GDT 2014 : ANNEAUX DE HOPF

GEOFFREY POWELL

Un premier objectif du groupe de travail est de comprendre la structure de l'anneau de Hopf pour la K-théorie de Morava $K(n)$ (pour l'homologie singulière $H\mathbb{F}_p$) d'après Wilson [Wil84] et la structure dans le cas connexe $k(n)$, d'après Hara [Har91]. Pour ça, il nous faut introduire les notions de base de la théorie des anneaux de Hopf (ou de l'algèbre coalgébrique [HT98]).

Ébauche de programme :

(1) *Anneaux de Hopf* : présentation de la théorie de base des anneaux de Hopf comme les objets *anneau* de la catégorie des coalgèbres sur un anneau (gradué) commutatif - en suivant [RW77, Section 1]. (L'orateur pourrait également consulter le survol de Wilson [Wil00] et [Wil82, Section II.7].) Il faudra définir la catégorie des anneaux de Hopf et, si le temps le permet, la notion de module sur un anneau de Hopf (voir par exemple [HT98]).

Il faudra illustrer la théorie par l'anneau-anneau $R[S]$ (R, S des anneaux commutatifs) et la structure d'anneau de Hopf de $(H\mathbb{F}_p)_*(\mathbf{E}_\bullet)$, $\mathbf{E}_\bullet$ le Ω-spectre associé à une théorie de cohomologie multiplicative commutative E (exemples : $H\mathbb{F}_p$, MU, KU etc.) - mais sans préciser la structure détaillée!

Ceux qui souhaitent se faire peur pourraient essayer de consulter une partie de [BJW95].

(2) *Anneaux de Hopf libres :* on a besoin de certaines constructions pour les anneaux de Hopf (qui viennent souvent de constructions pour les algèbres de Hopf bicommutatives) :
- l'anneau de Hopf libre sur une coalgèbre;
- le produit tensoriel $\boxtimes$ de deux anneaux de Hopf;
- le produit tensoriel relatif. . . ;
- l'imposition de relations (notion d'idéal de Hopf).

On pourrait également considérer le foncteur Q des *indécomposables*.

Références (?) : [RW77], [HT98], [Goe99, Section II.5].

(3) *Le modèle algébrique de Ravenel et Wilson - en présence d'orientations complexes :* en utilisant le matériel précédent et la *relation principale* [RW77, Theorem 3.8] (qui prend en compte les structures $\mathbb{C}$-orientées), il faut introduire le modèle algébrique $E^R_*(\mathbf{G}_\bullet)$ de [RW77, Section 4], ainsi que la transformation naturelle : $E^R_*(\mathbf{G}_\bullet) \to E_*(\mathbf{G}_\bullet)$ (pour E, G convenables). Énoncer le fait que ceci est un isomorphisme (pour les espaces pairs) dans les cas (E, G) suivants : $(H\mathbb{F}_p, MU)$ ou même (MU, MU).

Cette notion pour $(H\mathbb{F}_p, E)$ est à comparer à l'approximation algébrique au foncteur $V \mapsto E^*(BV^\sharp)$, V un groupe abélien élémentaire définie à l'aide de la loi de groupe formel de E. (Penser à la théorie de Lannes!)

(4) *Premiers exemples :* traiter par exemple $(H\mathbb{F}_p)_*(\mathbf{KU}_\bullet)$ (ou plutôt $(H\mathbb{F}_p)_*(BU)$); $(H\mathbb{F}_p)_*(K(\mathbf{F}_p, \bullet))$ p impair, en suivant [Wil82, Section II.8] et [Wil82, Theorem 8.5]. (Sans démonstration ou avec quelques indications? Ce serait peut-être le moment d'expliquer que la structure d'anneau de Hopf est

Date: February 10, 2014.

utile dans la suite spectrale bar (d'après Thomason et Wilson).) Expliquer la relation avec $(H\mathbb{F}_p)_*(\mathbf{MU}_{2\bullet})$.

Éventuellement aborder le cas de $K(n)_*(K(\mathbf{F}_p, \bullet))$, en suivant Ravenel et Wilson [RW80] (voir également [Wil82]).

(5) *Les K-théories de Morava :* expliquer la présentation de l'anneau de Hopf $(H\mathbb{F}_p)_*(\mathbf{K(n)}_\bullet)$ obtenu par Wilson [Wil84, Theorem 1] (en particulier [Wil84, Section 2]). Déduction de [Wil84, Theorem 1] du [Wil84, Theorem 2.1]; quelques indications sur la démonstration du 2.1.

Expliquer la présentation de $(H\mathbb{F}_p)_*(\mathbf{k(n)}_\bullet)$ obtenu par Hara [Har91].

(6) *D'autres exemples?* Il y a plein d'autres exemples qu'on pourrait aborder; un exemple assez technique (!!) correspond à KO et ko [Mor07]. Dans un premier temps, ce serait probablement mieux de rester dans le monde $\mathbb{C}$-orienté?

D'autres sujets à aborder (???) :

- La structure de catégorie abélienne des $\mathbb{F}_p$-algèbres de Hopf et la catégorie des modules de Dieudonné (en suivant la présentation de Goerss [Goe99]); application à l'étude des anneaux de Hopf $(H\mathbb{F}_p)_*(\mathbf{E}_\bullet)$ - d'après Goerss [Goe99].
- L'action de l'algèbre de Steenrod en algèbre coalgébrique - éventuellement en faisant appel à Kashiwabara.

References

[BJW95] J. Michael Boardman, David Copeland Johnson, and W. Stephen Wilson, *Unstable operations in generalized cohomology*, Handbook of algebraic topology, North-Holland, Amsterdam, 1995, pp. 687–828. MR 1361900 (97b:55022)

[Goe99] Paul G. Goerss, *Hopf rings, Dieudonné modules, and $E_*\Omega^2S^3$*, Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998), Contemp. Math., vol. 239, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 115–174. MR 1718079 (2000j:57078)

[Har91] Shin-ichiro Hara, *The Hopf rings for connective Morava K-theory and connective complex K-theory*, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), no. 1, 43–70. MR 1093326 (92c:55005)

[HT98] John R. Hunton and Paul R. Turner, *Coalgebraic algebra*, J. Pure Appl. Algebra **129** (1998), no. 3, 297–313. MR 1631257 (99g:16048)

[Mor07] Dena S. Cowen Morton, *The Hopf ring for bo and its connective covers*, J. Pure Appl. Algebra **210** (2007), no. 1, 219–247. MR 2311183 (2009b:55011)

[RW80] Douglas C. Ravenel and W. Stephen Wilson, *The Morava K-theories of Eilenberg-Mac Lane spaces and the Conner-Floyd conjecture*, Amer. J. Math. **102** (1980), no. 4, 691–748. MR 584466 (81i:55005)

[RW77] ———, *The Hopf ring for complex cobordism*, J. Pure Appl. Algebra **9** (1976/77), no. 3, 241–280. MR 0448337 (56 #6644)

[Wil82] W. Stephen Wilson, *Brown-Peterson homology: an introduction and sampler*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 48, Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, D.C., 1982. MR 655040 (83j:55005)

[Wil84] ———, *The Hopf ring for Morava K-theory*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 5, 1025–1036. MR 764345 (86c:55008)

[Wil00] ———, *Hopf rings in algebraic topology*, Expo. Math. **18** (2000), no. 5, 369–388. MR 1802339 (2001j:57050)