamée.

Par [BRS14, Proposition 4.4(ii)], un morphisme f de $c\mathcal{CA}$ est une $\mathcal{E}$ -cofibration si et seulement si Nf est injectif en chaque degré strictement positif. En appliquant ceci à H_*i , puisque i est 0-connexe par hypothèse, on a que H_*i est un monomorphisme.

De plus, puisque $i : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ est une cofibration de Reedy, pour tout k , $X^k \rightarrow Y^k \rightarrow Z^k$ est une suite cofibre de $\mathcal{S}$. (Par exemple, appliquer le foncteur $(- \otimes^{\text{ext}} \Delta^k)^0$ à la suite cofibre $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet$.)

Donc on a une suite exacte courte de $\mathbb{F}$ -espaces vectoriels cosimpliciaux :

$$0 \rightarrow H_*(X^\bullet) \rightarrow H_*(Y^\bullet) \rightarrow \tilde{H}_*(Z^\bullet) \rightarrow 0.$$

En particulier le carré extérieur est cocartésien dans $\mathcal{CA}$. □

3. CARRÉS CARTÉSIENS ET EXCISION

Rappels 3.1. La classe des morphismes $\mathcal{G}$ -colibres est définie dans [BRS14, Définition 3.15].

- (1) [BRS14, Proposition 3.18] $\mathcal{G}$ -colibre $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ -fibration.
- (2) La [BRS14, Proposition 3.21] s'applique à $c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ pour montrer que tout morphisme de $c\mathcal{S}$ se factorise canoniquement

$$\bullet \xrightarrow{\simeq_{\mathcal{G}}} \bullet \xrightarrow{\mathcal{G}\text{-colibre}} \bullet.$$

On dispose également de la classe des morphismes quasi- $\mathcal{G}$ -colibres :

- (1) [BRS14, Proposition 3.26] montre que tout morphisme de $c\mathcal{S}$ se factorise canoniquement

$$\bullet \xrightarrow{\simeq_{\mathcal{G}}} \bullet \xrightarrow{\mathcal{G}\text{-colibre}} \bullet.$$

- (2) [BRS14, Corollary 3.25] une fibration de Reedy qui est quasi- $\mathcal{G}$ -colibre est une $\mathcal{G}$ -fibration ; de plus $\mathcal{G}$ -colibre $\Rightarrow$ quasi $\mathcal{G}$ -colibre.

Donc [BRS14, Corollary 3.27], chaque $\mathcal{G}$ -fibration est rétracte d'une fibration de Reedy quasi $\mathcal{G}$ -colibre.

Remarque 3.2. Ainsi, pour construire les carrés homotopiquement cartésiens, on peut utiliser les morphismes quasi- $\mathcal{G}$ -colibres.

L'ingrédient principal est le suivant :

Proposition 3.3. *Considérer le foncteur $H_* : c\mathcal{S} \rightarrow c\mathcal{CA}$.*

- (1) [BRS14, Proposition 5.9] *Si $f \in \text{Mor } c\mathcal{S}$ est $\mathcal{G}$ -colibre sur $\{G_s | s \in \mathbb{N}\}$, alors $H_*(f)$ est $\mathcal{E}$ -colibre sur $\{H_*(G_s) | s \in \mathbb{N}\}$. De plus, H_* préserve les images réciproques le long d'un morphisme $\mathcal{G}$ -colibre.*

- (2) [BRS14, Corollary 5.10] H_* envoie les morphismes quasi $\mathcal{G}$ -colibres à des morphismes $\mathcal{E}$ -colibres et, de plus, H_* préserve les images réciproques le long d'une fibration de Reedy quasi $\mathcal{G}$ -colibre.

En particulier, H_* envoie une $\mathcal{G}$ -fibration à une $\mathcal{E}$ -fibration.

Démonstration. Voir [BRS14]. On utilise la caractérisation des morphismes (quasi) $\mathcal{G}$ -colibres. $\square$

Corollaire 3.4.

- (1) [BRS14, Proposition 5.7] Le foncteur $H_* : c\mathcal{S}^{\mathcal{G}} \rightarrow c\mathcal{CA}^{\mathcal{E}}$ préserve les carrés homotopiquement cartésiens.
- (2) [BRS14, Corollary 5.11] La catégorie de modèle $c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ est propre à droite.

Démonstration. Pour la première propriété, il suffit de considérer un carré cartésien de $c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$:

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \longrightarrow & Y^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow p \\ W^\bullet & \longrightarrow & Z^\bullet \end{array}$$

où p est quasi $\mathcal{G}$ -colibre.

En appliquant H_* , par Proposition 3.3, $H_*(p)$ est une $\mathcal{E}$ -fibration et le carré obtenu est cartésien dans $c\mathcal{CA}$, donc est homotopiquement cartésien.

La démonstration de la propriété à droite est similaire : c'est une conséquence de la propriété à droite de $c\mathcal{CA}^{\mathcal{E}}$. $\square$

De plus, la propriété d'excision homotopique pour $c\mathcal{S}$ est une conséquence formelle de cette propriété pour les coalgèbres instables.

Théorème 3.5. Soit

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \longrightarrow & Y^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow g \\ W^\bullet & \xrightarrow{f} & Z^\bullet \end{array}$$

un carré homotopiquement cartésien de $c\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$. Si f is $\mathcal{G}$ -cosimplicialement m -connexe et g est $\mathcal{G}$ -cosimplicialement n -connexe, alors le carré est homotopiquement $(m+n)$ -cocartésien.

Démonstration. La connexité de $P^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ (où $P^\bullet$ est la somme amalgamée homotopique) se détecte dans $c\mathcal{CA}$ (voir Proposition 1.8). De plus, H_* préserve les carrés homotopiquement cocartésiens (voir Proposition 2.2 - en faisant attention à l'hypothèse de 0-connexité). Ainsi, le résultat découle du théorème d'excision pour les coalgèbres instables [BRS14, Theorem 4.17]. $\square$

4. OBJETS DE TYPE L

La définition des objets de type $L(C, 0)$, $L_C(M, n)$ de $c\mathcal{S}$ est très similaire à celle des objets $K(C, 0)$, $K_C(M, n)$ de $c\mathcal{CA}$.

Rappels 4.1. La catégorie $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ est la sous-catégorie pleine définie dans [BRS14, Section 3.2] (des suspensions pour $p = 2$), qui est équivalente à la catégorie des objets cogroupes coabéliens de $\mathcal{CA}_*$. Pour $C \in \text{Ob } \mathcal{CA}$, $\mathcal{V}C$ est la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{U}C$ des C -comodules instables (à gauche) dont l'objet sous-jacent appartient à $\mathcal{V}$.

Pour $M \in \text{Ob } \mathcal{V}C$, on écrit $\iota_C M$ pour la coalgèbre associée dans $C/\mathcal{CA}$.

Remarque 4.2. Un objet $D \in \text{Ob } \mathcal{CA}_*$ est considéré comme objet de $C/\mathcal{CA}$ via :

$$C \rightarrow \mathbb{F} \rightarrow D.$$

Rappels 4.3. (Voir [BRS14, Remark 3.7].) Soit $X^\bullet \in {}_c\mathcal{S}$ Reedy cofibrant. Alors $\forall G \in \mathcal{G}$,

$$\pi_s^h(\text{sk}_n X^\bullet, G) \cong \begin{cases} \pi_s^h(X^\bullet, G) & s < n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 4.4. Soit $C \in \text{Ob } \mathcal{CA}$.

- (1) $X^\bullet \in \text{Ob } {}_c\mathcal{S}$ est de type $L(C, 0)$ si

$$\pi_s^h(X^\bullet, G) \cong \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{CA}}(C, H_* G) & s = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall G \in \mathcal{G}$. (On passe sous silence la structure de $\mathcal{H}$ -algèbre.)

- (2) Soient $M \in \text{Ob } \mathcal{VC}$ et $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Un objet $Y^\bullet$ est de type $L_C(M, n)$ si

(a)

$$\pi_s^h(Y^\bullet, G) \cong \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{CA}}(C, H_* G) & s = 0 \\ \text{Hom}_{C/\mathcal{CA}}(\iota_C M, H_* G) & s = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall G \in \mathcal{G}$.

- (b) Il existe un morphisme $\eta : Y^\bullet \rightarrow X^\bullet$ vers un objet de type $L(C, 0)$ tel que la composée

$$\mathbb{L}\text{sk}_1 Y^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow X^\bullet$$

est une $\mathcal{G}$ -équivalence.

Un objet structuré de type $L_C(M, n)$ est un couple $(Y^\bullet, \eta)$ qui vérifie ces propriétés.

Remarque 4.5. Il y a une notion évidente d'objet structuré de type $L_C(M, 0)$.

Exemple 4.6. Soit $X^\bullet \in {}_c\mathcal{S}$ un objet Reedy cofibrant. Alors $\text{sk}_1 X^\bullet$ est un objet de type $L(C, 0)$, où $C := \pi^0 H_*(X^\bullet)$.

Remarque 4.7. (En utilisant la notation de la Définition 4.4.)

- (1) On pourrait exiger que $X^\bullet, Y^\bullet$ soient Reedy cofibrants.
- (2) Le morphisme η est $\mathcal{G}$ -cosimplicialement $(n - 1)$ -connexe (mais pas n -connexe, si $M \neq 0$).
- (3) $Y^\bullet$ est $(n + 1)$ -squelettique : $Y^\bullet \simeq_{\mathcal{G}} \mathbb{L}\text{sk}_{n+1} Y^\bullet$.

Proposition 4.8. Soit $Y^\bullet \xrightarrow{\eta} X^\bullet$ un objet structuré de type $L_C(M, n)$ et soit $D^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{CA}$ l'objet défini par le carré homotopiquement cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} D^\bullet & \longrightarrow & H_*(Y^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow H_*\eta \\ \text{sk}_1 H_*(X^\bullet) & \longrightarrow & H_*(X^\bullet). \end{array}$$

Alors $\text{sk}_{n+1} D^\bullet \rightarrow \text{sk}_1 H_*(X^\bullet)$ est un objet structuré de type $K_C(M, n)$.

Démonstration. Exercice en utilisant l'excision homotopique et les groupes π^h . (Voir [BRS14, page 55] et [BRS14, Proposition 5.30].) $\square$

[BRS14, Proposition 5.30] fournit le raffinement suivant (avec un changement de notation) :

Proposition 4.9. Soit $f : U^\bullet \rightarrow V^\bullet$ un morphisme $\mathcal{G}$ -cosimplicialement $(n-1)$ -connexe ($n-1 \geq 0$) et considérer le carré homotopiquement cartésien :

$$\begin{array}{ccc} E^\bullet & \longrightarrow & U^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{L}sk_1 V^\bullet & \longrightarrow & V^\bullet \end{array}$$

et poser $C := \pi^0 H_*(V^\bullet)$ et $M := \pi^{n-1} H_*(V^\bullet)$. Alors

- (1) $M \in \text{Ob } \mathcal{V}C$ et $\mathbb{L}sk_{n+1} E^\bullet \rightarrow \mathbb{L}sk_1 V^\bullet$ est un objet structuré de type $L_C(M, n)$;
- (2) Si l'homotopie cofibre de f est un objet de type $L_{\mathbb{F}}(M, n-1)$, alors

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}sk_{n+1} E^\bullet & \longrightarrow & U^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}sk_1 V^\bullet & \longrightarrow & V^\bullet \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien.

Démonstration. La démonstration du premier point est similaire à celle de la Proposition 4.8. Pour le deuxième, utiliser la suite exacte longue pour $\pi^{\natural}$. $\square$

Corollaire 4.10. [BRS14, Page 58] Soit $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{S}$ Reedy cofibrant. Alors la filtration squelettique

$$sk_1 X^\bullet \rightarrow sk_2 X^\bullet \rightarrow \dots \rightarrow X^\bullet$$

fournit la tour de Postnikov de $X^\bullet$. En particulier, pour $n \geq 1$ et $C := \pi^0 H_*(X^\bullet)$, $M := \pi^n H_*(sk_{n+1} X^\bullet)$, il existe un carré homotopiquement cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} L_C(M, n+1) & \xrightarrow{w_n} & sk_n(X^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ sk_1 X^\bullet & \longrightarrow & sk_{n+1} X^\bullet. \end{array}$$

(Le morphisme w_n est le n -ième L -invariant¹.)

Démonstration. Conséquence formelle de la Proposition 4.9. $\square$

4.1. Existence d'objets de type $L_C(M, n)$. En topologie algébrique classique on utilise $K(A, n) \simeq \Omega K(A, n+1)$. Le résultat suivant est analogue, corollaire de la Proposition 4.8.

Exemple 4.11. [BRS14, Construction 5.22] Soient $X^\bullet$ un objet de type $L_C(M, n)$ et considérer le produit fibré homotopique

$$\begin{array}{ccc} E^\bullet & \longrightarrow & \mathbb{L}sk_1 X^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}sk_1 X^\bullet & \longrightarrow & X^\bullet. \end{array}$$

Alors $\mathbb{L}sk_{n+2} E^\bullet$ est un objet de type $L_C(M, n+1)$.

Proposition 4.12. Soient $C \in \text{Ob } \mathcal{CA}$, $M \in \text{Ob } \mathcal{V}C$ et $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Alors il existe

- (1) un objet de type $L(C, 0)$;
- (2) un objet de type $L_C(M, n)$.

1. néologisme de moi-même (à éviter ?)

Démonstration. (Indications.)

On peut réaliser le début d'une résolution colibre de C par un diagramme de $c\mathcal{S}^g$:

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \cdots\cdots\cdots & cG^0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ cG^0 & \longrightarrow & cG^1, \end{array}$$

où G^0, G^1 sont des GEMs. On prend $X^\bullet$ le produit fibré homotopique de ce diagramme et on vérifie par excision homotopique (pour les comodules cosimpliciaux) que $\mathbb{L}sk_1 X^\bullet$ est de type $L(C, 0)$. (Voir [BRS14, Construction 5.20].)

Pour les objets $L_C(M, n)$, par Exemple 4.11, il suffit de construire $L_C(M, 1)$. La construction précédente fournit $L(C, 0) \rightarrow L(\iota_C M, 0)$, donc on peut former le carré homotopiquement cartésien :

$$\begin{array}{ccc} E^\bullet & \longrightarrow & L(C, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(C, 0) & \longrightarrow & L(\iota_C M, 0). \end{array}$$

On démontre [BRS14, Constructions 5.21, 5.22] que $\mathbb{L}sk_2 E^\bullet$ est un objet de type $L_C(M, 1)$, en utilisant l'excision homotopique et la suite exacte spirale. $\square$

5. ESPACES DE MODULE

Rappels 5.1. (Voir [BRS14, Appendix D].) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèle et $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

- (1) La catégorie $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ est la sous-catégorie des objets $\simeq X$ de $\mathcal{C}$ et des équivalences faibles ; l'espace de module $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est son espace classifiant $\text{Nerf } \mathcal{W}(\mathcal{C}) \in \text{Ob } \mathcal{S}$.
- (2) Les travaux de Dwyer et Kan fournissent des renseignements sur $\mathcal{M}(X)$. En particulier, si X est cofibrant et fibrant

$$\mathcal{M}(X) \simeq B\text{Aut}^h(X).$$

- (3) Pour $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, soit $\mathcal{W}_{\text{Hom}}(X, Y)$ la catégorie des zig-zags :

$$X \longrightarrow \bullet \xleftarrow{\simeq} \bullet \longrightarrow \dots \xleftarrow{\simeq} Y$$

et des morphismes entre de tels diagrammes, dont les composantes sont des équivalences faibles.

La situation qui nous intéresse est l'application

$$\mathcal{M}(X^\bullet) \rightarrow \mathcal{M}(H_*(X^\bullet))$$

induit pour $X^\bullet \in c\mathcal{S}$ par H_* , où les espaces de module sont définis respectivement par rapport à $c\mathcal{S}^g$ et $c\mathcal{A}^g$.

5.1. Espace de module pour $L_C(M, n)$. Soient $C \in \mathcal{CA}$, $M \in \mathcal{VC}$ et $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Les objets de type $L(C, 0)$ et $L_C(M, n)$ sont uniques à homotopie près ; ceci peut être rendu plus précis en utilisant l'espace de module suivant.

Définition 5.2. Soit $\mathcal{W}(L_C(M, n) \rightarrow L(C, 0))$ la catégorie dont les objets sont les objets structurés $(Y^\bullet, \eta)$ de type $L_C(M, n)$ et les morphismes $\eta \rightarrow \eta'$ dont les composantes sont des équivalences faibles ; soit $\mathcal{M}(L_C(M, n) \rightarrow L(C, 0))$ son espace classifiant.

Proposition 5.3. [BRS14, Proposition 5.28 et Corollary 5.29] *L'homologie $H_* : c\mathcal{S} \rightarrow c\mathcal{CA}$ induit des équivalences faibles :*

- (1) $\mathcal{M}(L(C, 0)) \simeq \mathcal{M}(K(C, 0)) \simeq B\text{Aut}(C)$
- (2) $\mathcal{M}(L_C(M, n) \rightarrow L(C, 0)) \simeq \mathcal{M}(K_C(M, n) \rightarrow K(C, 0)) \simeq B\text{Aut}_C(M)$.

En particulier, ces espaces de module sont connexes. Donc les objets de type $L_C(M, n)$ sont uniques à homotopie près.

La démonstration utilise le résultat correspondant pour les coalgèbres instables, [BRS14, Proposition 4.26], ainsi que le résultat suivant.

Proposition 5.4. [BRS14, Proposition 5.24] *Soit $Y^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{S}$ un objet Reedy cofibrant de type $L_C(M, n)$ et soit $K_C(M, n) \rightarrow H_*(Y^\bullet)$ l'objet de type $K_C(M, n)$ fourni par la Proposition 4.8. Alors, pour $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{S}$, H_* et l'association qui envoie un morphisme $Y^\bullet \xrightarrow{f} U^\bullet$ de $c\mathcal{S}$ à la composée*

$$K_C(M, n) \rightarrow H_*(Y^\bullet) \xrightarrow{H_*f} H_*(U^\bullet)$$

induit un foncteur

$$\mathcal{W}_{\text{Hom}}(Y^\bullet, X^\bullet) \rightarrow \mathcal{W}_{\text{Hom}}(K_C(M, n), H_*(X^\bullet))$$

qui est une équivalence faible (en passant à $\mathcal{M}$ ou par définition pour les catégories).

Démonstration. (Indications). On peut supposer que $X^\bullet$ est $\mathcal{G}$ -colibre. Ainsi on peut réduire au cas $X^\bullet = \text{hom}^{\text{ext}}(\partial\Delta^s, cG)$ pour G un $\mathcal{G}$ -injectif. Ensuite on se ramène à l'étude des espaces fonctionnels de sorte de pouvoir utiliser la représentabilité de la cohomologie. $\square$

5.2. Rattachement d'objets de type $L_C(M, n)$. On fixe $C \in c\mathcal{A}$, $M \in \mathcal{V}C$ et $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Notation 5.5. Pour $X^\bullet \in \text{Ob } c\mathcal{S}$, soit $\mathcal{W}(L(C, 0) \leftarrow L_C(M, n) \rightsquigarrow X^\bullet)$ la catégorie dont les objets sont les couples $((U^\bullet, \eta), f : U^\bullet \rightarrow X^\bullet)$, où $(U^\bullet, \eta)$ est un objet structuré de type $L_C(M, n)$ et les morphismes sont les morphismes de diagramme qui sont des équivalences faibles sur les composantes.

Remarque 5.6. Par construction on dispose d'un foncteur oubli :

$$\mathcal{W}(L(C, 0) \leftarrow L_C(M, n) \rightsquigarrow X^\bullet) \rightarrow \mathcal{W}(L(C, 0) \leftarrow L_C(M, n)) \times \mathcal{W}(X^\bullet)$$

et donc d'un morphisme entre les espaces classifiants :

$$\mathcal{M}(L(C, 0) \leftarrow L_C(M, n) \rightsquigarrow X^\bullet) \rightarrow \mathcal{M}(L(C, 0) \leftarrow L_C(M, n)) \times \mathcal{M}(X^\bullet).$$

Les constructions analogues existent pour $c\mathcal{CA}$; en particulier on a un foncteur oubli :

$$\mathcal{M}(K(C, 0) \leftarrow K_C(M, n) \rightsquigarrow H_*(X^\bullet)) \rightarrow \mathcal{M}(H_*(X^\bullet))$$

et le foncteur $H_* : c\mathcal{S} \rightarrow c\mathcal{CA}$ induit

$$\mathcal{M}(L(C, 0) \leftarrow L_C(M, n) \rightsquigarrow X^\bullet) \rightarrow \mathcal{M}(K(C, 0) \leftarrow K_C(M, n) \rightsquigarrow H_*(X^\bullet))$$

compatible avec les foncteurs oubli.

Théorème 5.7. [BRS14, Theorem 3.2] $\forall n \geq 0$, le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(L(C, 0) \leftarrow L_C(M, n) \rightsquigarrow X^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{M}(K(C, 0) \leftarrow K_C(M, n) \rightsquigarrow H_*(X^\bullet)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(X^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{M}(H_*(X^\bullet)) \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

Démonstration. (Indications.) On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}(L(C, 0) \leftarrow L_C(M, n) \rightsquigarrow X^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{M}(K(C, 0) \leftarrow K_C(M, n) \rightsquigarrow H_*(X^\bullet)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{M}(L(C, 0) \leftarrow L_C(M, n)) \times \mathcal{M}(X^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{M}(K(C, 0) \leftarrow K_C(M, n)) \times \mathcal{M}(H_*(X^\bullet)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{M}(X^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{M}(H_*(X^\bullet))
 \end{array}$$

dont le carré inférieur est homotopiquement cartésien par la Proposition 5.3.

Pour le carré supérieur, on utilise le résultat général sur les espaces de module, [BRS14, Theorem D.10] et la Proposition 5.4. $\square$

RÉFÉRENCES

- [Bou03] A. K. Bousfield. Cosimplicial resolutions and homotopy spectral sequences in model categories. *Geom. Topol.*, 7 :1001–1053, 2003.
- [BRS14] G. Biedermann, G. Raptis, and M. Stelzer. The realization space of an unstable coalgebra. *ArXiv 1409.0410 :math.AT*, September 2014.
- [GJ09] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. Reprint of the 1999 edition [MR1711612].