

TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

GEOFFREY POWELL

TABLE DES MATIÈRES

1. Catégories et Foncteurs	2
2. Espaces topologiques	5
3. Homotopie	9
4. Chemins et le groupoïde fondamental	17
5. Revêtements	30
6. Homologie	43
7. Objets bisimpliciaux et le morphisme d'Alexander-Whitney	66
8. Cohomologie	72
Références	76

1. CATÉGORIES ET FONCTEURS

1.1. Catégories.

Définition 1.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée

- d'une classe d'objets $\text{Ob}\mathcal{C}$;
- d'un ensemble de *morphismes* $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\forall X, Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$, (la classe de tous les morphismes sera dénotée $\text{Mor}\mathcal{C}$) ;
- d'un *élément neutre* $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$;
- d'une loi de composition

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z);$$

qui vérifient les propriétés suivantes

- (1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (associativité) ;
- (2) $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $1_Y \circ f = f = f \circ 1_X$ (élément neutre).

Définition 1.2. Une catégorie $\mathcal{C}$ est *petite* si $\text{Ob}\mathcal{C}$ est un ensemble (et donc $\text{Mor}\mathcal{C}$ est un ensemble) ; elle est *finie* si $\text{Mor}\mathcal{C}$ est fini.

Définition 1.3. Une *sous-catégorie* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ est une catégorie telle que $\text{Ob}\mathcal{D}$ est une sous-classe de $\text{Ob}\mathcal{C}$ et, $\forall D_1, D_2 \in \text{Ob}\mathcal{D}$, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D_1, D_2)$ et les lois de composition et les éléments neutres sont compatibles.

Une sous-catégorie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ est *pleine* si $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D_1, D_2)$.

Exemple 1.4.

- (1) La catégorie discrète associée à un ensemble K , $\text{Ob}K = K$ et $\text{Mor}K = K$ (les seuls morphismes sont les identités). Par exemple la catégorie vide, $\emptyset$ et la catégorie $*$ ayant un seul objet.
- (2) Un groupe discret G définit une catégorie $\text{Ob}G = *$ et $\text{Mor}G = G$.
- (3) La catégorie **Ens** des ensembles et des applications d'ensembles.
- (4) La catégorie $\mathfrak{T}$ des espaces topologiques et des morphismes continus.
- (5) La catégorie $\mathfrak{T}_{\bullet}$ des espaces topologiques pointés : objets $(X, *_X \in X)$, X un espace topologique, et morphismes $f : (X, *_X) \rightarrow (Y, *_Y)$, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme continu tel que $f(*_X) = *_Y$.
- (6) La catégorie **Gp** des groupes et des homomorphismes et sa sous-catégorie pleine **Ab** des groupes abéliens.
- (7) Pour R un anneau unitaire, la catégorie $R - \text{Mod}$ des R -modules (à gauche) et des morphismes de R -modules.

Définition 1.5. La catégorie Δ des *ordinaux* est la catégorie

- objets : $\{[n] | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$;
- morphismes : $\text{Hom}_{\Delta}([m], [n])$ l'ensemble des applications $\{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ non-décroissantes ($i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$).

Exercice 1.6. Donner une *présentation* de Δ par des générateurs et relations.

Définition 1.7. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La *catégorie opposée* $\mathcal{C}^{\text{op}}$ est la catégorie ayant $\text{Ob}\mathcal{C} = \text{Ob}\mathcal{C}^{\text{op}}$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, la loi de composition étant induite par celle de $\mathcal{C}$, idem pour les éléments neutres.

Définition 1.8. Une catégorie $\mathcal{C}$ est un *groupoïde* si tout morphisme de $\mathcal{C}$ est *invertible*.

1.2. Foncteurs. Un *foncteur* est un morphisme entre deux catégories.

Définition 1.9. Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée

- d'un objet $F(X) \in \text{Ob}\mathcal{D}$, $\forall X \in \text{Ob}\mathcal{C}$;
- d'une application : $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, $\forall X, Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$;

telle que

- (1) $\forall X \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $F(1_X) = 1_{F(X)}$;
- (2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Remarque 1.10. Un *foncteur contravariant* de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$ est un foncteur $G : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$.

Exercice 1.11. Soient $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ deux foncteurs, montrer que la composée $G \circ F$ donnée par

- $G \circ F(X) := G(F(X))$, $\forall X \in \text{Ob}\mathcal{C}$;
- $G \circ F(f) = G(F(f))$, $\forall f \in \text{Mor}\mathcal{C}$;

est un foncteur $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$.

Définition 1.12. Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est *fidèle* (respectivement *pleinement fidèle*) si $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ est une injection (resp. bijection), $\forall X, Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$.

Exercice 1.13.

- (1) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, montrer qu'il existe un foncteur identité $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tel que $1_{\mathcal{C}}(X) = X$, $\forall X \in \text{Ob}\mathcal{C}$ et $1_{\mathcal{C}}(f) = f$, $\forall f \in \text{Mor}\mathcal{C}$.
- (2) Soit $\mathcal{D}$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$; montrer que l'inclusion définit un foncteur fidèle $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ qui est pleinement fidèle si et seulement si $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie pleine.
- (3) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $Z \in \text{Ob}\mathcal{C}$, montrer que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ sont des foncteurs.
- (4) Soit $\mathbb{Z}[S]$ le groupe abélien libre engendré par un ensemble S ; montrer que ceci définit un foncteur $\mathbb{Z}[\cdot] : \text{Ens} \rightarrow \text{Ab}$ et que l'oubli de la structure d'un groupe abélien définit un foncteur $\text{Ab} \rightarrow \text{Ens}$. Identifier le foncteur $\text{Ab} \rightarrow \text{Ens}$ donné par $\text{Hom}_{\text{Ab}}(\mathbb{Z}[S], -)$.
- (5) Montrer que la *topologie discrète* sur un ensemble définit un foncteur $\text{Ens} \rightarrow \mathfrak{T}$ et que l'oubli de la topologie définit un foncteur $\mathfrak{T} \rightarrow \text{Ens}$.
- (6) Montrer que l'oubli du point de base définit un foncteur $\mathfrak{T}_{\bullet} \rightarrow \mathfrak{T}$ et qu'il existe un foncteur $(-)_+ : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T}_{\bullet}$, où $X_+ = X \amalg *$, pointé par $*$. Identifier le foncteur $\text{Hom}_{\mathfrak{T}_{\bullet}}(X_+, -)$.

Exercice 1.14. Montrer que les petites catégories et les foncteurs forment une catégories, CAT.

1.3. Transformations naturelles.

Définition 1.15. Une *transformation naturelle* $\eta : F \rightarrow G$ entre foncteurs $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée d'un morphisme $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$, $\forall X \in \text{Ob}\mathcal{C}$, telle que, $\forall f : X \rightarrow Y$ de $\text{Mor}\mathcal{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y). \end{array}$$

Exercice 1.16. Par oubli de la structure du groupe abélien, on peut considérer $\mathbb{Z}[-]$ comme un foncteur $\mathbb{Z}[-] : \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$. Construire une transformation naturelle $1_{\text{Ens}} \rightarrow \mathbb{Z}[S]$ telle que, $\forall S \in \text{Ob}\text{Ens}$, $\eta_S : S \rightarrow \mathbb{Z}[S]$ est une injection.

Définition 1.17.

- (1) Une *équivalence naturelle* entre deux foncteurs $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est une transformation naturelle $\eta : F \rightarrow G$ telle que, $\forall X \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}$.
- (2) Deux catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont *équivalentes* s'il existe foncteurs $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ et équivalences naturelles $FG \xrightarrow{\sim} 1_{\mathcal{D}}$ et $GF \xrightarrow{\sim} 1_{\mathcal{C}}$.

Exercice 1.18. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie; montrer qu'il existe une catégorie $\Delta^{\text{op}}\mathcal{C}$, la *catégorie des objets simpliciaux de $\mathcal{C}$* , ayant objets les foncteurs $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ et morphismes les transformations naturelles entre foncteurs de cette forme. (Par exemple, $\Delta^{\text{op}}\mathbf{Ens}$ est la catégorie des ensembles simpliciaux.)

Remarque 1.19. La *catégorie $\Delta\mathcal{C}$ des objets cosimplicaux de $\mathcal{C}$* est définie de manière analogue, en utilisant les foncteurs $\Delta \rightarrow \mathcal{C}$.

Exercice 1.20. Soient $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ deux catégories petites et $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories quelconques.

- (1) Montrer que les foncteurs $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ et leurs transformations naturelles forment une catégorie, dénotée $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$.
- (2) Soit $\alpha : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$ un foncteur; montrer que α induit un foncteur $\mathcal{C}^{\alpha} : \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$, par précomposition.
- (3) Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur, montrer que F induit un foncteur $F^{\mathcal{I}} : \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{I}}$.

2. ESPACES TOPOLOGIQUES

2.1. Espaces topologiques et applications continues. Pour X un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X .

Définition 2.1. Un *espace topologique* est un ensemble X muni d'un ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ des *parties ouvertes* de X tel que

- toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$;
- toute union (arbitraire) d'éléments de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$.

Remarque 2.2. Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique, $X \in \mathcal{O}$ (une intersection vide d'éléments de $\mathcal{P}(X)$ est égal à X) et $\emptyset \in \mathcal{O}$ (une union vide d'éléments de $\mathcal{P}(X)$ est vide).

Définition 2.3. Une partie $C \in \mathcal{P}(X)$ est une *fermée* de $(X, \mathcal{O})$ si $X \setminus C \in \mathcal{O}$.

Exemple 2.4. Voici quelques exemples d'espaces topologiques :

- (1) les espaces métriques ;
- (2) la *topologie grossière* $(X, \mathcal{O} = \{\emptyset, X\})$, X un ensemble ;
- (3) la *topologie discrète* $(X, \mathcal{O} = \mathcal{P}(X))$.

Définition 2.5. Soient $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ deux topologies sur l'ensemble X . La topologie $\mathcal{O}_1$ est *plus fine* que la topologie $\mathcal{O}_2$ si $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.

Remarque 2.6. La *topologie grossière* est la topologie la moins fine sur un ensemble X et la *topologie discrète* est la topologie la plus fine sur X . Les deux topologies coïncident si et seulement si $X = \{*\}$.

Définition 2.7. Soient X, Y deux espaces topologiques ; une application $f : X \rightarrow Y$ est *continue* si, pour tout ouvert $U \subset Y$, $f^{-1}(U) \subset X$ est un ouvert de X .

Les espaces topologiques et les applications continues forment une catégorie $\mathfrak{T}$.

Définition 2.8. Un *homéomorphisme* est un isomorphisme de la catégorie $\mathfrak{T}$; deux espaces topologiques X, Y sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme $X \xrightarrow{\cong} Y$.

Définition 2.9. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et A une partie de X . La *topologie sous-espace* sur A (induite par la topologie $(X, \mathcal{O})$) est la topologie dont les ouverts sont $\{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$.

Exercice 2.10. Montrer que la topologie sous-espace sur A est la topologie la moins fine sur A pour laquelle l'application d'inclusion $A \hookrightarrow X$ est continue.

Définition 2.11. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $f : X \twoheadrightarrow Y$ une application surjective d'ensembles. La *topologie quotient* sur Y est la topologie telle que V est ouvert dans Y si et seulement si $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X . (On dit alors que $f : X \twoheadrightarrow Y$ est un *morphisme quotient*.)

Exercice 2.12. Montrer que la topologie quotient sur Y est la topologie la plus fine sur Y pour laquelle l'application $X \rightarrow Y$ est continue.

Définition 2.13. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est *ouverte* si U ouvert dans $X \Rightarrow f(U)$ est ouvert dans Y .

Exercice 2.14.

- (1) Soient $f : X \twoheadrightarrow Y$ un morphisme quotient d'espaces topologiques et $A \subset Y$ une partie ouverte ; montrer que $f^{-1}(A) \twoheadrightarrow A$ est un morphisme quotient.
- (2) Donner un exemple d'un morphisme quotient $f : X \twoheadrightarrow Y$ qui n'est pas ouvert.
- (3) Donner un exemple d'un morphisme quotient $f : X \twoheadrightarrow Y$ et d'une partie $B \subset Y$ tels que $f^{-1}B \rightarrow B$ n'est pas un morphisme quotient.

- (4) Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ deux surjections continues, où f est un morphisme quotient ; montrer que, si gf est un morphisme quotient, alors g est un morphisme quotient.

Définition 2.15. Une *base* d'une topologie $(X, \mathcal{O})$ est un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ tel que tout élément de $\mathcal{O}$ est une réunion (quelconque) d'éléments de $\mathcal{B}$. Une *sous-base* de $\mathcal{O}$ est un sous-ensemble $\mathcal{B}' \subset \mathcal{O}$ tel que l'ensemble des parties qui sont des intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{O}$.

Exercice 2.16.

- (1) Soient X un ensemble et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble de parties de X . Montrer qu'il existe une topologie $(X, \mathcal{O}_{\mathcal{B}})$ sur X telle que $\mathcal{B}$ est une sous-base de $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$.
- (2) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Si $\mathcal{B}_Y$ est une sous-base de $\mathcal{O}_Y$, montrer que f est continue si et seulement si $f^{-1}(B)$ est ouvert dans X , $\forall B \in \mathcal{B}_Y$.

Définition 2.17. Soit $\{(X_i, \mathcal{O}_i) | i \in \mathcal{I}\}$ un ensemble d'espaces topologiques. La *topologie produit* sur $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ est la topologie définie par la sous-base $\{\text{pr}_i^{-1}(U) | i \in \mathcal{I}, U \in \mathcal{O}_i\}$, où $\text{pr}_i : \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i \rightarrow X_i$ est la projection.

Exercice 2.18. Soit $\{(X_i, \mathcal{O}_i) | i \in \mathcal{I}\}$ un ensemble d'espaces topologiques et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ un espace topologique.

- (1) Montrer que la projection $\text{pr}_i : \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i \rightarrow X_i$ est un morphisme ouvert, $\forall i \in \mathcal{I}$.
- (2) Montrer qu'une application $Y \xrightarrow{f} \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ est continue si et seulement si $\text{pr}_i \circ f$ est continue, $\forall i \in \mathcal{I}$.

Définition 2.19. Soient X un espace topologique et A une partie de X . Un *voisinage* de A dans X est une partie $B \subset X$ telle qu'il existe un ouvert U tel que $A \subset U \subset B$. Un *voisinage ouvert* de A dans X est un ouvert de X qui est un voisinage de A .

Définition 2.20. Soient X un espace topologique et A une partie de X .

- (1) L'*intérieur* de A , $\text{Int}(A)$, est l'ouvert maximal de X contenu dans A (la réunion de tous les ouverts contenus dans A).
- (2) L'*adhérence* de A , $\overline{A}$ est le fermé minimal de X qui contient A (l'intersection de tous les fermés de X qui contiennent A).
- (3) La *frontière* de A , ∂A , est le complément $\overline{A} \setminus \text{Int} A$.

Exercice 2.21. Montrer que :

- (1) $\overline{A} = X \setminus (\text{Int}(X \setminus A))$;
- (2) $\text{Int}(A) = X \setminus (\overline{X \setminus A})$;
- (3) $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$;
- (4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Montrer qu'il existe des inclusions

- (1) $\text{Int}(A \cup B) \supset \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$;
- (2) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;

et donner des exemples où les inclusions sont strictes.

Définition 2.22. Soient X un espace topologique et A une partie de X .

- (1) A est *dense* dans X si $\overline{A} = X$;
- (2) A est *nulle-part dense* dans X si $\text{Int}(\overline{A}) = \emptyset$.

2.2. Espaces connexes.

Définition 2.23. Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est *connexe* si les seules parties ouvertes et fermées de X sont $\{\emptyset, X\}$.

Exercice 2.24. Montrer que :

- (1) un espace X est connexe si et seulement si toute application continue $X \rightarrow \{*_1, *_2\}$, où $\{*_1, *_2\}$ est muni de la topologie discrète, est constante ;
- (2) le produit $X \times Y$ de deux espaces topologiques est connexe si et seulement si X et Y sont connexes ;
- (3) montrer que tout espace topologique X est homéomorphe à la réunion disjointe d'espaces connexes (les *composantes connexes* de X).

2.3. Espaces séparés.

Définition 2.25. Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est *séparé* si, $\forall x \neq y \in X$, $\exists U, V$ ouverts de X tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exemple 2.26. Les espaces métriques sont séparés.

Exercice 2.27. Montrer que

- (1) un ensemble X muni de la topologie grossière est séparé ssi $X \in \{\emptyset, \{*\}\}$;
- (2) l'espace topologique X est séparé si et seulement si le sous-ensemble $X \subset X \times X$ diagonal (les éléments (x, x)) est fermé dans $X \times X$;
- (3) pour deux morphismes continus $f, g : A \rightrightarrows X$, où X est séparé, l'ensemble $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ est fermé dans A ;
- (4) un sous-espace B d'un espace topologique séparé est séparé.
- (5) Donner un exemple d'un morphisme quotient $q : X \twoheadrightarrow Y$ tel que X est séparé mais Y ne l'est pas.

2.4. Espaces compacts.

Définition 2.28.

- (1) Un *recouvrement* d'un espace topologique X est une famille $\{A_i | i \in \mathcal{I}\}$ de parties de X telle que $X = \bigcup_i A_i$; il est un *recouvrement ouvert* si A_i est ouverte, $\forall i \in \mathcal{I}$.
- (2) Un *sous-recouvrement* d'un recouvrement $\{A_i | i \in \mathcal{I}\}$ est une sous-famille qui est un recouvrement de X .

Définition 2.29. Un espace topologique X est *quasi-compact* si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini ; il est *compact* si, en plus, il est séparé.

Exemple 2.30. L'espace $[0, 1]$, considéré comme sous-espace de $\mathbb{R}$ (topologie métrique habituelle) est compact ; $(0, 1)$ ne l'est pas.

Exercice 2.31.

- (1) Montrer qu'un ensemble X muni de la topologie grossière est quasi-compact ; quand est-il compact ?
- (2) Montrer qu'un ensemble X muni de la topologie discrète est compact si et seulement si X est un ensemble fini.
- (3) Soient X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-espace. Montrer que
 - (a) si X est quasi-compact et A est fermé dans X , alors A est quasi-compact ;
 - (b) si A est compact et X est séparé, alors A est fermé.
- (4) Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme continu ; montrer que, si A est compact dans X , alors $f(A)$ est quasi-compact dans Y ; en déduire que, si Y est séparé, $f(A)$ est fermé dans Y .

- (5) Soient A, B deux sous-espaces compacts d'un espace séparé X , tels que $A \cap B = \emptyset$; montrer qu'il existe voisinages ouverts U, V de A, B respectivement, tels que $U \cap V = \emptyset$.

Définition 2.32. Un espace topologique X est *localement compact* si

- (1) X est séparé;
- (2) tout point $x \in X$ admet un voisinage compact B .

Exercice 2.33. Soit X un espace topologique localement compact. Montrer que toute partie ouverte U de X est localement compact.

2.5. Espaces fonctionnels.

Notation 2.34. Soient X, Y deux espaces topologiques et $K \subset X, U \subset Y$ deux parties;

- (1) $\text{Map}(X, Y)$ est l'ensemble des applications continues $X \rightarrow Y$;
- (2) $W(K, U) \subset \text{Map}(X, Y)$ est le sous-ensemble des applications f telles que $f(K) \subset U$.

Définition 2.35. Soient X, Y deux espaces topologiques, la topologie *compacte-ouverte* sur $\text{Map}(X, Y)$ est la topologie ayant sous-base les parties $W(K, U)$, où K est compacte et U est ouverte.

Exercice 2.36. Soient X, Y, Z trois espaces topologiques.

- (1) Si $f : X \times Y \rightarrow Z$ est une application continue, montrer que le morphisme adjoint $\tilde{f} : X \rightarrow \text{Map}(Y, Z)$ défini par $(\tilde{f}(x))(y) = f(x, y)$ est continu.
- (2) Si X est localement compact, montrer que le morphisme d'évaluation $X \times \text{Map}(X, Z) \rightarrow Z$ est continu.
- (3) Si X, Y sont localement compacts, montrer qu'il existe un homéomorphisme $\text{Map}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\cong} \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z))$.

3. HOMOTOPIE

3.1. Homotopie. En théorie d'homotopie, on considère les espaces topologiques et les morphismes à déformation près ; les déformations sont paramétrisées par l'espace topologique $I = [0, 1]$ (l'intervalle). Il existe deux morphismes $\eta_0, \eta_1 : * \rightrightarrows I$ dans $\mathfrak{T}$, qui correspondent à l'inclusion des points 0, 1 respectivement.

Définition 3.1. Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de $\mathfrak{T}$.

- (1) f, g sont *homotopes* s'il existe une application continue $H : X \times I \rightarrow Y$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\eta_0} & X \times I & \xleftarrow{\eta_1} & X \\ & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array}$$

où les morphismes $\eta_0, \eta_1 : X \rightrightarrows X \times I$ sont induits par $\eta_0, \eta_1 : * \rightrightarrows I$. On notera $f \sim g$ et on dira que H est une *homotopie* de f vers g .

- (2) Soit $A \subset X$ une partie de X telle que $f|_A = g|_A$. Les morphismes f, g sont *homotopes relativement à A* s'il existe une homotopie $H : X \times I \rightarrow Y$ telle que $H(a, t) = f(a)$ pour tout $t \in I$ et $a \in A$. On écrira $f \sim g \text{ rel } A$ ou $f \sim_{\text{rel } A} g$.

Remarque 3.2.

- (1) L'homotopie H n'est pas unique ; si $\alpha : I \rightarrow I$ est une application continue telle que $\alpha|_{\partial I}$ est l'identité, alors $H \circ (1_X \times \alpha)$ est une homotopie de f vers g .
 (2) Une homotopie $\text{rel } \emptyset$ est simplement une homotopie.
 (3) Si $A = * \in X$, alors la notion d'homotopie relative concerne les morphismes pointés, qui envoient $*$ à un point fixé de Y ; il s'agit de la notion d'*homotopie pointée* qu'il convient d'utiliser dans la catégorie des espaces pointés $\mathfrak{T}_\bullet$.

Exercice 3.3. Montrer qu'une homotopie $H : X \times I \rightarrow Y$ est équivalente à une application continue $\tilde{H} : X \rightarrow \text{Map}(I, Y)$ et reformuler les définitions de homotopie en termes de $\tilde{H}$.

Proposition 3.4. Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X et $\psi : A \rightarrow Y$ une application continue. La relation $\sim \text{rel } A$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des morphismes $\text{Hom}_{\mathfrak{T}}(X, Y)_\psi \subset \text{Hom}_{\mathfrak{T}}(X, Y)$ dont la restriction à A est ψ .

Démonstration.

- *réflexivité* : pour $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{T}}(X, Y)_\psi$, il suffit de prendre l'homotopie constante : $H_f(x, t) := f(x)$;
- *symétrie* : si H est une homotopie $\text{rel } A$ de f vers g , H' définie par $H'(x, t) = H(x, 1 - t)$ est une homotopie $\text{rel } A$ de g vers f ;
- *transitivité* : si H_1 est une homotopie $\text{rel } A$ de f vers g et H_2 est une homotopie $\text{rel } A$ de g vers h , on vérifie que l'application $H : X \times I \rightarrow Y$ définie par

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est continue et définit une homotopie $\text{rel } A$ de f vers h .

□

Notation 3.5. Soient X, Y deux espaces topologiques ; on écrit

$$[X, Y] := \text{Hom}_{\mathfrak{T}}(X, Y) / \sim$$

pour l'ensemble des classes d'homotopie.

Lemme 3.6. Soient $h : X' \rightarrow X$, $f, g : X \rightrightarrows Y$ et $k : Y \rightarrow Y'$ des morphismes de $\mathfrak{T}$. Si $H : X \times I \rightarrow Y$ est une homotopie de f vers g , alors $H' := k \circ H \circ (h \times 1_I) : X' \times I \rightarrow Y'$ est une homotopie de $k \circ f \circ h$ vers $k \circ g \circ h$.

Démonstration. L'application $H' : X' \times I \rightarrow Y'$ est continue, donc il suffit de remarquer que $H'(x', 0) = k \circ f \circ h(x')$ et $H'(x', 1) = k \circ g \circ h(x')$. $\square$

Exercice 3.7. Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$, $l, m : Y \rightrightarrows Z$ morphismes de $\mathfrak{T}$ tels que $f \sim g$ et $l \sim m$. Montrer que les composées $l \circ f$, $m \circ g : X \rightrightarrows Z$ sont homotopes.

Proposition 3.8. Soient X, Y, Z trois espaces topologiques ; la composition d'applications continues induit une loi de composition

$$[Y, Z] \times [X, Y] \rightarrow [X, Z]$$

qui définit une catégorie $\mathfrak{T}/\sim$ telle que $\text{Ob } \mathfrak{T}/\sim = \text{Ob } \mathfrak{T}$ et $\text{Hom}_{\mathfrak{T}/\sim}(X, Y) = [X, Y]$.

La relation $\sim$ induit un foncteur

$$\mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T}/\sim$$

qui est l'identité sur les objets.

Démonstration. Le résultat est une conséquence du Lemme 3.6 et de l'exercice 3.7. $\square$

Exercice 3.9. Soit X un espace topologique ; montrer qu'il existe deux foncteurs :

$$\begin{aligned} [X, -] &: \mathfrak{T} \rightarrow \mathbf{Ens} \\ [-, X] &: \mathfrak{T}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}. \end{aligned}$$

Remarque 3.10. La catégorie $\mathfrak{T}/\sim$ n'est pas la *catégorie homotopique* étudiée en topologie algébrique ; pour définir cette catégorie, on a besoin de se restreindre à une sous-catégorie des espaces topologiques (les CW-complexes) ou bien inverser une classe plus large de morphismes (les équivalences faibles).

Définition 3.11.

- (1) Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe un morphisme $g : Y \rightarrow X$ tel que $f \circ g \sim 1_Y$ et $g \circ f \sim 1_X$.
- (2) Deux espaces topologiques X, Y sont homotopes (ou ont le *même type d'homotopie*) s'il existe une équivalence d'homotopie $f : X \rightarrow Y$. On écrira $X \simeq Y$ lorsque les espaces X, Y ont le même type d'homotopie.
- (3) Un espace topologique X est *contractile* si $X \simeq *$.
- (4) Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est *homotopiquement trivial* si f est homotope à un morphisme constant.

Exercice 3.12. Montrer que les espaces suivants sont contractiles :

- (1) l'intervalle I ;
- (2) l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$;
- (3) le disque $D^n \subset \mathbb{R}^n$, $D^n := \{x \mid \|x\| \leq 1\}$.

Exercice 3.13.

- (1) Montrer que deux espaces homéomorphes ont le même type d'homotopie.
- (2) Montrer que l'espace $* \amalg *$ muni de la topologie grossière est contractile mais que $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ ne l'est pas.
- (3) Montrer que la relation $\simeq$ d'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence.
- (4) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et S^1 ont le même type d'homotopie (ces espaces ne sont pas homéomorphes : mais comment le démontrer ?).

Exercice 3.14. Soit Y l'espace $\text{Map}(I, I)_{1_{\partial I}}$ des applications continues f telles que $f|_{\partial I} = 1_{\partial I}$ (ie $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$). Montrer que Y est contractile (remarquer que le morphisme 1_I appartient à Y).

3.2. Exemples fondamentaux. La notion d'homotopie présente quelques problèmes techniques.

Définition 3.15. Soit $P \subset \mathbb{R}^2$ le sous-espace *le peigne*

$$I \times \{0\} \cup \left((\{0\} \cup \{\frac{1}{n} | 0 < n \in \mathbb{Z}\}) \times I \right).$$

Lemme 3.16. *L'espace P est contractile.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'inclusion $i : I \times \{0\} \hookrightarrow P$ est une équivalence d'homotopie, puisque $(0, 0) \hookrightarrow I$ est une équivalence d'homotopie.

Pour voir que $i : I \times \{0\} \hookrightarrow P$ est une équivalence d'homotopie, considérer la projection $\pi : P \rightarrow I$ induit par la projection $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$. Alors $\pi i = 1_I$ et $i\pi \sim 1_P$ par l'homotopie $H(x, y, t) = (x, yt)$, pour $(x, y) \in P$. $\square$

Exemple 3.17. Soit $*_P$ le point $(0, 1) \in P$ et $t_P : P \rightarrow P$ le morphisme constant $t_P(x, y) = *_P$. Bien que P soit contractile, le morphisme t_P n'est pas homotope rel $*_P$ à l'identité 1_P .

Démo exercice

Car, supposons qu'il existe une homotopie $H : P \times I \rightarrow P$ de 1_P vers t_P rel $*_P$, alors $H : *_P \times I \rightarrow *_P$. Soit $U \subset P$ l'ouvert $(I \times (\frac{1}{2}, 1]) \cap P$; puisque I est compact, on déduit qu'il existe un voisinage ouvert V de $*_P$ tel que $H : V \times I \rightarrow U$, donc V contient un point $v := (\frac{1}{n}, 1)$. Considérons la restriction $h : I \times U$ de H à $v \times I$; alors $h(0) = v$ et $h(1) = *_P$. Ceci est une contradiction, car les points $*_P$ et v appartiennent à des composantes connexes différentes, tandis que I est connexe.

Exemple 3.18. Soient $(P_1, *_1)$, $(P_2, *_2)$ deux copies du peigne; le *bouquet* de P_1 , P_2 est l'espace topologique

$$P_1 \vee P_2 := (P_1 \amalg P_2) / *_1 = *_2,$$

pointé par l'image de $*_{P_1}$ (on identifie les deux points de base).

Alors, l'espace $P_1 \vee P_2$ n'est pas contractile (exercice).

Le passage aux espaces quotients présentent également quelques difficultés :

Exemple 3.19. Soient $f, g : *_1 \amalg *_2 \rightarrow [0, 1]$ les deux applications continues $f(*_1) = f(*_2) = 0$ et $g(*_1) = 0$, $g(*_2) = 1$. Alors

- (1) $f \sim g$ sont homotopes ;
- (2) les espaces quotients $[0, 1]/\text{Im} f \cong I$ et $[0, 1]/\text{Im} g \cong S^1$ ne sont pas homotopes (on verra une démonstration de ce fait plus tard).

L'espace $[0, 1]/\text{Im} f$ est la somme amalgamée dans $\mathfrak{T}$ du diagramme

$$\begin{array}{ccc} *_1 \amalg *_2 & \xrightarrow{f} & I \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$$

et pareil pour g . Donc l'exemple montre que les sommes amalgamées ne sont pas des constructions *homotopiques*.

3.3. Rétractes par déformation.

Définition 3.20. Soit A un sous-espace d'un espace topologique X , muni de l'inclusion canonique $i : A \hookrightarrow X$;

- (1) A est un *rétracte* de X , s'il existe une *rétraction* $r : X \rightarrow A$ telle que $r \circ i = 1_A$;

- (2) A est un *rétracte par déformation* de X s'il existe une rétraction $r : X \rightarrow A$ telle que $i \circ r \sim 1_X$;
- (3) A est un *rétracte par déformation forte* de X si, de plus, $i \circ r \sim 1_X$ rel A .

Exercice 3.21. Montrer que, si $i : A \rightarrow X$ est un rétracte par déformation par rapport à la rétraction $r : X \rightarrow A$, alors i et r sont des équivalences d'homotopie.

Exemple 3.22.

- (1) Le sous-espace $X \hookrightarrow X \times I$, donné par $x \mapsto (x, 0)$, est un rétracte fort par déformation de $X \times I$.
- (2) Soit $E \rightarrow B$ un fibré vectoriel, alors la section en zéro, $s : B \rightarrow E$, exhibe B comme rétracte par déformation forte de E .
- (3) Le ruban de Möbius M est l'espace quotient de $I \times I$ par la relation $(0, t) \sim (1, 1 - t)$. La projection $\text{pr}_1 : I \times I \rightarrow I$ induit une projection $M \rightarrow S^1$; cette projection qui admet la section $S^1 \rightarrow M$ induite par $I \rightarrow I \times I$, $y \mapsto (y, 1/2)$. L'espace S^1 est un rétracte par déformation forte de M .

Exemple 3.23. Le point $*_P$ du *peigne* P est un rétracte par déformation de P , mais n'est pas un rétracte par déformation forte de P .

Cet exemple montre qu'il faut imposer une condition sur le point de base d'un espace pointé afin d'obtenir un bon comportement en théorie d'homotopie. Par exemple, la condition suivante est utilisée dans [FT10] ; elle est légèrement plus faible que la condition *bien pointé*.

Définition 3.24. Un espace pointé $(X, *_X)$ est *correctement pointé* s'il existe un voisinage ouvert V de $*_X$ tel que $*_X$ est un rétracte par déformation forte de V .

Exercice 3.25. Montrer que $(P, *_P)$ n'est pas correctement pointé.

3.4. Le mapping cylindre d'un morphisme.

Définition 3.26. Le *cylindre* de base X (un espace topologique) est l'espace $X \times I$, muni des deux inclusions $\eta_0, \eta_1 : X \rightarrow X \times I$ (les *bouts*), induites par $0, 1 \in I$, et de la projection $p_X : X \times I \rightarrow X$.

Remarque 3.27. Les morphismes η_0, η_1, p_X sont des équivalences d'homotopie.

Définition 3.28. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue ; le *mapping cylindre* M_f de f est la somme amalgamée dans $\mathfrak{T}$ du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_1} & X \times I \\ f \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

autrement dit, M_f est l'espace quotient $((X \times I) \amalg Y) / \sim$, où $(x, 1) \sim f(x) \forall x \in X$.

L'inclusion η_0 induit une inclusion $i_f : X \hookrightarrow M_f$, Y est un sous-espace de M_f et la projection $p_X : X \times I \rightarrow X$ induit une surjection continue $r_f : M_f \rightarrow Y$ telles que

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_f} & M_f & \xleftarrow{i_Y} & Y \\ & \searrow f & \downarrow r_f & \swarrow 1_Y & \\ & & Y & & \end{array}$$

commute.

Notation 3.29. Si $A \subset X$ est un sous-espace, on écrira $M_{(X,A)}$ pour le mapping cylindre de l'inclusion $j : A \hookrightarrow X$, et $i_A : A \hookrightarrow M_{(X,A)}$ pour l'inclusion i_j .

Proposition 3.30. Soient $f : X \rightarrow Y$ une application continue et M_f son mapping cylindre. Alors

- (1) Y est un rétracte par déformation forte de M_f ;
- (2) $r_f : M_f \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie ;
- (3) $U := X \times [0, \frac{1}{2}) \subset M_f$ est un voisinage ouvert de $X \times \{0\}$ et $\eta_0 : X \rightarrow U$ est un rétracte par déformation forte.

Démonstration. Le morphisme r_f est un rétracte de $Y \hookrightarrow M_f$. On définit une homotopie H rel Y de $i_Y \circ r_Y$ vers 1_{M_f} par $H(y, t) = y, \forall y \in Y \subset M_f$ et $H((x, s), t) = (x, 1 - (1 - s)t)$.

Le fait que r_f est une équivalence d'homotopie est une conséquence immédiate du premier point (voir exercice 3.21).

Il est évident que U est une partie ouverte de M_f qui contient l'image de i_f ; *exercice* montrer que $i_f : X \rightarrow U$ est un rétracte par déformation forte. $\square$

Remarque 3.31. Cette proposition donne une manière *fonctorielle* de construire une factorisation d'une application continue $f : X \rightarrow Y$

$$X \xrightarrow{i_f} M_f \xrightarrow{r_f} Y$$

où r_f est une équivalence d'homotopie et i_f est une inclusion telle que $X \subset M_f$ admet un voisinage ouvert U tel que X est un rétracte par déformation forte de U . L'inclusion i_f a un bon comportement homotopique.

Fonctorialité : pour un diagramme commutatif d'applications continues :

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2, \end{array}$$

la construction du mapping cylindre fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & f_1 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ X_1 & \xrightarrow{i_{f_1}} & M_{f_1} & \xrightarrow{r_{f_1}} & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \xrightarrow{i_{f_2}} & M_{f_2} & \xrightarrow{r_{f_2}} & Y_2. \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & f_2 & & \end{array}$$

Exemple 3.32. Soit $(X, *_X)$ un espace pointé quelconque et $M_{(X, *_X)}$ le mapping cylindre de l'inclusion $*_X \hookrightarrow X$, pointé par $(*_X, 0)$. Alors $(M_{(X, *_X)}, (*_X, 0))$ est *correctement pointé*.

Proposition 3.33. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues telles que $f \sim g$ par une homotopie $H : X \times I \rightarrow Y$ de f vers g . Alors H induit une application continue $\tilde{H} : M_g \rightarrow M_f$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_g} & M_g & \xleftarrow{i_Y} & Y \\ & \searrow i_f & \downarrow \tilde{H} & \swarrow i_Y & \\ & & M_f & & \end{array}$$

En particulier, le morphisme $\tilde{H}$ est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. L'homéomorphisme $I \cong I_1 \cup I_2$ ($[0, 1] \cong [0, 2] = [0, 1] \cup [1, 2]$) induit un homéomorphisme

$$M_g : (X \times I)_1 \cup (X \times I)_2 \cup_g Y.$$

On définit l'application $\tilde{H}$ vers $M_f = (X \times I) \cup_f Y$ par ses composantes

$$\begin{array}{ccc} (X \times I)_1 & \xrightarrow{1_X \times I} & X \times I \\ (X \times I)_2 & \xrightarrow{H} & Y \\ Y & \xrightarrow{1_Y} & Y. \end{array}$$

(Exercice : vérifier que $\tilde{H}$ est continue et que le diagramme commute.) □

Le lemme technique suivant est une construction fondamentale.

Lemme 3.34. *Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux applications continues et $H : X \times I \rightarrow Y$ une homotopie de f vers g . Alors*

(1) *l'application continue $H' : X \times I \rightarrow Y$ définie par*

$$H'(x, s) := \begin{cases} H(x, 2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H(x, 2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie de f vers g ;

(2) *Il existe une application continue $\mathcal{H} : (X \times I) \times I \rightarrow Y$*

$$\mathcal{H}(x, s, t) := H'(x, st)$$

telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, 0, t) &= f(x) = \mathcal{H}(x, 1, t), \forall (x, t) \in X \times I \\ \mathcal{H}(x, s, 0) &= f(x), \forall (x, s) \in X \times I \\ \mathcal{H}(x, s, 1) &= H'(x, s), \forall (x, s) \in X \times I. \end{aligned}$$

Démonstration. On vérifie facilement que les applications H' et $\mathcal{H}$ sont continues. Par construction, $H'(x, 0) = f(x) = H'(x, 1)$, donc H est bien une homotopie de f vers lui-même.

On vérifie les propriétés de $\mathcal{H}$ de la même manière. □

Proposition 3.35. *Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux applications continues et $H : X \times I \rightarrow Y$ une homotopie de f vers g . Alors le morphisme $\tilde{H} : M_g \rightarrow M_f$ est une équivalence d'homotopie relativement à X .*

Démonstration. La construction de la Proposition 3.33 fournit deux morphismes $\tilde{H} : M_g \rightarrow M_f$ et $\tilde{K} : M_f \rightarrow M_g$, où $K(x, t) = H(x, 1 - t)$. Il suffit de montrer que $\tilde{K} \circ \tilde{H}$ est homotope relativement à X à 1_{M_g} et que $\tilde{H} \circ \tilde{K}$ est homotope relativement à X à 1_{M_f} ; les deux arguments sont similaires.

L'étape clé de la démonstration utilise le lemme 3.34. *Exercice* : fournir les détails de la démonstration. □

Proposition 3.36. *Soit $(X, *_X)$ un espace pointé tel que X est contractile. Alors $M_{(X, *_X)}$ est contractile relativement à $(*_X, 0)$.*

Démonstration. L'hypothèse que X est contractile entraîne l'existence d'une homotopie $H : X \times I \rightarrow X$ de 1_X vers l'application constante à $*_X$ (*exercice* !). On utilise la décomposition $M_{(X, *_X)} = (*_X \times I) \cup X$ pour définir des applications continues ; donc un point de $M_{(X, *_X)}$ est représenté soit par $x \in X$, soit par $(*_X, s) \in *_X \times I$.

Soit $\alpha : I \rightarrow M_{(X, *_X)}$ l'application continue :

$$\alpha(s) := \begin{cases} (*_X, 2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H(*_X, 2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

On définit une homotopie $\mathcal{H} : M_{(X, *_X)} \times I \rightarrow M_{(X, *_X)}$ comme suite.

Pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x, t) &:= H(x, 2t), \forall x \in X \\ \mathcal{H}(*_X, s, t) &:= \begin{cases} (*_X, s(1+2t)) & 0 \leq s \leq \frac{1}{1+2t} \\ H(*_X, s(1+2t) - 1) & \frac{1}{1+2t} \leq s \leq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, on définit :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x, t) &:= \alpha(2(1-t)), \forall x \in X \\ \mathcal{H}(*_X, s, t) &:= \alpha(2s(1-t)).\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{H}$ est une application continue qui définit une homotopie rel $(*_X, 0)$ de $1_{M(*_X, *_X)}$ vers l'application constante à $(*_X, 0)$. $\square$

Exemple 3.37. Proposition 3.36 s'applique au peigne P pointé par $*_P = (0, 1)$ (cf. Exemple 3.17). Ainsi, en remplaçant P par $M_{(P, *_P)}$ on peut éviter le comportement pathologique de P .

3.5. Le cône d'un espace topologique et d'une application continue.

Définition 3.38. Soit X un espace topologique; le *cône de base X* est l'espace topologique CX quotient :

$$CX := (X \times I) / (X \times \{0\}).$$

Le point 1 de I induit une inclusion naturelle $\iota_X : X \hookrightarrow CX$.

Lemme 3.39. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors

- (1) le cône CX est contractile;
- (2) le morphisme f est homotopiquement trivial ssi il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & CX \\ f \downarrow & \swarrow \overline{H} & \\ Y & & \end{array}$$

Démonstration. L'application continue $CX \times I \rightarrow CX$

$$\begin{aligned}X \times I \times I &\rightarrow X \times I \\ (x, s, t) &\mapsto (x, st)\end{aligned}$$

induit une homotopie du morphisme constant au 'sommet' du cône vers le morphisme identité de CX . Donc CX est contractile.

Le morphisme f est homotopiquement trivial ssi il existe une homotopie $H : X \times I \rightarrow Y$ telle que $H(x, 0) = *_Y$ ($*_Y$ un point de Y) et $H(x, 1) = f(x)$, $\forall x \in X$. Par la propriété universelle de l'espace quotient, H se factorise à travers le morphisme quotient $X \times I \rightarrow CX$ par un morphisme $\overline{H} : CX \rightarrow Y$.

Pour la réciproque, on démontre (exercice) que tout morphisme qui se factorise à travers un espace contractile est homotopiquement trivial. $\square$

Exercice 3.40. Montrer que le cône de base S^n est homéomorphe à D^{n+1} (ici S^n , la sphère de dimension n , est le sous-espace $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ et la boule D^{n+1} est le sous-espace $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$; le bord ∂D^{n+1} est S^n).

Définition 3.41. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Le *cône de f* est l'espace topologique pointé C_f :

$$C_f := M_f / (X \times \{0\}),$$

pointé par l'image de $X \times \{0\}$ dans C_f , donc

$$C_f \cong Y \cup_f CX = Y \amalg CX / (\iota(x) \sim f(x)).$$

L'application continue $i_Y : Y \rightarrow M_f$ induit une application continue $\iota_f : Y \rightarrow C_f$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M_f & \xleftarrow{i_Y} & Y \\ \downarrow & \swarrow \iota_f & \\ C_f & & \end{array}$$

Proposition 3.42. *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue.*

- (1) *La composée $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\iota_f} C_f$ est homotopiquement triviale.*
- (2) *Soit $g : Y \rightarrow Z$ une application continue ; la composée $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est homotopiquement triviale ssi il existe une factorisation*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\iota_f} & C_f \\ \downarrow g & \swarrow \cdots & \\ Z & & \end{array}$$

Démonstration. Généralisation du Lemme 3.39 (*exercice*) . □

Proposition 3.43. *Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux applications continues, qui sont homotopes par une homotopie $H : X \times Y \rightarrow Y$ de f vers g . Alors le morphisme $\tilde{H} : M_g \rightarrow M_f$ de la Proposition 3.33 induit une application continue*

$$\hat{H} : C_g \rightarrow C_f$$

qui est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. La propriété universelle de la topologie quotient entraîne que $\tilde{H}$ induit une application continue $\hat{H} : C_g \rightarrow C_f$, par la commutativité du triangle à gauche de la Proposition 3.33.

Proposition 3.35 montre que $\tilde{H}$ est une équivalence d'homotopie relativement à X . Alors, cette équivalence d'homotopie passe au quotient. □

Exemple 3.44. Pour les deux applications $f, g : *_1 \amalg *_2 \rightrightarrows I$ de l'exemple 3.19, $C_f \simeq C_g \simeq S^1$.

Le cône d'une application continue est utilisée dans la construction des *espaces cellulaires* :

Exemple 3.45. *Rattachement d'une cellule :* Soit $f : S^{n-1} \rightarrow X$ une application continue. Le cône $C_f = X \cup_f D^n$ est l'espace obtenu par l'attachement d'une n -cellule le long de l'application f - en utilisant l'homéomorphisme $D^n \cong CS^{n-1}$ de l'exercice 3.40.

4. CHEMINS ET LE GROUPOÏDE FONDAMENTAL

4.1. Chemins d'un espace topologique.

Définition 4.1.

- (1) Un *chemin* d'un espace topologique X est une application continue $\alpha : I \rightarrow X$ (on la considère comme un chemin de $\alpha(0)$ vers $\alpha(1)$).
- (2) Deux points $x, y \in X$ sont *connexes par un arc* s'il existe un chemin $\alpha : I \rightarrow X$ tel que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$; on écrit $x \sim_{\text{arc}} y$.

Lemme 4.2. *Soit X un espace topologique. Si $x \sim_{\text{arc}} y$, alors x et y appartient à la même composante connexe de X .*

Démonstration. L'intervalle I est connexe, donc son image dans X est inclus dans une composante connexe de X . $\square$

Proposition 4.3. *La relation $\sim_{\text{arc}}$ est une relation d'équivalence sur les points d'un espace topologique X .*

Démonstration. Exercice. $\square$

Définition 4.4. Soit X un espace topologique.

- (1) X est *connexe par arcs* si, $\forall x, y \in X$, $x \sim_{\text{arc}} y$.
- (2) X est *localement connexe par arcs* si, $\forall x \in X$ et voisinage $x \in V \subset X$, il existe un voisinage $x \in U \subset V$ qui est connexe par arcs.

Exemple 4.5. Le peigne P est connexe par arcs mais n'est pas localement connexe par arcs (considérer les voisinages de $*_P$).

Proposition 4.6. *Soit X un espace topologique. Alors*

- (1) *si X est connexe par arcs, alors X est connexe;*
- (2) *si X est connexe et localement connexe par arcs, alors X est connexe.*

Démonstration. Exercice. $\square$

Définition 4.7. L'ensemble des *composantes connexes par arcs* d'un espace topologique X est l'ensemble quotient :

$$\pi_0(X) := X / \sim_{\text{arc}}.$$

Remarque 4.8. Un espace topologique X est connexe par arcs si et seulement si $\pi_0(X) = \{*\}$.

Proposition 4.9. *Soit X un espace topologique. Alors*

- (1) *il existe une bijection $\pi_0(X) \cong [*, X]$;*
- (2) *$\pi_0(-)$ définit un foncteur $\pi_0 : \mathfrak{T} \rightarrow \text{Ens}$.*

Démonstration. Il y a une bijection $\text{Hom}_{\mathfrak{T}}(*, X) \cong X$ et deux morphismes $x_1, x_2 : * \rightrightarrows X$ sont homotopes si et seulement si $x_1 \sim_{\text{arc}} x_2$.

Le fait que $\pi_0(-)$ est un foncteur en découle immédiatement (Cf. Exercice 3.9). $\square$

Exercice 4.10.

- (1) Soient X, Y deux espaces topologiques qui ont le même type d'homotopie; montrer que $\pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$.
- (2) Soient $x \in S^1$; Montrer que le mapping cylindre $M := M_{(S^1, x)}$ est connexe et que $M \simeq S^1$. Montrer que X n'est pas homéomorphe à S^1 .

Exercice 4.11. Soit $O(2)$ le groupe orthogonal; montrer que le déterminant $O(2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ induit un isomorphisme $\pi_0(O(2)) \cong \mathbb{Z}/2$.

4.2. Composition de chemins et le groupoïde fondamental.

Définition 4.12. Soit X un espace topologique.

- (1) Le *chemin constant* à un point $x \in X$ est le chemin $c_x : I \rightarrow * \xrightarrow{x} X$ ($c_x(t) = x$).
- (2) L'*inverse* d'un chemin $\alpha : I \rightarrow X$ est le chemin $\bar{\alpha} := \alpha \circ \chi$, où $\chi : I \xrightarrow{\cong} I$ est l'homéomorphisme $t \mapsto 1 - t$.
- (3) Soient $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ deux chemins, tels que $\alpha(1) = \beta(0)$. Le *chemin composé* $\alpha. \beta$ est le chemin défini par

$$\alpha. \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 4.13. Soient α, β, γ trois chemins de X , tels que $\alpha(1) = \beta(0)$ et $\beta(1) = \gamma(0)$. Alors

- (1) $c_{\alpha(0)}. \alpha \sim_{\text{rel } \partial I} \alpha \sim_{\text{rel } \partial I} \alpha. c_{\alpha(1)}$;
- (2) $\alpha. (\beta. \gamma) \sim_{\text{rel } \partial I} (\alpha. \beta). \gamma$;
- (3) $\alpha. \bar{\alpha} \sim_{\text{rel } \partial I} c_{\alpha(0)}$ et $\bar{\alpha}. \alpha \sim_{\text{rel } \partial I} c_{\alpha(1)}$.

Démonstration. Par exemple : pour le premier point de (3), on définit une homotopie $H : I \times I \rightarrow X$ par

$$H(s, t) := \begin{cases} \alpha(2st) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\alpha}((2s - 1)t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

et on vérifie que H définit une homotopie $\text{rel } \partial I$ du chemin constant $c_{\alpha(0)}$ vers $\alpha. \bar{\alpha}$. $\square$

Notation 4.14. Soit $\alpha : I \rightarrow X$ un chemin de X ; la classe d'homotopie $\text{rel } \partial I$ de α est dénotée $[\alpha]$.

Définition 4.15. Soit X un espace topologique. Le *groupoïde fondamental* de X est le groupoïde (petit) ayant

- objets : les points de X ;
- $\text{Hom}_{\Pi(X)}(x, y) := \{\alpha : I \rightarrow X \mid \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\} / \sim_{\text{rel } \partial I}$;

dont la composition est induite par la composition des chemins ($[\beta] \circ [\alpha] := [\alpha. \beta]$ si $\alpha(1) = \beta(0)$) et l'inverse par $[\alpha]^{-1} := [\bar{\alpha}]$.

Proposition 4.16.

- (1) Le groupoïde fondamental définit un foncteur

$$\Pi(-) : \mathfrak{T} \rightarrow \text{GPD},$$

où GPD est la catégorie des groupoïdes petits.

- (2) Soient $H : X \times I \rightarrow Y$ une homotopie de f vers g . Alors, il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\Pi(X)}(x, y) & \\ \Pi(f) \swarrow & & \searrow \Pi(g) \\ \text{Hom}_{\Pi(Y)}(f(x), f(y)) & \xrightarrow{H_*} & \text{Hom}_{\Pi(Y)}(g(x), g(y)), \end{array}$$

où $H_*[\beta] = [H(y)] \circ [\beta] \circ [H(x)]^{-1}$, pour $H(z)$ ($z \in X$) le chemin $t \mapsto H(z, t)$.

Démonstration. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue ; le morphisme de groupoïdes $\Pi(f) : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$ est défini par $\Pi(f)[\alpha] = [f \circ \alpha]$, pour $\alpha : I \rightarrow X$ un chemin dans X . (On vérifie directement que $\Pi(f)$ est bien un morphisme de groupoïdes.)

Pour la deuxième partie, il suffit de vérifier que H induit une homotopie $\text{rel } \partial I$ entre $f \circ \alpha$ et le chemin $H(x)^{-1}. (g \circ \alpha). H(y)$. (*Exercice !*) $\square$

Remarque 4.17. On peut rendre le deuxième énoncé plus élégant en introduisant une notion d'homotopie entre morphismes de groupoïdes.

Exercice 4.18. Tous les groupoïdes considérés sont *petits*.

- (1) Soit $\{\mathcal{G}_i | i \in \mathcal{I}\}$ un ensemble de groupoïdes. Montrer que le coproduit $\coprod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{G}_i$ des groupoïdes existe ($\text{Ob}(\coprod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{G}_i) = \coprod_{i \in \mathcal{I}} \text{Ob} \mathcal{G}_i$).
- (2) Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde ; vérifier que la relation $x \sim y$ ssi $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y) \neq \emptyset$ est une relation d'équivalence sur $\text{Ob} \mathcal{G}$ et définir $\pi_0(\mathcal{G}) := \text{Ob} \mathcal{G} / \sim$. Le groupoïde est *connexe* si $\pi_0(\mathcal{G}) = \{*\}$. En général, montrer qu'il existe un isomorphisme de groupoïdes :

$$\mathcal{G} \cong \coprod_{j \in \pi_0(\mathcal{G})} \mathcal{G}_j$$

tel que chaque $\mathcal{G}_j$ est connexe (les $\mathcal{G}_j$ sont les composantes connexes de $\mathcal{G}$).

- (3) Soient $\mathcal{G}$ un groupoïde connexe et $x \in \text{Ob} \mathcal{G}$. Montrer que l'inclusion

$$\text{Aut}_{\mathcal{G}}(x) \hookrightarrow \mathcal{G},$$

où $\text{Aut}_{\mathcal{G}}(x)$ est la sous-catégorie pleine ayant pour objet x , est une équivalence de groupoïdes.

Exercice 4.19. Soit $f : X \rightarrow Y$ une équivalence d'homotopie ; montrer que $\Pi(f) : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$ est une *équivalence* de groupoïdes. (NB en général le morphisme $\Pi(f)$ n'est pas un *isomorphisme* de groupoïdes ; donner un exemple pour illustrer ce fait.)

Définition 4.20. Un espace topologique X est *simplement connexe* si $\text{Hom}_{\Pi(X)}(x, y) = \{*\}$, $\forall x, y \in X$.

Remarque 4.21. Soit X un espace topologique.

- (1) X est simplement connexe ssi X est connexe par arcs et, $\forall x, y \in X$, à homotopie près, il existe un chemin unique de x vers y .
- (2) X est simplement connexe ssi $\Pi(X)$ est équivalent au groupoïde trivial $*$ (ayant un seul morphisme).

4.3. Espaces de chemins.

Définition 4.22. L'*espace des chemins* PX associé à un espace topologique X est $\text{Map}(I, X)$, muni de la topologie compacte-ouverte.

Le morphisme $\partial I = \{0, 1\} \hookrightarrow I$ induit une application continue $PX \xrightarrow{e_0, e_1} X \times X$ tel que $e_0(\gamma) = \gamma(0)$ et $e_1(\gamma) = \gamma(1)$.

Définition 4.23. Soient A, B deux sous-espaces de l'espace topologique X . L'espace $P_{A,B}X$ est le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} P_{A,B}X & \longrightarrow & PX \\ \downarrow & & \downarrow (e_0, e_1) \\ A \times B & \longrightarrow & X \times X \end{array}$$

d'espaces topologiques, donc $P_{A,B}X$ est le sous-espace topologique des chemins $\gamma : I \rightarrow X$ tels que $\gamma(0) \in A$ et $\gamma(1) \in B$.

Exemple 4.24. Soit $(X, *_X)$ un *espace topologique pointé*.

- (1) $P_{*_X, *_X}X$ est l'espace des chemins $\gamma : I \rightarrow X$ tels que $\gamma(0) = *_X$;
- (2) $P_{*_X, *_X}X$ est l'*espace des lacets* dans X basés à $*_X$. Cet espace est dénoté ΩX (le point de base étant sous-entendu) ; ΩX est pointé par le lacet constant à $*_X$.
- (3) Plus généralement, pour $x, y \in Y$ deux points d'un espace topologique Y , $P_{x,y}$ est l'espace des chemins $\gamma : I \rightarrow Y$ tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Proposition 4.25. *Soit (X, x) un espace pointé ; alors*

- (1) *l'espace $P_{x,X}$ est contractile ;*
- (2) *il existe un carré cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & P_{x,X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \hookrightarrow & X. \end{array}$$

Démonstration. On définit une homotopie $H : P_{x,X} \times I \rightarrow P_{x,X}$ par $(\gamma, t) \mapsto \gamma_t$, où $\gamma_t(s) = \gamma(st)$. H est une application continue qui définit une homotopie entre l'application constante à c_x et l'identité.

Le deuxième point est une conséquence formelle des propriétés des produits fibrés. $\square$

Remarque 4.26.

- (1) La projection $P_{x,X} \rightarrow X$ est une *fibration* (c'est une notion définie par une propriété de relèvement d'homotopies qui généralise la notion d'un fibré localement trivial) et la fibration associée

$$\Omega X \rightarrow P_{x,X} \rightarrow X$$

est important en théorie d'homotopie.

- (2) On a montré que $P_{x,X} \simeq *$ est contractile. Le produit fibré du diagramme $* \rightarrow X \leftarrow *$ est $*$; par contre, en prenant par exemple $X = S^1$, on voit qu'en général $\Omega X \not\simeq *$ (il suffit de considérer $\pi_0(\Omega S^1)$). Ainsi, le produit fibré ne respecte pas les équivalences d'homotopie.

Exercice 4.27. Soient $x, y, z \in X$ trois points d'un espace topologique X . Montrer que :

- (1) $P_{x,y}$ et $P_{y,x}$ sont homéomorphes ;
- (2) la composition des chemins induit une application continue

$$P_{y,z} \times P_{x,y} \rightarrow P_{x,z};$$

- (3) $\pi_0(P_{x,y}) \cong \text{Hom}_{\Pi(X)}(x, y)$.

Exercice 4.28. Soit X un espace topologique.

- (1) Montrer qu'il existe un diagramme cocartésien (une somme amalgamée) dans $\mathfrak{T}$:

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\eta_0} & I \\ \eta_1 \downarrow & & \downarrow \\ I & \longrightarrow & I, \end{array}$$

(les morphismes $I \hookrightarrow I$ sont des inclusions fermées).

- (2) Dédurre qu'il existe une application continue :

$$PX^{e_0} \times_X {}^{e_1}PX \rightarrow PX$$

de composition de chemins, où le produit fibré est défini par rapport aux morphismes $PX \xrightarrow{e_0} X \xleftarrow{e_1} PX$.

- (3) Dédurre que la composition des chemins induit une application continue :

$$\mu : \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X.$$

Montrer que les diagrammes suivants commutent à *homotopie près* :

$$\begin{array}{ccc} \Omega X \times \Omega X \times \Omega X & \xrightarrow{1 \times \mu} & \Omega X \times \Omega X \\ \mu \times 1 \downarrow & & \downarrow \mu \\ \Omega X \times \Omega X & \xrightarrow{\mu} & \Omega X \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} \Omega X \cong *_X \times \Omega X & \hookrightarrow & \Omega X \times \Omega X & \longleftarrow & \Omega X \times *_X \cong \Omega X \\ & \searrow & \downarrow \mu & \swarrow & \\ & = & \Omega X & = & \end{array}$$

où $*_X \hookrightarrow \Omega X$ est le point de base (le lacet constant à $*_X$), mais que ces diagrammes ne sont pas commutatifs dans $\mathfrak{T}$ si $X \neq *$.

Ceci correspond à la structure de H -espace de ΩX .

Définition 4.29. Soit X un espace topologique séparé ; l'espace des lacets libres ΛX est le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda X & \longrightarrow & PX \\ \downarrow & & \downarrow e_0, e_1 \\ X & \xrightarrow{\text{diag}} & X \times X \end{array}$$

Remarque 4.30. L'espace des lacets libres dans X est important dans la théorie de la *topologie des cordes*. Il y a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & \Lambda X \\ \downarrow & & \downarrow \\ *_X & \longrightarrow & X \end{array}$$

et le produit $\Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$ se généralise à

$$\Lambda X \times_X \Lambda X \rightarrow \Lambda X.$$

4.4. Le groupe fondamental.

Définition 4.31. Soient (X, x) un espace topologique pointé (un objet de $\mathfrak{T}_\bullet$). Le *groupe fondamental* $\pi_1(X, x)$ est le groupe d'automorphismes de x dans le groupoïde $\Pi(X)$:

$$\pi_1(X, x) := \text{Aut}_{\Pi(X)}(x).$$

ATTENTION : celle-ci n'est pas la définition habituelle (voir la remarque 4.46).

Rappeler que le cercle $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ est le sous-espace $\{x \mid \|x\| = 1\}$; il est pointé par $(1, 0)$; le cercle S^1 est homéomorphe à $I/0 \sim 1$, en tant qu'espace pointé.

Définition 4.32. Soit $(X, *_X)$ un espace topologique pointé.

- (1) Un *lacet* (basé à $*_X$) dans X est un morphisme $S^1 \rightarrow X$ de $\mathfrak{T}_\bullet$; il est équivalent à se donner une application continue $\alpha : I \rightarrow X$ telle que $\alpha(0) = \alpha(1) = *_X$.
- (2) Soient λ, μ deux lacets basés à $*_X$ dans X , le *lacet composé* $\mu \cdot \lambda$ est le lacet obtenu en composant les chemins sous-jacents.

Proposition 4.33.

- (1) Le groupe fondamental définit un foncteur $\mathfrak{T}_\bullet \rightarrow \mathbf{Gp}$ à valeurs dans la catégorie des groupes.
- (2) Les foncteurs $\pi_1(-)$, $[S^1, -]_{\mathfrak{T}_\bullet} : \mathfrak{T}_\bullet \rightarrow \mathbf{Gp}$ sont naturellement isomorphes.

(3) Si $f, g : (X, x) \rightrightarrows (Y, y)$ sont deux morphismes de $\mathfrak{T}_\bullet$ qui sont homotopes rel x , alors $\pi_1(f) = \pi_1(g) : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$.

(4) Soient X un espace topologique et $[\alpha] \in \text{Hom}_{\Pi(X)}(x, y)$ un morphisme du groupoïde fondamental, alors

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x) \cong \text{Aut}_{\Pi(X)}(x) &\rightarrow \text{Aut}_{\Pi(X)}(y) \cong \pi_1(X, y) \\ [\beta] &\mapsto [\alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha] \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. Le groupoïde fondamental définit un foncteur $\Pi(-) : \mathfrak{T} \rightarrow \text{GPD}$. Si $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ est une application continue, alors le morphisme de groupoïdes $\Pi(f) : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$ induit un morphisme de groupes

$$\pi_1(X, x) \cong \text{Aut}_{\Pi(X)}(x) \rightarrow \text{Aut}_{\Pi(Y)}(y) \cong \pi_1(Y, y)$$

et ceci définit un foncteur $\pi_1(-) : \mathfrak{T}_\bullet \rightarrow \text{Gp}$. Explicitement, soit $\alpha : I \rightarrow X$ un lacet basé à x , qui représente un élément $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$; alors $\pi_1(f)[\alpha] = [f \circ \alpha]$, car $f \circ \alpha$ est un lacet basé à y .

Le fait que $\pi_1(X, x)$ est naturellement isomorphe à $[S^1, X]_{\mathfrak{T}_\bullet}$ est une conséquence immédiate des définitions (un lacet est un chemin $\alpha : I \rightarrow X$ tel que $\alpha(\partial I) = x$ et les deux notions d'homotopie coïncident).

Soient $f, g : (X, x) \rightrightarrows (Y, y)$ deux morphismes de $\mathfrak{T}_\bullet$ qui sont homotopes rel x par une homotopie H , alors $H \circ \alpha$ est une homotopie rel ∂I entre $f \circ \alpha, g \circ \alpha : I \rightarrow Y$. Alors, les deux morphismes induits $\pi_1(f), \pi_1(g)$ coïncident.

Le dernier point est un résultat général pour les groupoïdes (exercice). $\square$

Proposition 4.34. Soit (X, x) un espace topologique pointé. Alors, il existe un isomorphisme naturel :

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_0(\Omega X)$$

et la structure de groupe est induit par le morphisme produit

$$\Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X.$$

Démonstration. Un élément de ΩX est un lacet λ basé à X et un chemin entre deux points λ_1, λ_2 de ΩX est une homotopie rel ∂I entre les lacets λ_1, λ_2 . $\square$

Exercice 4.35. Soit X un espace topologique. Montrer que X est simplement connexe si et seulement si X est connexe par arcs et, pour un point $x \in X$ quelconque, $\pi_1(X, x) = \{e\}$.

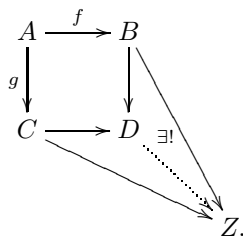
4.5. Le théorème de Seifert et de van Kampen. Rappelons la définition d'une somme amalgamée (un type de *colimite*) :

Définition 4.36. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $C \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} B$ deux morphismes de $\mathcal{C}$. Une *somme amalgamée* (ou *pushout*) de f, g est un carré commutatif dans $\mathcal{C}$:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

qui est universel parmi de tels carrés commutatifs. Explicitement, pour tout carré commutatif de sommets A, B, C, Z , il existe un morphisme unique $D \rightarrow Z$ qui rend

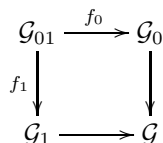
(2)



Exercice 4.37. Préciser les notions de *produit fibré* et de *carré cartésien* (ce sont les notions duales, en passant à la catégorie opposée).

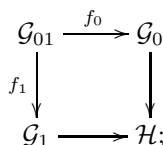
Hypothèse 4.39. Tous les groupoïdes considérés dans cette section sont *petits*.

Lemme 4.40. Soient $\mathcal{G}_0 \xleftarrow{f_0} \mathcal{G}_{01} \xrightarrow{f_1} \mathcal{G}_1$ un diagramme de groupoïdes tel que les applications $\text{Ob}\mathcal{G}_0 \xleftarrow{f_0} \text{Ob}\mathcal{G}_{01} \xrightarrow{f_1} \text{Ob}\mathcal{G}_1$ sont des inclusions. Alors il existe un diagramme cocartésien de groupoïdes :



- (1) $\text{Ob}\mathcal{G} = \text{Ob}\mathcal{G}_0 \amalg_{\text{Ob}\mathcal{G}_{01}} \text{Ob}\mathcal{G}_1$ (la somme amalgamée dans **Ens**) ;
- (2) pour $x, y \in \text{Ob}\mathcal{G}$, $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$ est l'ensemble des mots de longueur finie $(m_n, \dots, m_1)$ ($0 < n \in \mathbb{N}$) tels que $m_i \in \text{Mor}\mathcal{G}_0 \cup \text{Mor}\mathcal{G}_1$ et, $\forall 1 \leq i \leq n-1$, $\text{but}(m_i) = \text{source}(m_{i+1})$ modulo les relations engendrées par :
 - (a) si $m_1, m_2 \in \text{Mor}\mathcal{G}_{\varepsilon}$ ($\varepsilon \in \{0, 1\}$), alors $(m_2, m_1) = (m_2 \circ m_1)$;
 - (b) si $n \in \text{Mor}\mathcal{G}_{01}$, alors $f_0(n) = f_1(n)$;
- (3) composition est donnée par concaténation : $(m_n, \dots, m_1) \circ (m'_k, \dots, m'_1) = (m_n, \dots, m_1, m'_k, \dots, m'_1)$.

Supposons qu'il existe un diagramme commutatif de groupoïdes :



pour établir la propriété universelle de $\mathcal{G}$, il faut montrer qu'il existe un unique morphisme de groupoïdes $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ qui rend commutatif le diagramme de la forme (2). Puisque $\text{Ob}\mathcal{G}$ est la somme amalgamée dans Ens , il existe une application canonique $\text{Ob}\mathcal{G} \rightarrow \text{Ob}\mathcal{H}$. L'ensemble des morphismes de $\mathcal{G}$ est engendré par les classes des morphismes de $\text{Mor}\mathcal{G}_0 \cup \text{Mor}\mathcal{G}_1$; on vérifie que les applications $\text{Mor}\mathcal{G}_0 \rightarrow \text{Mor}\mathcal{H}$ et $\text{Mor}\mathcal{G}_1 \rightarrow \text{Mor}\mathcal{H}$ induisent une application unique $\text{Mor}\mathcal{G} \rightarrow \text{Mor}\mathcal{H}$ (les relations sont vérifiées dans $\text{Mor}\mathcal{H}$) et que ces applications définissent un morphisme de groupoïdes. $\square$

Exemple 4.41. Un groupe discret G est un groupoïde à un seul objet.

- (1) Soient G_0, G_1 deux groupes discrets. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \{e\} & \longrightarrow & G_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_1 & \longrightarrow & G_0 \star G_1, \end{array}$$

où $G_0 \star G_1$ est le coproduit dans $\mathbf{Gp}$, est cocartésien dans $\mathbf{GPD}$.

- (2) Soient $G_0 \xleftarrow{f_0} H \xrightarrow{f_1} G_1$ deux morphismes entre groupes discrets et soit $G_0 \star_H G_1$ le groupe $(G_0 \star G_1)/N$, où N est le sous-groupe normal engendré par les éléments $f_0(h)f_1(h^{-1})$, $h \in H$. Alors

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f_0} & G_0 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow \\ G_1 & \longrightarrow & G_0 \star_H G_1 \end{array}$$

est cocartésien dans $\mathbf{GPD}$.

On a besoin du théorème de Lebesgue, qu'on appliquera aux espaces compacts I et $I \times I$.

Notation 4.42. Soit X un espace métrique. La boule $B(x, \varepsilon)$ de centre $x \in X$ et de rayon $\varepsilon > 0$ est le sous-espace ouvert $\{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Proposition 4.43. Soit X un espace métrique compact, muni d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in \mathcal{I}\}$. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que, $\forall x \in X \exists i_x \in \mathcal{I}$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_{i_x}$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons $\forall 0 < n \in \mathbb{N}$ il existe x_n tel que $\forall i \in \mathcal{I}$, $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i$. Puisque X est compact, la suite (x_n) admet un point d'accumulation $\bar{x}$. Mais il existe $j \in \mathcal{U}$ tel que $\bar{x} \in U_j$ et U_j est ouvert dans X ; on en déduit une contradiction. $\square$

Théorème 4.44. Soit $\{U_0, U_1\}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique X . Soient $i_\varepsilon : U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_\varepsilon$ et $j_\varepsilon : U_\varepsilon \hookrightarrow X$ les inclusions $\varepsilon \in \{0, 1\}$; alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U_0 \cap U_1) & \xrightarrow{\Pi(i_0)} & \Pi(U_0) \\ \Pi(i_1) \downarrow & & \downarrow \Pi(j_0) \\ \Pi(U_1) & \xrightarrow{\Pi(j_1)} & \Pi(X) \end{array}$$

est cocartésien dans $\mathbf{GPD}$.

Démonstration. Il est évident que $\text{Ob}\Pi(U_0) \hookleftarrow \text{Ob}\Pi(U_0 \cap U_1) \hookrightarrow \text{Ob}\Pi(U_1)$ sont des inclusions et que $\text{Ob}\Pi(X) \cong \text{Ob}\Pi(U_0) \amalg_{\text{Ob}\Pi(U_0 \cap U_1)} \text{Ob}\Pi(U_1)$. Ceci correspond au fait que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_0 \cap U_1 & \longrightarrow & U_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_1 & \longrightarrow & X \end{array}$$

est cocartésien dans $\mathfrak{T}$. Donc la somme amalgamée $\mathcal{G}$ de $\Pi(U_0) \hookleftarrow \Pi(U_0 \cap U_1) \hookrightarrow \Pi(U_1)$ est décrite par le lemme 4.40 et il existe un morphisme de groupoïdes

$$\mathcal{G} \rightarrow \Pi(X)$$

et l'application $\text{Ob}\mathcal{G} \xrightarrow{\cong} \text{Ob}\Pi(X)$ est une bijection. Il reste à démontrer que $\text{Mor}\mathcal{G} \rightarrow \text{Mor}\Pi(X)$ est une bijection.

Soit $\alpha : I \rightarrow X$ un chemin dans X qui représente un morphisme $[\alpha] \in \text{Mor}\Pi(X)$. Par le théorème de Lebesgue 4.43, il existe un entier N tel que $\forall 0 \leq s \leq N-1$, $\exists \iota_s \in \{0, 1\}$ tel que $\alpha([\frac{s}{N}, \frac{s+1}{N}]) \subset U_{\iota_s}$. Alors, on définit :

$$\begin{aligned} \alpha_s & : I \rightarrow X \\ t & \mapsto \alpha(\frac{s+t}{N}) \end{aligned}$$

de sorte que $[\alpha] = [\alpha_{N-1}] \circ [\alpha_{N-2}] \circ \dots \circ [\alpha_0]$ dans $\Pi(X)$. Puisque $[\alpha_s]$ est dans l'image de $\Pi(U_{\iota_s}) \rightarrow \Pi(X)$, par construction, on déduit que $[\alpha]$ est l'image de l'élément de $\text{Mor}\mathcal{G}$ représenté par $[[\alpha]] := ([\alpha_{N-1}], [\alpha_{N-2}], \dots, [\alpha_0])$; d'ailleurs, on peut montrer facilement que cet élément ne dépend pas du choix de N . Cet argument établit que l'application

$$\text{Mor}\mathcal{G} \twoheadrightarrow \text{Mor}\Pi(X)$$

est surjective.

Il reste à montrer l'injectivité ; on a construit, pour $\alpha : I \rightarrow X$, un élément bien défini $[[\alpha]] \in \text{Mor}\mathcal{G}$ tel que $[[\alpha]] \mapsto [\alpha]$. Il faut montrer que, si $\alpha \sim \beta$ rel ∂I , alors $[[\alpha]] = [[\beta]]$ dans $\text{Mor}\mathcal{G}$. Soit $H : I \times I \rightarrow X$ une homotopie rel ∂I de α vers β . Par le théorème de Lebesgue, il existe un entier K tel que $\forall 0 \leq s_1, s_2 \leq K-1$, $\exists \iota_{s_1, s_2} \in \{0, 1\}$ tel que $H([\frac{s_1}{K}, \frac{s_1+1}{K}] \times [\frac{s_2}{K}, \frac{s_2+1}{K}]) \subset U_{\iota_{s_1, s_2}}$.

Ainsi, la restriction de H à $[\frac{s_1}{K}, \frac{s_1+1}{K}] \times [\frac{s_2}{K}, \frac{s_2+1}{K}]$ correspond à une relation dans $\Pi(U_{\iota_{s_1, s_2}})$ entre les deux manières de parcourir le carré :

$$\begin{array}{ccc} & H|_{[\frac{s_1}{K}, \frac{s_1+1}{K}] \times [\frac{s_2}{K}, \frac{s_2+1}{K}]} & \\ \uparrow H|_{\{\frac{s_1}{K}\} \times [\frac{s_2}{K}, \frac{s_2+1}{K}]} & \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet & \uparrow H|_{[\frac{s_1+1}{K}] \times [\frac{s_2}{K}, \frac{s_2+1}{K}]} \\ & H|_{[\frac{s_1}{K}, \frac{s_1+1}{K}] \times \{\frac{s_2}{K}\}} & \end{array}$$

Le résultat en découle facilement. $\square$

Remarque 4.45. On peut généraliser le théorème de Seifert et van Kampen, en remplaçant le recouvrement ouvert $\{U_0, U_1\}$ par un recouvrement ouvert quelconque ; lorsque le recouvrement est fini, on peut le déduire du Théorème 4.44 par récurrence. (Exercice !)

Remarque 4.46. Pour (X, x) un espace pointé, on a défini le groupe fondamental comme $\text{Aut}_{\Pi(X)}(x)$, de sorte que l'inclusion

$$\text{Aut}_{\Pi(X)}(x) \hookrightarrow \Pi(X)$$

soit un morphisme de groupoïdes. Avec cette définition, la multiplication est donnée par

$$[\lambda] \circ [\mu] = [\mu \cdot \lambda].$$

La définition *classique* (qu'on trouve dans la littérature) utilise la multiplication opposée :

$$[\mu] * [\lambda] = [\mu \cdot \lambda],$$

donc $\pi_1(X, x) := \text{Aut}_{\Pi(X)}(x)^{\text{op}}$. (Si G est un groupe, G^{op} est le groupe opposé obtenu en considérant G comme une catégorie à un seul objet.)

Corollaire 4.47. Soit $\{U_0, U_1\}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique X tel que $U_0, U_1, U_0 \cap U_1$ sont connexes par arcs et soit $*_X \in U_0 \cap U_1$. Soient

$i_\varepsilon : U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_\varepsilon$ et $j_\varepsilon : U_\varepsilon \hookrightarrow X$ les inclusions $\varepsilon \in \{0, 1\}$; alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0 \cap U_1, *_X) & \xrightarrow{\pi_1(i_0)} & \pi_1(U_0, *_X) \\ \pi_1(i_1) \downarrow & & \downarrow \pi_1(j_0) \\ \pi_1(U_1, *_X) & \xrightarrow{\pi_1(j_1)} & \pi_1(X, *_X) \end{array}$$

est cocartésien dans la catégorie des groupes.

Démonstration. L'hypothèse sur la connexité par arcs entraîne que, pour $Z \in \{U_0 \cap U_1, U_0, U_1, X\}$, le morphisme de groupoïdes naturel :

$$\pi_1(Z, *_X) \rightarrow \Pi(Z)$$

est une équivalence de groupoïdes ; en particulier, en choisissant pour chaque $x \in Z$ un chemin γ_x de $*_X$ vers x dans Z tel que $\gamma_{*_X} = c_{*_X}$, il existe des rétractes compatibles de groupoïdes :

$$r_Z : \Pi(Z) \rightarrow \pi_1(Z, *_X).$$

Soit G un groupe discret tel qu'il existe un diagramme commutatif de morphismes de groupoïdes :

$$\begin{array}{ccccc} \Pi(U_0 \cap U_1) & \xrightarrow{\quad} & \Pi(U_0) & & \\ \downarrow & \searrow r_{U_0 \cap U_1} & \searrow r_{U_0} & & \\ \Pi(U_1) & & \pi_1(U_0 \cap U_1, *_X) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(U_0, *_X) \\ & \searrow r_{U_1} & \downarrow & & \downarrow \\ & & \pi_1(U_1, *_X) & \xrightarrow{\quad} & G. \end{array}$$

Alors, puisque $\Pi(X)$ est la somme amalgamée dans GPD, il existe un morphisme unique de groupoïdes $\Pi(X) \rightarrow G$ qui rend commutatif ce diagramme. La composition $\pi_1(X, *_X) \hookrightarrow \Pi(X) \rightarrow G$ est un morphisme de groupoïdes ayant un seul objet, donc un morphisme de groupes. Ce morphisme rend commutatif le diagramme (2) dans la catégorie des groupes ; la propriété universelle de $\Pi(X)$ entraîne l'unicité. $\square$

Remarque 4.48. Un avantage de la formulation du Théorème de Seifert et de van Kampen pour les groupoïdes fondamentaux est qu'on n'a pas besoin de l'hypothèse de connexité par arcs.

Remarque 4.49. Rappelons que, si (X, x) est un espace pointé, $P_{x,X}$ est l'espace des chemins γ dans X tel que $\gamma(0) = x$. Évaluation $\gamma \mapsto \gamma(1)$ induit une application continue : $e_1 : P_{x,X} \rightarrow X$. Pour définir le rétracte $\Pi(X) \rightarrow \pi_1(X, x)$, on a choisi, pour tout $y \in X$, un chemin $\gamma_y \in P_{x,X}$ tel que $\gamma_y(1) = y$, donc une *section* s dans la catégorie des ensembles :

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{s} & \\ P_{x,X} & \xrightarrow{e_1} & X. \end{array}$$

Si X n'est pas simplement connexe, la section ne peut pas être continue. En effet, l'espace $P_{x,X}$ est contractile par la Proposition 4.25, donc $\pi_1(P_{x,X}, c_x) = \{e\}$. Si s était une application continue, on aurait une section dans la catégorie des groupes :

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\pi_1(s)} & \\ \pi_1(P_{x,X}, s(x)) & \xrightarrow{\pi_1(e_1)} & \pi_1(X, x), \end{array}$$

d'où $\pi_1(X, x)$ serait trivial, une contradiction.

4.6. Applications du théorème de Seifert et van Kampen.

Considérons $S^1 \subset \mathbb{R}^1$; $S^1 \cong I^+ \amalg_{\{-1,1\}} I^-$ et on écrit $\alpha^+, \alpha^- : I \rightrightarrows S^1$ pour les deux chemins associés à cet homéomorphisme.

Proposition 4.50. *Soit $\mathcal{G}$ le sous-groupe plein de $\Pi(S^1)$ tel que $\text{Ob}\mathcal{G} = \{-1, 1\}$. Alors $\mathcal{G}$ est le groupoïde libre engendré par*

$$[\alpha^+], [\alpha^-] \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(-1, 1).$$

Démonstration. Soient $U^+ := S^1 \cap \{(x, y) | y > -\frac{1}{2}\}$ et $U^- := S^1 \cap \{(x, y) | y < \frac{1}{2}\}$. Alors U^+, U^- sont des ouverts contractiles et $U^+ \cap U^-$ est la réunion de deux ouverts contractiles. En particulier, pour $Z \in \{U^+ \cap U^-, U^+, U^-\}$ et objets $u, v \in \text{Ob}\Pi Z$, $\text{Hom}_{\Pi Z}(u, v) \in \{\{*\}, \emptyset\}$. On a $[\alpha^+] \in \text{Hom}_{\Pi U^+}(-1, 1)$ et $[\alpha^-] \in \text{Hom}_{\Pi U^-}(-1, 1)$. Le résultat découle du Théorème 4.44 (exercice). $\square$

Corollaire 4.51. *Soit $*$ en S^1 un point de base quelconque. Alors $\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$.*

En particulier, le cercle S^1 n'est pas contractile.

Démonstration. Conséquence immédiate du Corollaire 4.47 et de la Proposition 4.50. $\square$

Proposition 4.52. *Soit $n \geq 2$ un entier; alors la sphère S^n est simplement connexe.*

Démonstration. Il est évident que S^n est connexe par arcs. Choisir un recouvrement ouvert $S^n = U^+ \cup U^-$ tel que U^+, U^- sont contractiles, $U^+ \cap U^-$ est connexe par arcs et $S^{n-1} \hookrightarrow U^+ \cap U^-$ est un rétracte par déformation forte (donc une équivalence d'homotopie). Prendre un point de base $*$ en $U^+ \cap U^-$.

Alors, par le théorème de Seifert et van Kampen, $\pi_1(S^n, *) \cong \{e\} \star_{\pi_1(S^{n-1}, *)} \{e\} \cong \{e\}$. $\square$

Définition 4.53. Soient $(X, x), (Y, y)$ deux espaces pointés; le *bouquet* de X et Y est l'espace quotient :

$$X \vee Y := (X \amalg Y) / x = y.$$

pointé par $*$, l'image de x (ou y).

Proposition 4.54. *Soient $(X, x), (Y, y)$ deux espaces connexes par arcs et correctement pointés. Alors :*

$$\pi_1(X \vee Y, *) \cong \pi_1(X, x) \star \pi_1(Y, y).$$

Démonstration. Soient $x \in U_x \subset X, y \in U_y \subset Y$ des voisinages de $x \in X$ et $y \in Y$ fournis par l'hypothèse que X, Y sont correctement pointés, et définir les ouverts $V_Y := U_x \vee Y$ et $V_X := X \vee U_y$ de $X \vee Y$. Alors, $X \hookrightarrow V_X$ et $Y \hookrightarrow V_Y$ sont des rétractes par déformation forte et $*$ $\hookrightarrow V_X \cap V_Y$ est un rétracte par déformation forte, en particulier $V_X \cap V_Y$ est contractile.

Par le théorème de Seifert et van Kampen,

$$\pi_1(X \vee Y, *) \cong \pi_1(V_X, *) \star_{\pi_1(V_X \cap V_Y, *)} \pi_1(V_Y, *) \cong \pi_1(X, x) \star \pi_1(Y, y).$$

$\square$

Exemple 4.55. Soit $0 < k$ un entier. Alors $\pi_1(\bigvee_k S^1, *) \cong \mathbb{Z}^{\star k}$, le groupe libre sur un ensemble à k éléments.

Proposition 4.56. *Soient $n \geq 1$ un entier, $f : S^n \rightarrow X$ une application continue et $Y := C_f = X \cup_f e^{n+1}$ le cône de f . On pose $x := f(*)$ pour $*$ en S^n . Alors :*

(1) *si $n = 1$, le morphisme $X \hookrightarrow Y = C_f$ induit un isomorphisme*

$$\pi_1(Y, x) \cong \pi_1(X, x) / [f]$$

*où $[f] \triangleleft \pi_1(X, x)$ est le sous-groupe normal engendré par l'image de $\pi_1(f) : \pi_1(S^1, *) \rightarrow \pi_1(X, x)$;*

- (2) si $n \geq 2$, alors le morphisme $X \hookrightarrow Y = C_f$ induit un isomorphisme $\pi_1(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, x)$.

Démonstration. On peut supposer que X est connexe par arcs, car l'image de f est inclus dans une composante connexe par arcs.

Le cône C_f est un quotient de l'espace $(S^n \times I) \amalg X$. On définit les ouverts $U_X := \text{Image}\{(S^n \times (\frac{1}{3}, 1] \amalg X)\}$ et $U_C := \text{Image}\{(S^n \times [0, \frac{2}{3}])\}$, de sorte que $Y = U_X \cup U_C$. Alors $X \hookrightarrow U_X$ est un rétracte par déformation forte, U_C est contractile et $U_X \cap U_C \cong S^n \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \simeq S^n$. On choisit un point de base $u \in U_X \cap U_C$. Alors, par le théorème de Seifert et van Kampen, il existe un carré cocartésien de groupes :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_X \cap U_C, u) & \longrightarrow & \pi_1(U_C, u) \cong \{e\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U_X, u) & \longrightarrow & \pi_1(Y, u). \end{array}$$

En choisissant un chemin dans U_X de u vers x , on vérifie que ce diagramme est isomorphe au diagramme de groupes

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^n, *) & \longrightarrow & \{e\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X, x) & \longrightarrow & \pi_1(Y, x), \end{array}$$

qui est donc cocartésien.

Si $n \geq 2$, alors $\pi_1(S^n, *) \cong \{e\}$, et le résultat est immédiat. Dans le cas $n = 1$, on utilise l'isomorphisme

$$\pi_1(X, x) \star_{\pi_1(S^1, *)} \{e\} \cong \pi_1(X, x)/[f].$$

□

Remarque 4.57. On traite le cas $n = 0$ de la Proposition 4.56 en appliquant la Proposition 4.54.

Exemple 4.58. Le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe au quotient de la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ par la relation $x \sim -x$. Ainsi, on voit (exercice !) que $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe au cône $C_{[2]}$ de l'application continue $S^1 \xrightarrow{[2]} S^1$, $z \mapsto z^2$ (lorsqu'on considère $S^1 \subset \mathbb{C} := \{z \mid ||z|| = 1\}$). Alors :

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2, *) \cong \mathbb{Z}/2.$$

Les espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$, pour $n > 2$ sont obtenus en rajoutant des 'cellules' de dimension > 2 ; donc $\pi_1(\mathbb{R}P^n, *) \cong \mathbb{Z}/2$, $\forall n \geq 2$. (Exercice : calculer $\pi_1(\mathbb{R}P^1, *)$.)

Par contre, la droite projective complexe, $\mathbb{C}P^1$ est homéomorphe à S^2 (la sphère de Riemann), donc

$$\pi_1(\mathbb{C}P^1, *) \cong \{e\}$$

et les espaces projectifs complexes $\mathbb{C}P^n$ sont simplement connexes $\forall n \geq 1$.

Théorème 4.59. Soit G un groupe discret. Alors il existe un espace pointé (X, x) tel que $\pi_1(X, x) \cong G$.

Démonstration. Le groupe G admet une présentation de la forme :

$$F_1 \rightarrow F_0 \twoheadrightarrow G,$$

où F_0, F_1 sont des groupes libres. Explicitement, $G \cong F_0/N$, où N est un sous groupe normal et $F_0 \cong \mathbb{Z}^{*\mathcal{I}_0}$, le groupe libre sur un ensemble $\mathcal{I}_0$ (qui correspond à un ensemble de générateurs de G) et il existe une surjection $F_1 \cong \mathbb{Z}^{*\mathcal{I}_1} \twoheadrightarrow N$, où l'ensemble $\mathcal{I}_1$ correspond aux relations.

Alors, $F_0 \cong \pi_1(\bigvee_{\mathcal{I}_0} S^1)$, et donc l'image d'un générateur $j \in \mathcal{I}_1$ dans G définit un élément de $\pi_1(\bigvee_{\mathcal{I}_0} S^1)$, c'est à dire une application pointée continue :

$$f_j : S^1 \rightarrow \bigvee_{\mathcal{I}_0} S^1.$$

Ces applications induisent une application continue :

$$f := \bigvee_{j \in \mathcal{I}_1} f_j : \bigvee_{\mathcal{I}_1} S^1 \rightarrow \bigvee_{\mathcal{I}_0} S^1.$$

On définit $X := C_f$, le cône de f .

Le théorème de Seifert et de van Kampen (cf. la démonstration de la Proposition 4.56), entraîne que

$$\pi_1(X, x) \cong G.$$

□

Remarque 4.60. Lorsque G est de présentation finie (on peut prendre $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1$ des ensembles finis), alors le résultat est une conséquence immédiate de la Proposition 4.56, car on peut rajouter les 2-cellules par récurrence.

5. REVÊTEMENTS

5.1. Espaces au dessus de B .

Définition 5.1. Soit B un espace topologique.

- (1) La catégorie $\mathfrak{T}/B$ des *espaces topologiques au dessus de B* est la catégorie ayant objets les applications continues $Y \rightarrow B$; un morphisme $(Y_1 \rightarrow B) \rightarrow (Y_2 \rightarrow B)$ est une application continue $Y_1 \rightarrow Y_2$ qui rend commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{\quad} & Y_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & B. & \end{array}$$

- (2) Soit $f : Y \rightarrow B \in \mathfrak{T}/B$; la *fibre de f au dessus de point $b \in B$* est l'espace topologique $F_b := f^{-1}(b)$.

Définition 5.2. Soit $g : C \rightarrow B$ une application continue; le foncteur de *change-ment de base* est le foncteur

$$\begin{aligned} g^* : \mathfrak{T}/B &\rightarrow \mathfrak{T}/C \\ (Y \rightarrow B) &\mapsto (Y \times_B C \rightarrow C), \end{aligned}$$

où $(Y \times_B C)$ est le produit fibré.

Remarque 5.3. La catégorie $\mathfrak{T}/B$ possède un coproduit et un produit. Soient $(Y_1 \rightarrow B)$ et $(Y_2 \rightarrow B)$ deux objets de $\mathfrak{T}/B$. Alors

- (1) le coproduit est l'objet $(Y_1 \amalg Y_2 \rightarrow B)$, où le morphisme de structure est donné par le coproduit des deux morphismes de structure;
- (2) le produit est l'objet $(Y_1 \times_B Y_2 \rightarrow B)$ qui est donné par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y_1 \times_B Y_2 & \longrightarrow & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_2 & \longrightarrow & B, \end{array}$$

le morphisme de structure étant la composée dans ce carré.

5.2. Fibrés : morphismes localement triviaux.

Définition 5.4. Une application continue $p : E \rightarrow B$ est

- (1) *triviale* s'il existe un espace F (non vide) et un homéomorphisme $E \xrightarrow{\cong} F \times B$ qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\cong} & F \times B \\ & \searrow p & \downarrow \text{pr}_B \\ & & B; \end{array}$$

- (2) *localement triviale* s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} := \{U_i | i \in \mathcal{I}\}$ tel que chaque application $p^{-1}U := U \times_B E \rightarrow U$ est triviale (on dit que $\mathcal{U}$ est un recouvrement *trivialisant*).

Remarque 5.5.

- (1) On suppose que la fibre est non vide afin que $p : E \rightarrow B$ soit surjectif.
- (2) L'application localement triviale $p : E \rightarrow B$ est un objet de $\mathfrak{T}/B$.

Proposition 5.6. Soit $p : E \rightarrow B$ une application localement triviale. Alors

- (1) p est une application ouverte, en particulier B est un quotient de E ;

(2) la partie $\{b \in B | p^{-1}(b) \cong F\}$ est ouverte et fermée dans B .

Démonstration. Exercice. □

5.3. Homéomorphismes locaux et revêtements.

Définition 5.7. Un morphisme $f : E \rightarrow B$ de $\mathfrak{T}$ est un *homéomorphisme local* si tout point e de E admet un voisinage ouvert U_e tel que $f(U_e)$ est ouvert dans B et $f|_{U_e} : U_e \rightarrow f(U_e)$ est un homéomorphisme.

Exemple 5.8.

- (1) L'inclusion du sous-espace $(0, 1) \hookrightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme local, qui n'est pas surjectif.
- (2) Soit $\mathbb{R}^{00}$ la droite affine avec le point $\{0\}$ doublé, i.e. l'espace topologique quotient

$$\mathbb{R} \amalg \mathbb{R} / \sim$$

dans lequel on identifie les deux sous espaces $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Le morphisme quotient $\mathbb{R}^{00} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ qui identifie le point doublé est un homéomorphisme local.

Lemme 5.9. Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ deux applications continues. Si g et $g \circ f$ sont des homéomorphismes locaux, alors f est un homéomorphisme local.

Démonstration. Soit $x \in X$; il existe un voisinage ouvert $x \in U \subset X$ tel que $g \circ f(U)$ est ouvert dans Z et la restriction de $g \circ f$ à U est un homéomorphisme. De même, il existe un voisinage ouvert $f(x) \in V \subset Y$ tel que $g(V)$ est ouvert dans Z et la restriction de g à V est un homéomorphisme. Alors, l'ouvert $W := gf(U) \cap g(V)$ contient $gf(x)$ et on vérifie que l'ouvert $U \cap (g \circ f)^{-1}W$ de X est un voisinage de x qui satisfait les propriétés recherchées. □

Définition 5.10.

- (1) Un *revêtement* est une application localement triviale $p : E \rightarrow B$ telle que, $\forall b \in B$, la fibre $p^{-1}(b)$ est un espace discret *non vide*.
- (2) Le revêtement $p : E \rightarrow B$ est *fini* si chaque fibre de p est un ensemble fini.
- (3) Un *morphisme de revêtements* $(p_1 : E_1 \rightarrow B) \rightarrow (p_2 : E_2 \rightarrow B)$ est une application continue $g : E_1 \rightarrow E_2$ qui est un morphisme de $\mathfrak{T}/B$.

Exemple 5.11.

- (1) Le morphisme $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$ est un revêtement.
- (2) Pour $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, le morphisme $[n] : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ est un revêtement fini; la fibre a cardinal $|n|$, donc c'est un revêtement à n feuillets.
- (3) Soient K un ensemble et B un espace topologique; la projection $K \times B \rightarrow B$ est un revêtement lorsqu'on munit K de la topologie discrète. Un revêtement de cette forme est un *revêtement trivial*.

Proposition 5.12.

- (1) Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement; alors p est un homéomorphisme local;
- (2) Soient $p_1 : E_1 \rightarrow B, p_2 : E_2 \rightarrow B$ deux revêtements. Alors
 - (a) le coproduit $p_1 \amalg p_2 : E_1 \amalg E_2 \rightarrow B$ est un revêtement;
 - (b) le produit fibré $p_1 \times_B p_2 : E_1 \times_B E_2 \rightarrow B$ est un revêtement.

Démonstration. Soit $e \in E$; il existe un voisinage ouvert U (on peut le prendre connexe) de $p(e)$ tel que $p^{-1}U \cong p^{-1}(p(e)) \times U$, où $p^{-1}(p(e))$ est un espace discret. Alors $e \times U \subset p^{-1}(p(e)) \times U$ est une partie ouverte de E homéomorphe à U .

Pour le deuxième point, on peut réduire au cas où p_1, p_2 sont des revêtements triviaux, donc $E_1 \cong F_1 \times B$ et $E_2 \cong F_2 \times B$, où F_1, F_2 sont des espaces discrets. Alors $E_1 \amalg E_2 \cong (F_1 \amalg F_2) \times B$ et $E_1 \times_B E_2 \cong (F_1 \times F_2) \times B$ sont des revêtements triviaux. □

Proposition 5.13. *Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement. Alors, le revêtement $E \times_B E \rightarrow B$ se décompose en*

$$(E \rightarrow B) \amalg (E' \rightarrow B)$$

où la composante $E \subset E \times_B E$ est la diagonale et le complément $E' \subset E \times_B E$ est le sous-espace $\{(e_1, e_2) | p(e_1) = p(e_2) \text{ et } e_1 \neq e_2\}$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que la restriction de $E \times_B E \rightarrow B$ à E' est un revêtement ; ceci est une conséquence immédiate du fait que p est localement trivial. $\square$

Proposition 5.14. *Soit $f : (E_1 \xrightarrow{p_1} B) \rightarrow (E_2 \xrightarrow{p_2} B)$ un morphisme de revêtements tel que E_2 est connexe. Alors le morphisme $f : E_1 \rightarrow E_2$ est un revêtement.*

Démonstration. Par Lemme 5.9, l'application f est un homéomorphisme local ; alors l'image $f(E_1)$ est ouvert dans E_2 . Puisque p_2 est un revêtement, le complémentaire $E_2 \setminus f(E_1)$ est également ouvert. L'hypothèse que E_2 est connexe entraîne alors que $f(E_1) = E_2$, donc f est surjectif.

Enfin, en utilisant le fait que p_1 est un revêtement, on vérifie que f est un revêtement. $\square$

5.4. Relèvements.

Définition 5.15. Soient $p : E \rightarrow B$ un revêtement et $g : X \rightarrow B$ une application continue. Un *relèvement* de g est une application continue $\tilde{g} : X \rightarrow E$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \tilde{g} \nearrow & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

(qui correspond à un morphisme de $\mathfrak{T}/B$).

Proposition 5.16. *Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement et $g : X \rightarrow B$ une application continue telle que l'espace X est connexe. Alors deux relèvements $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 : X \rightrightarrows E$ de g coïncident si et seulement si $\exists x \in X$ tel que $\tilde{g}_1(x) = \tilde{g}_2(x)$.*

Démonstration. Les relèvements $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ induisent une application continue $G : X \rightarrow E \times_B E$, par la propriété universelle du produit fibré, telle que

$$\begin{array}{ccc} E \times_B E & \longrightarrow & E \amalg E' \\ \uparrow G & \downarrow & \nwarrow \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

commute, où la décomposition $E \times_B E \cong E_{\text{diag}} \amalg E'$ est fournie par la Proposition 5.13. Puisque X est connexe, l'image de G est soit incluse dans E_{diag} , soit dans E' et il suffit de vérifier ceci sur un point de X .

Enfin, l'image de G est incluse dans E_{diag} si et seulement si $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2$. $\square$

Remarque 5.17. Ce résultat n'est pas vrai pour les homéomorphismes locaux surjectifs, en général. Par exemple, le morphisme $\mathbb{R}^{00} \rightarrow \mathbb{R}$ admet deux sections qui coïncident sauf sur 0.

Question 5.18. *Si $p : E \rightarrow B$ est un revêtement, quelle est la nature de*

$$\Pi(p) : \Pi(E) \rightarrow \Pi(B)?$$

Théorème 5.19. *Soient $p : E \rightarrow B$ un revêtement et $\alpha : I \rightarrow B$ un chemin tel que $\alpha(0) = b$.*

(1) $\forall e \in F_b$, il existe un relèvement unique $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ tel que $\tilde{\alpha}(0) = e$;

- (2) si $\beta : I \rightarrow B$ est homotope à α relativement à ∂I , alors le relèvement $\tilde{\beta}$ de β tel que $\tilde{\beta}(0) = e$ est homotope à $\tilde{\alpha}$ relativement à ∂I .

Démonstration. L'unicité des relèvements est une conséquence de la Proposition 5.16.

Soit $\mathcal{U} = \{U_i | i \in \mathcal{I}\}$ un recouvrement ouvert de B qui trivialise le revêtement. Par le théorème de Lebesgue (Proposition 4.43), $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall 0 \leq s < N$, $\exists i_s$ tel que $\alpha([\frac{s}{N}, \frac{s+1}{N}]) \subset U_{i_s}$. Alors, $\forall x \in p^{-1}(\alpha(\frac{s}{N}))$ il existe un relèvement unique $\alpha_{s,x} : [\frac{s}{N}, \frac{s+1}{N}] \rightarrow E$ tel que $\alpha_{s,x}(\frac{s}{N}) = x$, car $p^{-1}(U_{i_s}) \cong p^{-1}(\alpha(\frac{s}{N})) \times U_{i_s}$.

Alors, on construit un relèvement $\tilde{\alpha}_s : [0, \frac{s}{N}] \rightarrow E$ tel que $\tilde{\alpha}_s(0) = e$ par récurrence sur $0 \leq s \leq N$. Pour $s = 0$, il suffit de prendre l'application $0 \mapsto e$. Pour l'étape de récurrence, $[0, \frac{s+1}{N}] = [0, \frac{s}{N}] \cup [\frac{s}{N}, \frac{s+1}{N}]$ et les applications continues $\tilde{\alpha}_s$ et $\alpha_{s,\tilde{\alpha}_s(\frac{s}{N})}$ induisent une application continue $\tilde{\alpha}_{s+1}$. On prend $\tilde{\alpha} := \tilde{\alpha}_N$.

Soit $H : I \times I \rightarrow B$ une homotopie relativement à ∂I entre $\alpha, \beta : I \rightrightarrows B$. Par une généralisation de l'argument précédent (en utilisant des petits carrés à la place des intervalles), il existe un relèvement $\tilde{H} : I \times I \rightarrow E$ de H tel que $H(0,0) = e = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. En particulier $\tilde{H}(-,0)$ est un relèvement de $\tilde{\alpha}$.

La restriction de $\tilde{H}$ à $I \cong \{0\} \times I$ est une application continue $I \rightarrow p^{-1}(\alpha(0))$, où $p^{-1}(\alpha(0))$ est un espace discret. Alors, $\tilde{H}|_{\{0\} \times I}$ est l'application constante de valeur e . Par le même argument, on déduit que $\tilde{H}|_{\{1\} \times I}$ est l'application constante de valeur $\tilde{\alpha}(1)$. On en déduit que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ et que $\tilde{H}$ est une homotopie relativement à ∂I de $\tilde{\alpha}$ vers $\tilde{\beta}$. $\square$

Corollaire 5.20. Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement. Alors

- (1) le morphisme de groupoïdes $\Pi(p) : \Pi(E) \rightarrow \Pi(B)$ est fidèle ($\forall e_1, e_2 \in E$, $\text{Hom}_{\Pi(E)}(e_1, e_2) \hookrightarrow \text{Hom}_{\Pi(B)}(p(e_1), p(e_2))$ est injective);
- (2) en particulier, $\forall e \in E$, le morphisme de groupes $\pi_1(p) : \pi_1(E, e) \hookrightarrow \pi_1(B, p(e))$ est un monomorphisme.

Démonstration. Soient $[\tilde{\alpha}], [\tilde{\beta}] \in \text{Hom}_{\Pi(E)}(e_1, e_2)$ deux morphismes tels que $\Pi(p)[\tilde{\alpha}] = \Pi(p)[\tilde{\beta}] =: [\alpha]$, représentés par les chemins $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : I \rightrightarrows E$. Alors $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont deux relèvements de $\alpha = p(\tilde{\alpha})$ et $\beta := p(\tilde{\beta})$, qui sont homotopes rel ∂I . Par relèvement d'homotopies, on a que $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont homotopes rel ∂I , ce qui établit le premier point; le deuxième en est une conséquence immédiate. $\square$

Théorème 5.21. Soient $p : E \rightarrow B$ un revêtement, $g : X \rightarrow B$ une application continue, où X est connexe et localement connexe par arcs, et $x \in X$ un point.

Il existe un relèvement $\tilde{g} : X \rightarrow E$ tel que $\tilde{g}(x) = e$ (donc $p(e) = g(x)$) si et seulement si

$$g_*(\pi_1(X, x)) \subset \text{Image}\{p_* : \pi_1(E, e) \hookrightarrow \pi_1(B, g(x))\}.$$

Démonstration. La démonstration se fait en deux étapes : d'abord on démontre qu'il existe une application $\tilde{g} : X \rightarrow E$ qui relève g et ensuite on démontre qu'elle est continue, en utilisant l'hypothèse que X est localement connexe par arcs.

Soit $y \in X$; il existe un chemin γ_y de x vers y dans X , puisque X est connexe par arcs. Par le théorème 5.19, il existe un chemin unique $\tilde{\alpha}_y$ dans E qui relève $g(\gamma_y)$ et tel que $\tilde{\alpha}_y(0) = e$. On pose $\tilde{g}(y) := \tilde{\alpha}_y(1)$; cette valeur ne dépend pas du choix de γ_y à homotopie relativement à ∂I près.

Il faut vérifier que $\tilde{g}(y)$ ne dépend pas du choix de γ_y . Soit γ'_y un deuxième chemin de x vers y dans X et soit $\tilde{\beta}_y$ le relèvement de $g(\gamma'_y)^{-1}$ tel que $\tilde{\beta}_y(0) = \tilde{\alpha}_y(1)$. Alors $\tilde{\alpha}_y \cdot \tilde{\beta}_y$ est un chemin dans E qui relève $g(\gamma_y \cdot (\gamma'_y)^{-1})$ et qui commence à e .

Par construction $\gamma_y \cdot (\gamma'_y)^{-1}$ est un lacet dans X basé à x , donc $g(\gamma_y \cdot (\gamma'_y)^{-1})$ est un lacet dans B basé à $g(e)$, qui est dans l'image de $g_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(B, g(x))$. Alors, par l'hypothèse, il est l'image d'un lacet dans E basé à e . Par unicité du

relèvement, on déduit que $\tilde{\alpha}_y \cdot \tilde{\beta}_y$ est un lacet dans E . En particulier, le chemin inverse $\tilde{\alpha}'_y := \beta_y^{-1}$ relève $g(\gamma'_y)$ et $\tilde{\alpha}'_y(0) = e$, $\tilde{\alpha}'_y(1) = \tilde{\alpha}_y(1)$. Donc $\tilde{g}(y)$ est bien défini.

Pour démontrer que $\tilde{g}$ est continue, il suffit de montrer que, pour chaque partie ouverte $U \subset V$ telle que $p^{-1}U \rightarrow U$ est triviale et chaque feuillet W de $p^{-1}(U) \cong \coprod_{z \in p^{-1}(b)} U \times \{z\}$ (où $b \in U$), $\tilde{g}^{-1}(W)$ est une partie ouverte de X . Si $\tilde{g}^{-1}(W)$ est vide, il n'y a rien à démontrer. Sinon, pour $y \in \tilde{g}^{-1}(W)$, $y \in g^{-1}(U) \subset X$, qui est une partie ouverte de X , puisque g est continue. Par hypothèse, X est localement connexe par arcs, donc il existe un voisinage ouvert $y \in V \subset U$ qui est connexe par arcs. On va montrer que $V \subset \tilde{g}^{-1}(W)$.

L'application $\tilde{g}|_V$ se décrit comme suit ; pour $v \in V$, soient δ_v un chemin dans V de y à v et Δ_v le chemin dans E qui commence à $\tilde{g}(y)$ et qui relève $g(\delta_v)$; alors $\tilde{g}(v) = \Delta_v(1)$. Alors, $\Delta_v : I \rightarrow E$ est une application continue vers $p^{-1}U$; puisque $p^{-1}(U) \cong U \times p^{-1}(g(y))$ est une décomposition et $\Delta_v(0) = \tilde{g}(y) \in W$, on a $\Delta_v : I \rightarrow W$. En particulier, $\forall v \in V$, $v \in \tilde{g}^{-1}(W)$. $\square$

5.5. La catégorie des revêtements et le groupe d'automorphismes.

Notation 5.22. Pour B un espace topologique, la *catégorie des revêtements au dessus de B* sera dénotée Cov/B , considérée comme une sous-catégorie de $\mathfrak{T}/B$.

Définition 5.23. Pour $p : E \rightarrow B$ un objet de Cov/B , le *groupe d'automorphismes de p* , $\text{Aut}(p)$, est le groupe d'automorphismes de p dans la catégorie Cov/B .

Lemme 5.24. Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement. Alors, $\forall b \in B$, le groupe $\text{Aut}(p)$ agit sur la fibre $p^{-1}(b)$:

$$\begin{aligned} \text{Aut}(p) \times p^{-1}(b) &\rightarrow p^{-1}(b) \\ (g, e) &\mapsto g(e). \end{aligned}$$

Démonstration. Évident. $\square$

Lemme 5.25. Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement tel que E est connexe. Alors, $\forall \eta \in E$, l'application

$$\begin{aligned} \text{Aut}(p) &\hookrightarrow p^{-1}(p(\eta)) \\ g &\mapsto g(\eta) \end{aligned}$$

est une injection.

Démonstration. Un automorphisme g de p définit un relèvement de p . Le résultat découle de la Proposition 5.16 : deux automorphismes g_1, g_2 coïncident si et seulement si $g_1(\eta) = g_2(\eta) \in p^{-1}(p(\eta))$. $\square$

Définition 5.26. Un revêtement $p : E \rightarrow B$ est *Galoisien* si E est connexe par arcs et l'action de $\text{Aut}(p)$ sur les fibres de p est transitive.

Proposition 5.27. Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement Galoisien. Alors, $\forall \eta \in E$, l'évaluation $g \mapsto g(\eta)$ induit une bijection $\text{Aut}(p) \cong p^{-1}(p(\eta))$.

Démonstration. Conséquence immédiate du Lemme 5.25 et de la définition d'un revêtement Galoisien. $\square$

5.6. Catégories fibrées.

Définition 5.28. Pour $\mathcal{C}$ une catégorie petite,

- (1) la *catégorie $\text{CAT}/\mathcal{C}$ des petites catégories* au dessus de $\mathcal{C}$ est la catégorie dont un objet est un foncteur $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ et un morphisme un triangle commutatif de foncteurs ;

- (2) pour $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un objet de $\text{CAT}/\mathcal{C}$ et $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$, la *catégorie fibre au dessus de X* , $\mathcal{D}_X$, est la sous-catégorie des objets Y tel que $\psi(Y) = X$ et des morphismes $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ tel que $\psi(f) = 1_X$.
- (3) Soit $\text{Ens}^{\mathcal{C}}$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers Ens et des transformations naturelles.

Définition 5.29. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie petite et $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ un foncteur. L'objet $\mathcal{C}_{/\Phi}$ de $\text{CAT}/\mathcal{C}$ est définie par :

- $\text{Ob}\mathcal{C}_{/\Phi} = \{(X, v) | X \in \text{Ob}\mathcal{C}, v \in \Phi(X)\}$;
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}_{/\Phi}}((X, v), (Y, w)) := \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) | \Phi(f)v = w\}$.

Le foncteur oubli $\mathcal{C}_{/\Phi} \rightarrow \mathcal{C}$ est défini par $(X, v) \mapsto X$.

Lemme 5.30. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie petite. La construction $\Phi \mapsto \mathcal{C}_{/\Phi}$ définit un foncteur :

$$\text{Ens}^{\mathcal{C}} \rightarrow \text{CAT}/\mathcal{C}.$$

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde (petit) ; cette construction définit un foncteur :

$$\text{Ens}^{\mathcal{G}} \rightarrow \text{GPD}/\mathcal{G}.$$

Démonstration. Soit $\eta : \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ une transformation naturelle ; le foncteur $\mathcal{C}_{/\eta}$ est défini par :

$$(X, v) \mapsto (X, \eta_X(v))$$

pour $(X, v) \in \text{Ob}\mathcal{C}_{/\Phi_1}$. (*Exercice* : vérifier que ceci définit un foncteur.)

Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde, il suffit de vérifier que, $\forall \Phi : \mathcal{G} \rightarrow \text{Ens}$, la catégorie $\mathcal{G}_{/\Phi}$ est un groupoïde. Donc, il suffit de vérifier que chaque morphisme est inversible. L'inverse du morphisme $(X, v) \rightarrow (Y, w)$ donné par $\alpha : X \rightarrow Y$ dans $\text{Mor}\mathcal{G}$ est $\alpha^{-1} : Y \rightarrow X$, car $\Phi(\alpha^{-1})w = v$. $\square$

Définition 5.31. Pour $\mathcal{C}$ une catégorie petite, soient

- (1) $(\text{CAT}/\mathcal{C})^{\text{disc}}$ la sous-catégorie pleine de $\text{CAT}/\mathcal{C}$ des catégories $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ telles que, $\forall X \rightarrow Y$ de $\text{Mor}\mathcal{D}$ et $\eta \in \text{Ob}\mathcal{D}_X$, il existe un morphisme unique $\tilde{f}_X$ de $\text{Mor}\mathcal{D}$ tel que $\text{source}\tilde{f}_X = \eta$ et $\psi(\tilde{f}) = f$;
- (2) $(\text{CAT}/\mathcal{C})^{\text{disc}, \neq \emptyset}$ la sous-catégorie pleine de $(\text{CAT}/\mathcal{C})^{\text{disc}}$ des catégories $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ telles que $\forall X \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $\text{Ob}\mathcal{D}_X \neq \emptyset$.

Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde, on définit $(\text{GPD}/\mathcal{G})^{\text{disc}}$ et $(\text{GPD}/\mathcal{G})^{\text{disc}, \neq \emptyset}$ de la même manière.

Remarque 5.32. Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde, et $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de groupoïdes, la propriété d'unicité des relèvements est équivalente à la propriété suivante :

- $\forall X \in \text{Ob}\mathcal{G}$ et $Y \in \text{Ob}\mathcal{G}_X$, $\text{Aut}_{\mathcal{G}_X}(Y) = \{e\}$.

Lemme 5.33. Le foncteur $\mathcal{C}_{/-} : \text{Ens}^{\mathcal{C}} \rightarrow \text{CAT}/\mathcal{C}$ prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine $(\text{CAT}/\mathcal{C})^{\text{disc}}$.

Démonstration. Exercice. $\square$

Théorème 5.34. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie petite. Le foncteur

$$\mathcal{C}_{/-} : \text{Ens}^{\mathcal{C}} \rightarrow (\text{CAT}/\mathcal{C})^{\text{disc}}$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. On définit un foncteur $\Phi_- : (\text{CAT}/\mathcal{C})^{\text{disc}} \rightarrow \text{Ens}^{\mathcal{C}}$ de la manière suivante. Si $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est un objet de $(\text{CAT}/\mathcal{C})^{\text{disc}}$, Φ_{ψ} est le foncteur $\Phi_{\psi}(X) := \text{Ob}\mathcal{D}_X$, pour $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$. Pour $f : X \rightarrow Y$, l'hypothèse que $\psi \in \text{Ob}(\text{CAT}/\mathcal{C})^{\text{disc}}$ entraîne que $f : X \rightarrow Y$ induit une application $\Psi_{\psi}(f) : \text{Ob}\mathcal{D}_X \rightarrow \text{Ob}\mathcal{D}_Y$.

Exercice : vérifier que ce foncteur est une (quasi)inverse à $\mathcal{C}_{/-}$. $\square$

Corollaire 5.35. Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde petit. Le foncteur

$$\mathcal{G}/- : \mathbf{Ens}^{\mathcal{G}} \rightarrow (\mathbf{CAT}/\mathcal{G})^{\text{disc}}$$

est une équivalence de catégories qui se restreint à une équivalence de catégories :

$$\mathcal{G}/- : (\mathbf{Ens}^{\mathcal{G}})^{\neq \emptyset} \rightarrow (\mathbf{CAT}/\mathcal{G})^{\text{disc}, \neq \emptyset},$$

où $(\mathbf{Ens}^{\mathcal{G}})^{\neq \emptyset}$ est la sous-catégorie pleine des foncteurs Φ tels que, $\forall X \in \text{Ob}\mathcal{G}$, $\Phi(X) \neq \emptyset$.

Démonstration. Exercice. □

Notation 5.36. Pour G un groupe discret,

- (1) soit $G\text{--}\mathbf{Ens}$ la catégorie des G -ensembles à gauche (le groupe G agit à gauche sur l'ensemble) et des morphismes G -équivariants ;
- (2) soit $\mathbf{Ens}\text{--}G$ la catégorie des G -ensembles à droite et des morphismes G -équivariants.
- (3) Soient $(G\text{--}\mathbf{Ens})^{\neq \emptyset}$ (respectivement $(\mathbf{Ens}\text{--}G)^{\neq \emptyset}$) la sous-catégorie pleine des G -ensembles non-vides.
- (4) Pour $X \in \mathbf{Ens}\text{--}G$ et $Y \in G\text{--}\mathbf{Ens}$, soit $X \times_G Y$ l'ensemble quotient de $X \times Y$ par la relation $(xg, y) = (x, gy)$.

Proposition 5.37. Soient $\mathcal{G}$ un groupoïde connexe et $X \in \text{Ob}\mathcal{G}$. Alors, le foncteur

$$\begin{aligned} e_X : \mathbf{Ens}^{\mathcal{G}} &\rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{G}}(X)\text{--}\mathbf{Ens} \\ \Phi &\mapsto \Phi(X) \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories, qui se restreint à une équivalence de catégories :

$$e_X : (\mathbf{Ens}^{\mathcal{G}})^{\neq \emptyset} \rightarrow (\text{Aut}_{\mathcal{G}}(X)\text{--}\mathbf{Ens})^{\neq \emptyset}.$$

Démonstration. On définit un foncteur $P_X : \text{Aut}_{\mathcal{G}}(X)\text{--}\mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}^{\mathcal{G}}$ par

$$P_X(-) := \text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, -) \times_{\text{Aut}_{\mathcal{G}}(X)} (-).$$

(Le groupe $\text{Aut}_{\mathcal{G}}(X)$ agit naturellement à droite sur $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, Y)$.)

Puisque $\mathcal{G}$ est connexe, par hypothèse, pour $Y \in \text{Ob}\mathcal{G}$, $\exists f : X \rightarrow Y$ et l'application

$$\begin{aligned} \text{Aut}_{\mathcal{G}}(X) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}}(X, Y) \\ \alpha &\mapsto f \circ \alpha \end{aligned}$$

est une bijection de $\text{Aut}_{\mathcal{G}}(X)$ -ensembles à droite.

On vérifie (exercice) que les foncteurs e_X , P_X induisent une équivalence de catégories. □

5.7. Applications au groupoïde fondamental.

Théorème 5.38. Soit B un espace topologique, le foncteur $\Pi(-)$ induit

$$\text{Cov}/B \xrightarrow{\Pi(-)} (\text{GPD}/\Pi(B))^{\text{disc}, \neq \emptyset} \cong (\mathbf{Ens}^{\Pi(B)})^{\neq \emptyset}.$$

Si B est connexe par arcs et $b \in B$, alors le foncteur $e_b : (\mathbf{Ens}^{\Pi(B)})^{\neq \emptyset} \rightarrow (\text{Aut}_{\Pi(B)}(b)\text{--}\mathbf{Ens})^{\neq \emptyset}$ fournit un foncteur :

$$\text{Cov}/B \rightarrow (\text{Aut}_{\Pi(B)}(b)\text{--}\mathbf{Ens})^{\neq \emptyset}$$

qui envoie un revêtement $p : E \rightarrow B$ à la fibre $p^{-1}(b)$.

Démonstration. Une conséquence immédiate du Théorème 5.19, du Corollaire 5.35 et de la Proposition 5.37. Explicitement, le foncteur

$$\Phi : \text{Cov}/B \rightarrow \text{Ens}^{\Pi(B)}$$

est donné sur un revêtement $p : E \rightarrow B$ par $\Phi_p(b) := p^{-1}(b)$, la fibre au dessus de $b \in B$, et, pour $\alpha : I \rightarrow B$ un chemin de b à b' :

$$\begin{aligned} \Phi_p([\alpha]) : p^{-1}(b) &\rightarrow p^{-1}(b') \\ \eta &\mapsto \tilde{\alpha}_\eta(1) \end{aligned}$$

où $\tilde{\alpha}_\eta$ est le relèvement tel que $\tilde{\alpha}_\eta(0) = \eta$.

Exercice : vérifier explicitement que Φ_- est fonctoriel : si

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

est un morphisme de Cov/B , alors f induit une transformation naturelle $\Phi_f : \Phi_{p_1} \rightarrow \Phi_{p_2}$. $\square$

Théorème 5.39. *Soit B un espace localement connexe par arcs. Alors, le foncteur*

$$\Phi_- : \text{Cov}/B \rightarrow \text{Ens}^{\Pi(B)}$$

est pleinement fidèle.

Démonstration. On peut supposer que B est connexe et on peut réduire au cas des revêtements connexes (*Exercice :* pourquoi?). Alors, on utilise le théorème d'existence et d'unicité de relèvements (Théorème 5.21 et Proposition 5.16) ; l'existence d'un relèvement ne dépend que du groupoïde fondamental. $\square$

Remarque 5.40. L'action de $\text{Aut}_{\Pi(B)}(b)$ sur la fibre $p^{-1}(b)$ correspond à la *monodromie*. Rappel que le groupe fondamental est défini par $\pi_1(B, b) := \text{Aut}_{\Pi(B)}(b)^{\text{op}}$. Donc, le groupe $\pi_1(B, b)$ agit naturellement à droite sur $p^{-1}(b)$.

Explicitement, $\forall \eta \in p^{-1}(b)$, $[\alpha] \in \pi_1(B, b)$ représenté par un lacet α basé à b ,

$$\eta[\alpha] := \tilde{\alpha}_\eta(1),$$

où $\tilde{\alpha}_\eta$ est le chemin unique qui relève α et tel que $\tilde{\alpha}_\eta(0) = \eta$.

Corollaire 5.41. *Soient $p : E \rightarrow B$ un revêtement tel que E est connexe par arcs et $b \in B$.*

- (1) *L'action de $\pi_1(B, b)$ sur $p^{-1}(b)$ est transitive.*
- (2) *Soient $\eta \in p^{-1}(b)$ et $H_\eta \subset \pi_1(B, b)$ le stabilisateur de η (le sous-groupe des éléments g tels que $\eta g = \eta$) ; alors*

$$\begin{aligned} \pi_1(B, b) &\twoheadrightarrow p^{-1}(b) \\ g &\mapsto \eta g \end{aligned}$$

induit un isomorphisme de $\pi_1(B, b)$ -ensembles à droite :

$$H_\eta \backslash \pi_1(B, b) \cong p^{-1}(b).$$

- (3) *Soient $\zeta \in p^{-1}(b)$ et $\tilde{\gamma}$ un chemin de η vers ζ et $\gamma := p(\tilde{\gamma})$ le lacet dans B basé à b , alors $\zeta = \eta[\gamma]$ et*

$$H_\zeta = [\gamma]^{-1} * H_\eta * [\gamma].$$

Démonstration. Soient $\eta, \zeta \in p^{-1}(b)$, puisque E est connexe par arcs, il existe un chemin $\tilde{\gamma}$ de η vers ζ . Alors, l'image $\gamma := p(\tilde{\gamma})$ est un lacet dans B basé à b et, par définition de l'action de $\pi_1(B, b)$ sur $p^{-1}(b)$, $\zeta = \eta[\gamma]$ et donc l'action est transitive.

Les autres énoncés s'en découlent directement. (*Exercice.*) $\square$

Exercice 5.42. En utilisant la notation du Corollaire 5.41, montrer que

$$H_\eta = \text{Image}\{\pi_1(E, \eta) \rightarrow \pi_1(B, b)\}.$$

Théorème 5.43. Soient B un espace connexe et localement connexe par arcs et $p_1 : E_1 \rightarrow B$, $p_2 : E_2 \rightarrow B$ deux revêtements, tels que E_1, E_2 sont connexes par arcs et soient $e_1 \in p_1^{-1}(b)$, $e_2 \in p_2^{-1}(b)$ deux points ($b = p_1(e_1) = p_2(e_2)$).

Il existe un morphisme de revêtements $f : E_1 \rightarrow E_2$ tel que $f(e_1) = e_2$ si et seulement si

$$H_{e_1} \subset H_{e_2}$$

et, f est un isomorphisme si et seulement si $H_{e_1} = H_{e_2}$.

En particulier, soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement tel que E est connexe par arcs ; alors p est un revêtement Galoisien si et seulement si $\exists \eta \in p^{-1}(b)$ tel que $H_\eta \triangleleft \pi_1(B, b)$ est un sous-groupe normal (distingué) ; en ce cas, on a un isomorphisme de groupes :

$$\text{Aut}(p) \cong \pi_1(B, b)/H_\eta$$

Démonstration. Le premier point est une conséquence immédiate du théorème d'existence de relèvements, Théorème 5.21, en utilisant la conclusion de l'exercice 5.42.

Par définition, le revêtement $p : E \rightarrow B$ est Galoisien si et seulement si $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur $p^{-1}(b)$. Donc, par la première énoncé, p est Galoisien si et seulement si, $\forall \eta \in p^{-1}(b)$ et $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$, $H_\eta = H_{\eta[\gamma]}$.

Par le Corollaire 5.41, $H_{\eta[\gamma]} = [\gamma]^{-1} * H_\eta * [\gamma]$, donc cette condition est équivalente à la condition que, $\forall \eta \in p^{-1}(b)$, $H_\eta \triangleleft \pi_1(B, b)$ soit normal dans $\pi_1(B, b)$. Encore, il suffit de vérifier cette condition pour un seul point $e \in p^{-1}(b)$. $\square$

Remarque 5.44. Le théorème 5.43 est une version explicite du fait suivant :

— pour B un espace connexe et localement connexe par arcs et $b \in B$ un point, le foncteur

$$\begin{aligned} \text{Cov}/B &\rightarrow \text{Ens}-\pi_1(B, b) \\ (p : E \rightarrow B) &\mapsto p^{-1}(b) \end{aligned}$$

est pleinement fidèle.

Exercice 5.45. Soient G un groupe discret et H, K deux sous-groupes. Montrer qu'il existe un morphisme de G -ensembles à droite :

$$H \backslash G \rightarrow K \backslash G$$

si et seulement si H est sous-conjugué à K (il existe $g \in G$ tel que $H \leq g^{-1}Kg$).

Montrer que $|\text{Aut}_{\text{Ens-}G}(H \backslash G)| = |H \backslash G|$ si et seulement si $H \triangleleft G$ est un sous-groupe normal (distingué).

5.8. Revêtements Universels.

Définition 5.46. Un revêtement $p : E \rightarrow B$ est *universel* si E est simplement connexe.

Remarque 5.47. Attention : il existe des espace topologiques B qui n'admettent pas de revêtement universel !

Proposition 5.48. Soient B un espace localement connexe par arcs et $\tilde{p} : \tilde{B} \rightarrow B$ un revêtement universel.

- (1) Le revêtement $\tilde{p} : \tilde{B} \rightarrow B$ est Galoisien et, $\forall b \in B$, $\text{Aut}(\tilde{p}) \cong \text{Aut}_{\Pi(B)}(b)$.
- (2) Soient $p : E \rightarrow B$ un revêtement, $x \in \tilde{B}$ et $\eta \in p^{-1}(p(x))$. Alors $\exists$ un morphisme de revêtements unique

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} & \xrightarrow{f_{x, \eta}} & E \\ & \searrow \tilde{p} & \swarrow p \\ & B, & \end{array}$$

tel que $f_{(x,\eta)}(x) = \eta$.

(3) Tout endomorphisme du revêtement universel $\tilde{p}$ est un isomorphisme.

(4) Le revêtement universel est unique à isomorphisme près.

Démonstration. Par hypothèse, $\tilde{B}$ est connexe par arcs et $\forall \eta \in \tilde{B}$, $\pi_1(\tilde{B}, \eta) = \{e\}$, donc $H_\eta = \{e\}$, qui est un sous-groupe normal. Donc, par le Théorème 5.43, $\tilde{p}$ est Galoisien.

Le deuxième point est une conséquence immédiate de la propriété de relèvement des morphismes, Théorème 5.21.

Soit $f : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ un endomorphisme du revêtement universel. Choisir $\eta \in \tilde{B}$; il existe un morphisme de revêtements $g : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ tel que $g(f(\eta)) = \eta$. Par l'unicité des morphismes de revêtements, on déduit que $g \circ f$ est le morphisme identité et pareil pour $f \circ g$. Donc, f est un automorphisme.

L'unicité à isomorphisme (non canonique!) près d'un revêtement universel est une conséquence immédiate des points précédents. $\square$

Exercice 5.49. Soient $\tilde{B}_i \rightarrow B_i$, $i \in \{0, 1\}$, deux revêtements universels; montrer que $\tilde{B}_0 \times \tilde{B}_1 \rightarrow B_0 \times B_1$ est un revêtement universel.

Exemple 5.50.

(1) Le revêtement $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ est le revêtement universel de S^1 .

(2) Le revêtement universel du tore $S^1 \times S^1$ est $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ (prendre le quotient par $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

(3) Le revêtement universel de $\mathbb{R}P^2$ est $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$.

Définition 5.51. Un espace topologique B est *semi-localement simplement connexe* si, $\forall b \in B$, $\exists b \in U$ un voisinage ouvert de b tel que l'inclusion $U \hookrightarrow B$ induit le morphisme de groupes trivial

$$\pi_1(U, b) \xrightarrow{\{e\}} \pi_1(B, b).$$

(Autrement dit, tout lacet basé à b dans U est homotope dans B (rel ∂I) au lacet constant à b .)

Exercice 5.52. Soit $b \in U \subset B$ un voisinage ouvert tel que $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ est le morphisme trivial. Montrer que, $\forall b \in V \subset U$, voisinage ouvert, $\pi_1(V, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ est le morphisme trivial.

Proposition 5.53. Soit B un espace topologique localement connexe par arcs. S'il existe un revêtement universel $\tilde{p} : \tilde{B} \rightarrow B$, alors B est semi-localement simplement connexe.

Démonstration. Soit $b \in B$; puisque p est un revêtement, il existe un voisinage ouvert $b \in U$ tel que $p^{-1}U \rightarrow U$ est trivial et U est connexe. Soit α un lacet dans U basé à b ; il existe un lacet $\tilde{\alpha}$ dans $\tilde{B}$ qui relève α puisque U est trivialisant et connexe. L'espace $\tilde{B}$ est simplement connexe, donc $\tilde{\alpha}$ est homotope dans $\tilde{B}$ (relativement à ∂I) au lacet constant par une homotopie H . En composant H avec $\tilde{p}$, on obtient une homotopie pointée $p \circ H$ dans B entre α et le lacet constant. $\square$

5.9. Existence du revêtement universel. On utilise la conséquence élémentaire suivante de la propriété *semi-localement simplement connexe* :

Lemme 5.54. Soient B un espace topologique et $U \subset B$ un voisinage de $b \in B$ tel que $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ est le morphisme trivial. Alors, l'image de $[\gamma] \in \text{Hom}_{\Pi(U)}(b, u)$ dans $\text{Hom}_{\Pi(B)}(b, u)$ ne dépend que de $u \in U$.

Démonstration. Soient γ, γ' deux chemins dans U de b vers u , donc $\gamma' = \lambda \cdot \gamma$, pour λ un lacet dans U basé à b . Par l'hypothèse, λ est homotope dans B relativement à ∂I au lacet constant c_b . Donc $[\gamma]_B = [\gamma']_B$ dans $\Pi(B)$. $\square$

Lemme 5.55. Soient $(B, *)$ un espace pointé et $b \in U_b \subset B$ un voisinage ouvert de b tel que U_b est connexe par arcs et $\pi_1(U_b, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ est le morphisme trivial.

Alors, l'application

$$\begin{aligned} \coprod_{u \in U_b} \text{Hom}_{\Pi(B)}(*, u) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\Pi(B)}(*, b) \times U_b \\ [\alpha] &\mapsto ([\alpha \cdot \gamma_{u,b}], \alpha(1)) \end{aligned}$$

est bien définie, où $\gamma_{u,b}$ est un chemin dans U de u vers b , et est une bijection.

Démonstration. L'hypothèse que U es connexe par arcs entraîne que, $\forall u, b \in U$, il existe un chemin $\gamma_{u,b}$ de u vers b dans U . Le lemme 5.54 montre que l'application est bien définie (indépendante du choix de $\gamma_{u,b}$, par l'hypothèse sur π_1).

Le fait que l'application est une bijection se vérifie sans difficulté. $\square$

Théorème 5.56. Soit B un espace connexe, localement connexe par arcs. Alors, B admet un revêtement universel si et seulement si B est semi-localement simplement connexe.

Démonstration. Par la Proposition 5.53, si B admet un revêtement universel, alors B est semi-localement simplement connexe. Donc, il ne reste que d'établir la réciproque.

Fixons un point de base $* \in B$. L'ensemble sous-jacent de $\tilde{B}$ est l'ensemble $\coprod_{b \in B} \text{Hom}_{\Pi(B)}(*, b)$, muni de la projection $p : \tilde{B} \rightarrow B$ donnée par $p[\alpha] = \alpha(1)$. Ainsi, la fibre $p^{-1}(b)$ est l'ensemble $\text{Hom}_{\Pi(B)}(*, b)$.

L'espace B admet une base $\mathcal{U}$ formée de parties ouvertes $V \subset B$, tel que V est connexe par arcs, et $\pi_1(V, v) \rightarrow \pi_1(B, v)$ est le morphisme trivial $\forall v \in V$. Alors, par le Lemme 5.55, la pré-image $p^{-1}V$ pour $v \in V \in \mathcal{U}$ est en bijection avec l'ensemble

$$\text{Hom}_{\Pi(B)}(*, v) \times V.$$

On définit, pour $[\alpha] \in \text{Hom}_{\Pi(B)}(*, v)$, la partie $V_{[\alpha]} \subset p^{-1}V$ qui correspond à

$$[\alpha] \times V \subset \text{Hom}_{\Pi(B)}(*, v) \times V.$$

On vérifie sans difficulté que :

- (1) $\{V_{[\alpha]}\}$ définit une base d'une topologie sur $\tilde{B}$;
- (2) le application p est continue;
- (3) l'application p est un revêtement;
- (4) $\tilde{B}$ est connexe par arcs.

Ces propriétés impliquent que $\tilde{B} \rightarrow B$ est le revêtement universel. $\square$

5.10. Revêtements quotients.

Définition 5.57. Soit G un groupe discret qui agit à gauche sur $X \in \text{Ob}\mathfrak{T}$. L'action est *totalelement discontinue* si, $\forall x \in X$, $\exists$ un voisinage ouvert $x \in U_x$ tel que $gU_x \cap U_x \neq \emptyset$ si et seulement si $g = e$.

Remarque 5.58. Si l'action $G \times X \rightarrow X$ est totalement discontinue, elle est *libre* ($\forall x \in X$, $G \rightarrow X$, $g \mapsto gx$ est une inclusion).

Proposition 5.59. Soit G un groupe discret agissant de façon totalement discontinue sur $X \in \text{Ob}\mathfrak{T}$. Alors le morphisme quotient

$$q : X \twoheadrightarrow G \backslash X$$

est un revêtement, de fibre G .

Si X est connexe par arcs, alors q est un revêtement Galoisien.

Démonstration. Par construction, l'application q est continue.

Soient $x \in X$ et $\bar{x}$ son image dans $G \backslash X$. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert $U_x \in U_x$ tel que $gU_x \cap U_x \neq \emptyset$ si et seulement si $g = e$. Alors

$$q^{-1}(q(U_x)) = \Pi_{g \in G} g(U_x)$$

et $g(U_x) \cong U_x$ est un homéomorphisme (induit par l'action du groupe G). En particulier, q est un revêtement.

Par construction, $G \subset \text{Aut}(q)$ est un sous-groupe et le groupe G agit transitivement sur les fibres. Donc, si X est connexe par arcs, le revêtement $q : X \rightarrow G \backslash X$ est Galoisien. $\square$

Exemple 5.60. Soit $p : \tilde{B} \rightarrow B$ un revêtement universel, où B est localement connexe par arcs. Le groupe $\pi_1(B, b)$ agit à gauche sur $\tilde{B}$ et cette action est totalement discontinue.

Le revêtement Galoisien :

$$\tilde{B} \rightarrow \pi_1(B, b) \backslash \tilde{B}$$

est isomorphe au revêtement p .

5.11. Classification de revêtements.

Théorème 5.61. Soit B un espace connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors, $\forall b \in B$, le foncteur

$$\begin{aligned} \text{Cov}/B &\rightarrow (\text{Ens} - \pi_1(B, b))^{\neq \emptyset} \\ (p : E \rightarrow B) &\mapsto p^{-1}(b) \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. On définit un foncteur

$$\begin{aligned} \text{Ens} - \pi_1(B, b) &\rightarrow \text{Cov}/B \\ F &\mapsto E_F := F \times_{\pi_1(B, b)} \tilde{B}, \end{aligned}$$

où E_F est muni de la projection $p_F : E_F \rightarrow B$ induit par $F \rightarrow *$ (en utilisant l'Exemple 5.60).

Exercice : montrer que $p_F : E_F \rightarrow B$ est un revêtement de fibre F .

Ainsi, par construction, la composition $\text{Ens} - \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Cov}/B \rightarrow \text{Ens} - \pi_1(B, b)$ est naturellement isomorphe au foncteur identité.

Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement ; on vérifie (*Exercice !*) que la propriété universelle du revêtement universel fournit un isomorphisme de revêtements :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(b) \times_{\pi_1(B, b)} \tilde{B} & \xrightarrow{\quad} & E \\ & \searrow & \downarrow p \\ & & B. \end{array}$$

Ceci établit le théorème. $\square$

Exemple 5.62. Soit B un espace connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Un revêtement $p : E \rightarrow B$ est connexe si et seulement si $p^{-1}(b)$ est un $\pi_1(B, b)$ -ensemble transitif $\Leftrightarrow p^{-1}(b) \cong H_p \backslash \pi_1(B, b)$, $H_p \leq \pi_1(B, b)$ un sous-groupe. (Rappeler que le sous-groupe H_p est bien défini à conjugaison près.)

Ce sous-groupe donne lieu au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{B} & \xrightarrow{\quad} & H_p \backslash \tilde{B} & \xrightarrow{\cong} & E \\ & \searrow \tilde{p} & \downarrow & \searrow p & \\ & & B & & \end{array}$$

où $\tilde{B} \rightarrow H_p \backslash \tilde{B}$ est Galoisien de groupe H_p et $H_p \backslash \tilde{B} \rightarrow B$ est le revêtement associé au $\pi_1(B, b)$ -ensemble $p^{-1}b$, puisque

$$H_p \backslash \pi_1(B, b) \times_{\pi_1(B, b)} \tilde{B} \cong H_p \backslash \tilde{B}.$$

En outre :

- (1) l'image de $\pi_1(H_p \backslash \tilde{B}, *) \hookrightarrow \pi_1(B, b)$, pour $*$ le point qui correspond au chemin constant, est le sous-groupe $H_p \leq \pi_1(B, b)$;
- (2) le revêtement $p : E \rightarrow B$ est Galoisien si et seulement si $H_p \triangleleft \pi_1(B, b)$ est un sous-groupe distingué.

5.12. Classification via le groupoïde fondamental. Si l'espace B n'est pas connexe, il convient d'utiliser le groupoïde fondamental.

Théorème 5.63. *Soit B un espace localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors le foncteur*

$$\text{Cov}/B \xrightarrow{\Pi(\cdot)} (\text{GPD}/\Pi(B))^{\text{disc}, \neq \emptyset}$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. On définit un foncteur (quasi)inverse $\mathcal{E} : (\text{GPD}/\Pi(B))^{\text{disc}, \neq \emptyset} \rightarrow \text{Cov}/B$ de la manière suivante.

Soit $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \Pi(B)$ un objet de $(\text{GPD}/\Pi(B))^{\text{disc}, \neq \emptyset}$; on prend l'application d'ensembles $p_{\mathcal{G}} : E_{\mathcal{G}} \rightarrow B$, où $E_{\mathcal{G}} := \text{Ob}\mathcal{G}$. On construit une sous-base d'une topologie sur $E_{\mathcal{G}}$ de sorte que $p_{\mathcal{G}}$ soit un revêtement. Soit $b \in B$, il existe $U \subset B$ une partie ouverte connexe par arcs telle que $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ est le morphisme trivial. On démontre que $p_{\mathcal{G}}^{-1}(U) \cong \text{Ob}\mathcal{G}_b \times U$.

Il existe une bijection $\text{Ob}\mathcal{G}_b \times U \rightarrow p_{\mathcal{G}}^{-1}U$, $(\eta, u) \mapsto \text{but}(\tilde{\alpha}_{\eta, u})$ où $\tilde{\alpha}_{\eta, u}$ est le chemin unique dans $\mathcal{G}$ de source η et qui relève un chemin $\alpha \in \text{Hom}_{\Pi(B)}(b, \psi(u))$. L'application est bien définie, car à cause de l'hypothèse sur U , la définition ne dépend pas du choix de α . Il est facile de vérifier qu'elle est une bijection.

On prend comme base pour $E_{\mathcal{G}}$ l'ensemble des parties $U_{\eta} := \text{image}\{(\eta \times U) \subset \text{Ob}\mathcal{G} \times U \rightarrow p_{\mathcal{G}}^{-1}U$. On vérifie facilement que ceci est une base, donc définit une topologie sur $E_{\mathcal{G}}$. Par construction, $p_{\mathcal{G}} : E_{\mathcal{G}} \rightarrow B$ est un revêtement.

Si $\mu : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ est un morphisme de groupoïdes au dessus de $\Pi(B)$, alors μ induit un morphisme de revêtements :

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathcal{G}_1} & \xrightarrow{\quad \mu \quad} & E_{\mathcal{G}_2} \\ & \searrow p_{\mathcal{G}_1} & \swarrow p_{\mathcal{G}_2} \\ & B, & \end{array}$$

qui complète la définition du foncteur. (*Exercice.*)

Il est évident que la composition

$$(\text{GPD}/\Pi(B))^{\text{disc}, \neq \emptyset} \rightarrow \text{Cov}/B \rightarrow (\text{GPD}/\Pi(B))^{\text{disc}, \neq \emptyset}$$

est isomorphe à l'identité.

Pour la réciproque, on utilise le fait que, si $p : E \rightarrow B$ est un revêtement et $U \subset B$ est une partie ouverte connexe par arcs telle que $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ est le morphisme trivial, alors $p^{-1}(U) \rightarrow U$ est un revêtement trivial. Ainsi, la topologie sur E coïncide avec la topologie construite à partir de $\Pi(E) \rightarrow \Pi(B)$. $\square$

6. HOMOLOGIE

6.1. Suites exactes. Dans cette section, on dénote par $\mathcal{A}$ la catégorie des groupes abéliens.

Remarque 6.1. On pourrait remplacer $\mathcal{A}$ par n'importe quelle *catégorie abélienne* (ici, on n'a pas besoin de connaître la définition d'une catégorie abélienne). Par exemple, pour R un anneau commutatif, on peut considérer la catégorie des R -modules à gauches et des morphismes de R -modules.

Rappeler que le *noyau* $\ker(f)$ d'un morphisme $f : M \rightarrow N$ est l'ensemble des éléments $x \in M$ tel que $f(x) = 0$. On peut définir $\ker(f)$ comme le produit fibré du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N. \end{array}$$

Exercice 6.2. Formuler la propriété universelle de $\text{Ker}(f) \rightarrow M$.

L'image de f est $\{y \in N \mid \exists x \in M \text{ t.q. } f(x) = y\}$; il existe un isomorphisme canonique $\text{image}(f) \cong M/\ker(f)$.

Définition 6.3. Soient $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q$ deux morphismes de $\mathcal{A}$.

- (1) $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q$ est une *suite* si $g \circ f = 0$ ($\Leftrightarrow \text{image}(f) \leq \ker(g)$);
- (2) si $g \circ f = 0$, elle est une *suite exacte* (sous-entendu à N) si $\text{image}(f) = \ker(g)$.

Soient $f_n : M_n \rightarrow M_{n+1}$ un ensemble de morphismes de $\mathcal{A}$, indexé par $\mathbb{Z}$; il est une *suite* (respectivement une *suite exacte*) si et seulement chaque $M_{n-1} \rightarrow M_n \rightarrow M_{n+1}$ est une suite (resp. suite exacte).

Remarque 6.4. Une suite $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q$ est exacte si et seulement si $H = 0$, où $H := \ker(g)/\text{image}(f)$.

Définition 6.5. Une *suite exacte courte* dans $\mathcal{A}$ est une suite exacte de la forme :

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \rightarrow 0.$$

Remarque 6.6. Si $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \rightarrow 0$ est une suite exacte courte, on considère que N est construit à partir des objets M et Q .

Exemple 6.7.

- (1) Soit $A \hookrightarrow B$ un monomorphisme de $\mathcal{A}$; alors

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B/A \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte.

- (2) Soit $q : B \twoheadrightarrow Q$ une surjection de $\mathcal{A}$, alors

$$0 \rightarrow \ker(q) \rightarrow B \rightarrow Q \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte.

- (3) Soient $A_1, A_2 \in \text{Ob}\mathcal{A}$, alors

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_2 \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte.

- (4) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte de groupes abéliens.

6.2. Homologie : approche axiomatique. Une *théorie d'homologie* est une suite de foncteurs

$$h_n : \mathfrak{T} \rightarrow \mathcal{A}$$

($n \in \mathbb{Z}$) qui satisfait quelques axiomes.

Définition 6.8. Soit $\mathfrak{T}^{[2]}$ la catégorie des *paires d'espaces topologiques*, dont les objets sont les couples $(X, A \subset X)$; un morphisme $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une application continue telle que $f(A) \subset B$.

Le foncteur $\iota : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T}^{[2]}$ est défini par $\iota(X) := (X, \emptyset)$ et le foncteur κ par

$$\begin{aligned} \kappa : \mathfrak{T}^{[2]} &\rightarrow \mathfrak{T}^{[2]} \\ (X, A) &\mapsto (A, \emptyset). \end{aligned}$$

Définition 6.9. Une *théorie d'homologie* (additive) est la donnée d'une suite de foncteurs

$$h_n : \mathfrak{T}^{[2]} \rightarrow \mathcal{A}$$

et de transformations naturelles $\partial_n : h_n \rightarrow h_{n-1} \circ \kappa$ ($n \in \mathbb{Z}$) tels que

- (1) *invariance par homotopie* : si $f_0 \sim f_1$ dans $\mathfrak{T}^{[2]}$, alors $h_n(f_0) = h_n(f_1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;
- (2) *exactitude* : $\forall (X, A) \in \text{Ob} \mathfrak{T}^{[2]}$, les morphismes naturels forment une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow h_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_n} h_n(A, \emptyset) \rightarrow h_n(X, \emptyset) \rightarrow h_n(X, A) \rightarrow \dots;$$

- (3) *excision* : soit $(X, A) \in \text{Ob} \mathfrak{T}^{[2]}$ et $U \subset X$ tel que $\overline{U} \subset A^\circ$, alors l'inclusion $X \setminus U \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme

$$h_n(X \setminus U, A \setminus U) \cong h_n(X, A)$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$;

- (4) *additivité* : soit $\{(X_j, A_j) | j \in \mathcal{J}\}$ une famille d'objets de $\mathfrak{T}^{[2]}$, alors le morphisme canonique

$$\bigoplus_{j \in \mathcal{J}} h_n(X_j, A_j) \rightarrow h_n(\coprod_{j \in \mathcal{J}} X_j, \coprod_{j \in \mathcal{J}} A_j)$$

est un isomorphisme $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6.10. Montrer que les axiomes d'exactitude et d'excision entraînent la propriété d'additivité lorsque $\mathcal{J}$ est un ensemble fini.

Définition 6.11. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est une *équivalence faible* si, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in X$, l'application

$$\pi_n(f) : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$$

est une bijection. (Pour un espace pointé (X, x) , $\pi_n(X, x)$ est l'ensemble des classes d'homotopie pointée des applications pointées continues $(S^n, *) \rightarrow (X, x)$.)

Définition 6.12. Une théorie d'homologie h_n

- (1) satisfait l'axiome *dimension* si

$$h_n(*, \emptyset) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (2) satisfait l'axiome des *équivalences faibles* si, $\forall f : X \rightarrow Y$ équivalence faible, $h_n(f)$ est un isomorphisme. (Cet axiome est plus fort que l'axiome des équivalences d'homotopie.)

Remarque 6.13. Les axiomes des définitions 6.9 et 6.12 sont les *axiomes d'Eilenberg-Steenrod*. Ces axiomes *déterminent* la théorie d'homologie singulière à isomorphisme près.

On va *construire* cette théorie d'homologie. Pour l'instant, on suppose qu'elle existe.

Proposition 6.14. *Soit h_* une théorie d'homologie qui satisfait les axiomes d'Eilenberg-Steenrod. Alors $h_0(S^0, \emptyset) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et $h_n(S^0, \emptyset) = 0$ si $n \neq 0$ et, pour $d > 0$:*

$$h_n(S^d, \emptyset) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n \in \{0, d\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Le cas de S^0 est une conséquence immédiate des axiomes d'additivité et dimension. On démontre le résultat par récurrence pour $d > 0$, à l'aide de la suite exacte longue et les axiomes d'excision et d'homotopie.

Soient $H \subset S^d$ une hémisphère (fermée dans S^d) et $U \subset H$ une partie ouverte telle que $H \setminus U \cong S^{d-1} \times I$ (et $\overline{U} \subset H^\circ$). Alors, $(S^d \setminus U, H \setminus U) \subset (S^d, H)$ satisfait l'hypothèse de l'axiome d'excision et $(S^d \setminus U, H \setminus U) \simeq (CS^{d-1}, S^{d-1})$.

La suite exacte longue pour (S^d, H) donne

$$\dots \rightarrow h_n(H, \emptyset) \rightarrow h_n(S^d, \emptyset) \rightarrow h_n(S^d, H) \rightarrow h_{n-1}(H, \emptyset) \rightarrow \dots$$

et H est contractile, donc $h_n(H, \emptyset) = 0$ pour $n > 0$. Alors, pour calculer $h_n(S^d, \emptyset)$, il suffit de calculer $h_n(S^d, H)$. Par l'axiome d'excision et l'axiome d'homotopie, ce groupe est isomorphe à $h_n(CS^{d-1}, S^{d-1})$. La suite exacte longue donne :

$$\dots \rightarrow h_n(S^{d-1}, \emptyset) \rightarrow h_n(CS^{d-1}, \emptyset) \rightarrow h_n(CS^{d-1}, S^{d-1}) \rightarrow h_{n-1}(S^{d-1}, \emptyset) \rightarrow \dots$$

et CS^{d-1} est contractile, donc $h_j(CS^{d-1}, \emptyset) = 0$ si $j > 0$.

Pour $d = 1$, les seuls groupes non-triviaux apparaissent dans la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & h_1(I, S^0) & \longrightarrow & h_0(S^0, \emptyset) & \longrightarrow & h_0(I, \emptyset) & \longrightarrow & h_0(I, S^0) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & h_1(I, S^0) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & h_0(I, S^0) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Le morphisme $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ est surjective, donc on déduit que $h_1(I, S^0) \cong \mathbb{Z}$ et $h_0(I, S^0) \cong 0$.

Pour le cas $d > 1$, si $n > 1$ la suite exacte longue donne une suite exacte

$$0 \rightarrow h_n(CS^{d-1}, S^{d-1}) \rightarrow h_{n-1}(S^{d-1}, \emptyset) \rightarrow 0$$

et donc un isomorphisme $h_n(CS^{d-1}, S^{d-1}) \cong h_{n-1}(S^{d-1}, \emptyset)$.

Pour $n = 1$, la suite exacte donne

$$0 \rightarrow h_1(CS^{d-1}, S^{d-1}) \rightarrow h_0(S^{d-1}, \emptyset) \xrightarrow{\cong} h_0(CS^{d-1}, \emptyset)$$

ce qui montre que $h_1(CS^{d-1}, S^{d-1}) = 0$. □

Remarque 6.15. Cette proposition démontre que les sphères S^m , S^n n'ont pas le même type d'homotopie si $m \neq n$. De même, $S^n \hookrightarrow CS^n$ ne peut pas admettre un rétracte.

Définition 6.16. Le *degré* d'une application continue $f : S^n \rightarrow S^n$ ($n \geq 1$) est l'entier $\deg f$ tel que

$$h_n(f) : h_n(S^n, \emptyset) \cong \mathbb{Z} \rightarrow h_n(S^n, \emptyset) \cong \mathbb{Z}$$

est multiplication par n (où h_n satisfait les axiomes d'Eilenberg-Steenrod).

Remarque 6.17. Le degré d'une application continue (pointée) $f : S^n \rightarrow S^n$ détermine sa classe d'homotopie pointée, donc le degré est un invariant important.

Exercice 6.18.

- (1) Soient $f : X \rightarrow Y$ une application continue et C_f son cône. Pour h_* une théorie d'homologie, montrer qu'il existe une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow h_n(X, \emptyset) \xrightarrow{h_n(f)} h_n(Y, \emptyset) \rightarrow h_n(C_f, *) \rightarrow \dots$$

- (2) L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^2$ est homotope au cône d'une application $S^3 \xrightarrow{\eta} S^2$. Calculer l'homologie $h_*(\mathbb{C}P^2, \emptyset)$ (où h_* satisfait les axiomes d'Eilenberg-Steenrod).
- (3) Soit SX la suspension (non-réduite) d'un espace topologique X (donc SX est le cône de l'inclusion $X \hookrightarrow CX$ du base). Calculer $h_*(SX, \emptyset)$ en termes de $h_*(X, \emptyset)$.

6.3. Complexes de chaînes.

Définition 6.19.

- (1) Un complexe (ou complexe de chaînes) est la donnée d'un ensemble $\{C_n | n \in \mathbb{Z}\}$ d'objets de $\mathcal{A}$, et d'un ensemble de morphismes (la différentielle) $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ tels que, pour tout n , le diagramme

$$C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1}$$

est une suite (c'est à dire que $d_n \circ d_{n+1} = 0$).

Le complexe de chaînes sera dénoté par (C_*, d) ou simplement C lorsqu'il n'y a aucun danger de confusion.

- (2) Un morphisme de complexes de chaînes, $\varphi : C \rightarrow D$, est une suite de morphismes $\varphi_n : C_n \rightarrow D_n$, $n \in \mathbb{Z}$, telle que chaque carré

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \\ \varphi_n \downarrow & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{d_n} & D_{n-1} \end{array}$$

est commutatif.

Remarque 6.20. On considérera également des complexes de chaînes indexés par $\mathbb{N}$; en ce cas, on pose $C_n = 0$ pour $n < 0$.

Proposition 6.21. *Les complexes de chaînes dans la catégorie abélienne $\mathcal{A}$ et leurs morphismes forment une catégorie dénotée $\mathfrak{Ch}(\mathcal{A})$.*

Les complexes de chaînes indexés par $\mathbb{N}$ forment une sous-catégorie pleine $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ de $\mathfrak{Ch}(\mathcal{A})$.

Démonstration. Exercice. □

Remarque 6.22. Pour construire l'homologie singulière, on va définir un foncteur

$$\mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{Ch}(\mathcal{A})$$

où $\mathcal{A}$ est la catégorie des groupes abéliens.

6.4. Homologie d'un complexe de chaînes. L'homologie mesure le défaut d'exactitude d'un complexe de chaînes.

Définition 6.23. Soient (C_*, d) un complexe de chaînes et n un entier.

- (1) Le sous-objet des n -cycles $Z_n \subset C_n$, est le noyau de $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$.
- (2) Le sous-objet des n -bords, $B_n \subset C_n$, est l'image du morphisme $d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n$.

Lorsqu'on souhaite préciser le complexe, on écrira $Z_n(C)$ ou Z_n^C (respectivement $B_n(C)$ ou B_n^C).

Lemme 6.24. Soit (C_*, d) un complexe de chaînes. Alors, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $B_n \subset Z_n \subset C_n$.

Démonstration. Découle directement du fait que la composition $d_n \circ d_{n+1}$ est triviale. $\square$

Définition 6.25. Soit (C_*, d) un complexe de chaînes. Le n -ième objet d'homologie de (C_*, d) est le quotient

$$H_n(C_*, d) := Z_n / B_n.$$

Remarque 6.26. Soit (C_*, d) un complexe, alors le n -ième objet d'homologie est trivial si et seulement si la suite

$$C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1}$$

est exacte à C_n .

Proposition 6.27. Le n -ième objet d'homologie $H_n(-)$ définit un foncteur

$$H_n : \mathfrak{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier qu'un morphisme de complexes de chaînes $\varphi : C \rightarrow D$ induit un morphisme $H_n(\varphi) : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ de manière naturelle.

On vérifie que le morphisme $\varphi_n : C_n \rightarrow D_n$ se restreint à des morphismes $Z_n(C) \rightarrow Z_n(D)$ et $B_n(C) \rightarrow B_n(D)$. Le morphisme $H_n(\varphi)$ est donné par le passage au quotient. $\square$

Définition 6.28. Un morphisme $f : C \rightarrow D$ est une *équivalence d'homologie* si, pour tout entier n , le morphisme $H_n(f)$ induit en homologie est un isomorphisme.

Remarque 6.29. La catégorie dérivée $\mathcal{D}\mathcal{A}$ est obtenue à partir de la catégorie $\mathfrak{Ch}(\mathcal{A})$ en inversant les équivalences d'homologie. Cependant (surtout si on considère les complexes non-bornés), ce processus de *localisation* de la catégorie $\mathfrak{Ch}(\mathcal{A})$ est délicat.

6.5. Homotopie de chaînes.

Définition 6.30. Soient $f, g : C \rightrightarrows D$ deux morphismes entre complexes de chaînes. Une *homotopie de chaînes* de f vers g est la donnée d'un ensemble de morphismes $\{h_n : C_n \rightarrow D_{n+1} | n \in \mathbb{Z}\}$, tel que $f_n - g_n = d_{n+1}^D \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n^C$.

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{d_n^C} & C_{n-1} \\ h_n \swarrow & \downarrow f_n & \searrow g_n \\ D_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^D} & D_n \end{array}$$

Deux morphismes $f, g : C \rightrightarrows D$ sont homotopes s'il existe une homotopie de chaînes entre les morphismes (on écrira $f \sim g$ et, lorsqu'on souhaite préciser l'homotopie h , $f \sim_h g$).

Proposition 6.31.

- (1) La relation $\sim$ d'homotopie entre morphismes de complexes de chaînes de C à D est une relation d'équivalence.
- (2) Soient $f, g : C \rightrightarrows D$ deux morphismes de complexes de chaînes qui sont homotopes, alors les morphismes $H_*(f), H_*(g) : H_*(C) \rightrightarrows H_*(D)$ coïncident.

Démonstration.

- (1) Exercice.
- (2) Soit c un cycle de C_n ; alors $f(c) - g(c) = d_{n+1}(h_n(c))$, puisque $d_n(c) = 0$. En particulier, les cycles $f(c), g(c)$ représentent la même classe d'homologie. $\square$

Définition 6.32. Deux complexes de chaînes C, C' ont le même type d'homotopie s'il existe morphismes de complexes de chaînes $f : C \rightarrow C'$ et $g : C' \rightarrow C$ tels que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient homotopes respectivement à 1_C et à $1_{C'}$. On écrira $C \simeq C'$.

Proposition 6.33. La relation $\simeq$ sur $\mathfrak{Ch}(A)$ est une relation d'équivalence.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 6.34. Soit $n > 0$ un entier. Il y a un morphisme de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{n} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

qui est une équivalence d'homologie.

Cependant, les complexes de chaînes n'ont pas le même type d'homotopie, car il n'existe *aucun* morphisme non-trivial dans l'autre sens. Ainsi, la classe des équivalences d'homotopie est incluse proprement dans la classe des équivalences d'homologie.

Remarque 6.35. Un complexe de chaînes (C_*, d) est homotopiquement trivial (c'est à dire que $C \simeq 0$) s'il existe une homotopie de chaînes entre 1_C et le morphisme 0, c'est à dire la donnée d'un ensemble de morphismes $\{h_n : C_n \rightarrow C_{n+1} | n \in \mathbb{Z}\}$ tel que

$$1_{C_n} = d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n.$$

Si (C_*, d) est homotopiquement trivial, alors $H_*(C_*, d) = 0$. En particulier, pour montrer qu'un complexe est *acyclique* (que son homologie est triviale), il suffit de trouver une homotopie de chaînes de cette forme.

6.6. La suite exacte longue associée à une suite exacte courte de complexes.

Définition 6.36. Une *suite exacte courte de complexes* de chaînes est une suite de morphismes de complexes de chaînes $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ telle que, pour tout entier n ,

$$0 \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte.

Théorème 6.37. Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ une suite exacte courte de complexes de chaînes, alors il existe une suite exacte longue en homologie

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

Le morphisme $\partial_n : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ s'appelle le *morphisme connectant*; il est naturel par rapport aux morphismes de suites exacte courte de complexes.

Démonstration. Définissons d'abord le morphisme connectant ∂_n . Soit $[z] \in H_n(C)$ une classe d'homologie représentée par un cycle $z \in Z_n(C)$; le morphisme $g_n : B_n \rightarrow C_n$ étant surjectif par hypothèse, il existe $y \in B_n$ tel que $z = g_n(y)$. Le bord $dy \in B_{n-1}$ appartient au noyau du morphisme $g_{n-1} : B_{n-1} \rightarrow C_{n-1}$, donc appartient à l'image de $f_{n-1} : A_{n-1} \hookrightarrow B_{n-1}$; écrivons x pour l'élément de A_{n-1} tel que $f_{n-1}(x) = dy$. On vérifie que x est un cycle dans $Z_{n-1}(A)$ car $f_{n-2}dx = d(f_{n-1}(x)) = ddy = 0$ et f_{n-2} est injectif, donc on peut poser $\partial_n[z] := [x] \in H_{n-1}(A)$. La vérification que $\partial_n[z]$ ne dépend pas du choix de z ni du choix de y ne pose aucune difficulté.

Exactitude à $H_n(A)$: il faut démontrer que $H_{n+1}(C) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B)$ est exacte. Le fait que la composition est triviale peut être établi sans difficulté. Supposer que la classe $[a] \in H_n(A)$, représenté par un n -cycle $a \in Z_n(A)$, est dans

le noyau de $H_n(f)$; alors $f_n(a)$ est un n -bord, donc il existe $y \in B_{n+1}$ tel que $f_n(a) = dy$. Alors, on observe que $[a] = \partial_{n+1}[g_{n+1}(y)]$, donc $[a]$ appartient à l'image du connectant.

Exactitude à $H_n(B)$: il faut établir que $H_n(A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C)$ est exacte; il est évident que la composition de ces morphismes est triviale. Soit $b \in Z_n(B)$ un cycle qui représente une classe $[b]$ dans le noyau de $H_n(g)$. Alors il existe $c \in C_{n+1}$ tel que $g_n(b) = dc$. Par surjectivité de g_{n+1} , il existe $b' \in B_{n+1}$ tel que $c = g_{n+1}(b')$. Alors $b - db' \in Z_n(B)$ représente $[b]$ et $g_n(b - db') = 0$, par le choix de b' . Donc, il existe $a \in A_n$ tel que $b - db' = f_n(a)$. L'injectivité de $f_{n-1} : A_{n-1} \hookrightarrow B_{n-1}$ montre que a est un n -cycle. On en déduit que $[b] = H_n(f)[a]$.

Exactitude à $H_n(C)$: il faut démontrer que $H_n(B) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C) \xrightarrow{\partial_3} H_{n-1}(A)$ est exacte; la vérification que la composition est triviale est laissée au soin du lecteur. Soit $z \in Z_n(C)$ tel que $\partial_n[z] = 0$. Alors, en utilisant les éléments x, y construits lors de la définition de $\partial_n[z]$, l'élément $x \in A_{n-1}$ s'écrit comme dx' , $x' \in A_n$. L'élément $y - f_n(x')$ est un cycle dans $Z_n(B)$ tel que $g_n(y - f_n(x')) = z$. Donc $[z] = H_n(g)[y - f_n(x')]$ appartient à l'image de $H_n(g)$. $\square$

6.7. Objets (co)simpliciaux. Rappel de la Définition 1.5 que la catégorie Δ des *ordinaux* est la catégorie ayant pour objets $\{[n] | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ et morphismes : $\text{Hom}_\Delta([m], [n])$ l'ensemble des applications $f : \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ telles que $i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$.

En particulier, on a les générateurs :

- (1) $\varepsilon_i : [n-1] \rightarrow [n]$, $0 \leq i \leq n$:

$$\varepsilon_i(j) = \begin{cases} j & j < i \\ j+1 & j \geq i; \end{cases}$$

- (2) $\sigma_i : [n] \rightarrow [n-1]$, $0 \leq i \leq n$:

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} j & j \leq i \\ j-1 & j > i. \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \sigma_0 \searrow \quad \swarrow \sigma_1 \searrow \quad \swarrow \sigma_2 \searrow \\ [0] \xrightarrow{\varepsilon_0} [1] \xrightarrow{\varepsilon_1} [2] \xrightarrow{\varepsilon_2} [3] \dots \end{array}$$

Exercice 6.38. Vérifier les *relations cosimpliciales* :

- (1) $\varepsilon_j \varepsilon_i = \varepsilon_i \varepsilon_{j-1}$, $i < j$;
(2) $\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1}$, $i \leq j$;
(3) $\sigma_j \varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon_i \sigma_{j-1} & i < j \\ \text{id} & i = j, i = j+1 \\ \varepsilon_{i-1} \sigma_j & i > j+1. \end{cases}$

Remarque 6.39. La catégorie Δ est engendrée par les morphismes ε_i , σ_j , sujet aux relations cosimpliciales.

Définition 6.40. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

- (1) La *catégorie des objets cosimpliciaux* de $\mathcal{C}$ est la catégorie $\Delta \mathcal{C}$ des foncteurs de Δ vers $\mathcal{C}$ et des transformations naturelles ;
(2) la *catégorie des objets simpliciaux* de $\mathcal{C}$ est la catégorie $\Delta^{\text{op}} \mathcal{C}$ des foncteurs de Δ^{op} vers $\mathcal{C}$ et des transformations naturelles.

Remarque 6.41. Un objet simplicial $X_\bullet$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'une suite d'objets $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{C}$ et

- (1) *opérateurs faces* $\partial_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$, $0 \leq i \leq n$, induits par les ε_i ;
(2) *dégénérescences* $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$, $0 \leq i \leq n$, induits par les σ_i

qui vérifient les *relations simpliciales* (duales aux relations cosimpliciales).

Un morphisme $f_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ entre objets simpliciaux est une suite de morphismes $\{f_n : X_n \rightarrow Y_n | n \in \mathbb{N}\}$ telle que

- (1) $\partial_i f_n = f_{n-1} \partial_i : X_n \rightarrow Y_{n-1}$;
- (2) $s_j f_n = f_{n+1} s_j : X_n \rightarrow Y_{n+1}$.

Lemme 6.42. *Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur ; alors F induit foncteurs $\Delta F : \Delta \mathcal{C} \rightarrow \Delta \mathcal{D}$ et $\Delta^{\text{op}} F : \Delta^{\text{op}} \mathcal{C} \rightarrow \Delta^{\text{op}} \mathcal{D}$.*

Démonstration. Exercice. □

Exemple 6.43. Il y a deux exemples fondamentaux qui nous intéressent :

- (1) la catégorie des ensembles simpliciaux, $\Delta^{\text{op}} \text{Ens}$;
- (2) la catégorie des groupes abéliens simpliciaux, $\Delta^{\text{op}} \text{Ab}$.

Plus généralement, on peut considérer la catégorie $\Delta^{\text{op}} R\text{-Mod}$ des R -modules simpliciaux (R un anneau commutatif) ou la catégorie $\Delta^{\text{op}} \mathcal{A}$ des objets simpliciaux d'une catégorie abélienne quelconque.

Exemple 6.44. Soit R un anneau commutatif. Alors, le foncteur R -module libre,

$$R[-] : \text{Ens} \rightarrow R\text{-Mod}$$

(donné par $R[S] := \bigoplus_{s \in S} R$) induit un foncteur

$$R[-] : \Delta^{\text{op}} \text{Ens} \rightarrow \Delta^{\text{op}} R\text{-Mod}.$$

Proposition 6.45. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui admet des produits finis. Alors les catégories $\Delta \mathcal{C}$ et $\Delta^{\text{op}} \mathcal{C}$ admettent des produits finis.*

Démonstration. Considérons le cas des objets simpliciaux. Soient $X_\bullet, Y_\bullet \in \text{Ob} \Delta^{\text{op}} \mathcal{C}$; on définit l'objet $X_\bullet \amalg Y_\bullet$ par $(X_\bullet \amalg Y_\bullet)_n := X_n \amalg Y_n$ (en utilisant le produit dans $\mathcal{C}$), muni de l'action 'diagonale' : pour $\varphi : [m] \rightarrow [n]$ un morphisme de Δ qui induit $\varphi_X^* : X_m \rightarrow X_n$ et $\varphi_Y^* : Y_m \rightarrow Y_n$, le morphisme $\varphi_X^* \amalg \varphi_Y^* : X_m \amalg Y_m \rightarrow X_n \amalg Y_n$ est le produit $\varphi_X^* \amalg \varphi_Y^*$. On vérifie que $X_\bullet \amalg Y_\bullet$ est le produit (au sens catégorique) dans la catégorie $\Delta^{\text{op}} \mathcal{C}$. □

Exemple 6.46. La catégorie des ensembles simpliciaux $\Delta^{\text{op}} \text{Ens}$ admet des produits finis.

6.8. Le complexe de chaînes associé (non-normalisé). Rappelons que $\mathcal{A} \in \{\text{Ab}, R\text{-Mod}\}$ (éventuellement être une catégorie abélienne quelconque).

Proposition 6.47. *Il existe un foncteur*

$$C_* : \Delta^{\text{op}} \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\geq 0} \mathcal{A}$$

tel que, pour $M_\bullet \in \mathcal{A}$, $C_n(M_\bullet) = M_n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $d_n : C_n(M_\bullet) \rightarrow C_{n-1}(M_\bullet)$ est le morphisme

$$d_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i : M_n \rightarrow M_{n-1}.$$

Démonstration. Le seul point non-trivial à vérifier est que la composition $d_n \circ d_{n+1} = 0$, pour $n \in \mathbb{N}$. Pour cela, on utilise la relation simpliciale

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i$$

pour $i < j$. On a :

$$\begin{aligned} d_n \circ d_{n+1} &= \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \right) \circ \left(\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \partial_j \right) \\ &= \sum_{i < j} \left\{ (-1)^{i+j} \partial_i \partial_j + (-1)^{i+j-1} \partial_{j-1} \partial_i, \right\} \end{aligned}$$

par changement d'indexation. Alors, par la relation simpliciale, on déduit que $d_n \circ d_{n+1} = 0$. $\square$

Exemple 6.48. Soit R un anneau commutatif. La composition du foncteur $R[-]$ avec le foncteur $C_*(-)$ fournit un foncteur

$$\begin{aligned} C_*(R[-]) : \Delta^{\text{op}}\text{Ens} &\rightarrow \mathfrak{Ch}_{\geq 0}(R\text{-Mod}) \\ K_{\bullet} &\mapsto C_*R[K_{\bullet}]. \end{aligned}$$

Par définition, l'homologie de l'ensemble simplicial $K_{\bullet}$ à coefficients dans R est l'homologie du complexe de chaînes $C_*R[K_{\bullet}]$.

Remarque 6.49. Le théorème de Dold-Kan (voir [Wei94], par exemple) montre qu'il existe une équivalence de catégories entre $\Delta^{\text{op}}\mathcal{A}$ et $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$. Ainsi, le passage de $\Delta^{\text{op}}R\text{-Mod}$ à $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}R\text{-Mod}$ ne perd aucune information.

6.9. Des espaces topologiques vers les ensembles simpliciaux.

Définition 6.50. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n \in \text{Ob}\Delta^{\text{op}}\text{Ens}$ est le foncteur

$$\Delta_n := \text{Hom}_{\Delta}(-, [n]).$$

Exercice 6.51. Montrer que, pour $K_{\bullet} \in \text{Ob}\Delta^{\text{op}}\text{Ens}$, il existe une bijection naturelle :

$$K_n \cong \text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}\text{Ens}}(\Delta_n, K).$$

En déduire qu'il existe une surjection d'ensembles simpliciaux

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}} \coprod_{k \in K_n} \Delta_n \rightarrow K.$$

(Question : comment raffiner ce résultat pour obtenir une *présentation* de K ?)

Remarque 6.52. L'association $[n] \mapsto \Delta_n$ définit un objet cosimplicial de $\Delta^{\text{op}}\text{Ens}$.

Définition 6.53. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\Delta_n^{\text{top}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ le *n-simplexe topologique*

$$\Delta_n^{\text{top}} := \{(t_i) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n+1} t_i = 1\}.$$

Proposition 6.54. L'association $[n] \mapsto \Delta_n^{\text{top}}$ est un objet cosimplicial de la catégorie des espaces topologiques.

Démonstration. Soit $\varphi : [m] \rightarrow [n]$ un morphisme de Δ . Alors, φ induit un morphisme $\mathbb{R}$ -linéaire

$$\varphi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

par linéarisation $\mathbb{R}[\varphi] : \mathbb{R}[\{0, \dots, m\}] \rightarrow \mathbb{R}[\{0, \dots, n\}]$. On obtient la structure cosimpliciale par restriction aux simplexes topologiques. $\square$

Définition 6.55. Le foncteur des *simplexes singuliers* est le foncteur $\text{Sing} : \mathfrak{T} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\text{Ens}$

$$\text{Sing} := \text{Hom}_{\mathfrak{T}}(\Delta_{\bullet}^{\text{top}}, -).$$

En particulier, un *n-simplexe singulier* d'un espace topologique Y est une application continue $\Delta_n^{\text{top}} \rightarrow Y$.

Remarque 6.56. Soit Y un espace topologique. L'ensemble $\text{Sing}_0(Y)$ est l'ensemble des points de Y et $\text{Sing}_1(Y)$ est l'ensemble des chemins dans Y (on ne considère pas la topologie de l'espace des chemins). Les opérateurs faces $\partial_0, \partial_1 : \text{Sing}_1(Y) \rightarrow \text{Sing}_0(Y)$ donnent le début et la fin du chemin et l'opérateur dégénérescence $s_0 : \text{Sing}_0(Y) \rightarrow \text{Sing}_1(Y)$ est le foncteur 'chemin constant'.

Le foncteur *réalisation topologique* introduit ci-dessous n'est pas essentiel pour la définition de l'homologie singulière, mais joue un rôle fondamental en théorie d'homotopie. Sa construction est un exemple d'un *coend*.

Définition 6.57. Le foncteur de *réalisation topologique* $|-| : \Delta^{\text{op}}\text{Ens} \rightarrow \mathfrak{T}$ est défini par :

$$|K_\bullet| := \left(\coprod_{n \geq 0} K_n \times \Delta_n^{\text{top}} \right) / \sim$$

où la relation $\sim$ est engendrée par les relations suivantes : pour $\varphi : [m] \rightarrow [n]$, $k \in K_n$ et $y \in \Delta_m^{\text{top}}$:

$$(\varphi^* k, y) \sim (k, \varphi_* y),$$

par rapport aux morphismes

$$K_m \times \Delta_m^{\text{top}} \xrightarrow{\varphi^* \times 1} K_n \times \Delta_m^{\text{top}} \xrightarrow{1 \times \varphi_*} K_n \times \Delta_n^{\text{top}}.$$

Remarque 6.58. Lorsque l'ensemble simplicial $K_\bullet$ n'est pas *fini* (un quotient d'un coproduit fini $\coprod_i \Delta_{n_i}$ de simplexes standards), il faut munir $|K_\bullet|$ de la bonne topologie *compactement engendrée* (voir [GJ99, Section I.2], par exemple).

Exercice 6.59. Montrer que l'espace cosimplicial $[n] \mapsto |\Delta_n|$ est naturellement isomorphisme dans $\Delta\mathfrak{T}$ à l'objet cosimplicial $[n] \mapsto \Delta_n^{\text{top}}$.

Remarque 6.60. En considérant la réalisation topologique des ensembles simpliciaux, on constate que les *simplexes non-dégénérés* jouent un rôle important. Pour $K_\bullet$ un ensemble simplicial, l'ensemble des n -simplexes non-dégénérés est

$$K_n^{\text{non.deg}} := K_n \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} s_i K_{n-1} \right).$$

Exercice 6.61. Soit $K_\bullet$ un ensemble simplicial. Montrer qu'il existe une surjection d'ensembles simpliciaux

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}} \coprod_{k \in K_n^{\text{non.deg}}} \Delta_n \twoheadrightarrow K_\bullet.$$

Exemple 6.62. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\partial\Delta_n \subset \Delta_n$ le sous-ensemble simplicial des morphismes $\text{Hom}_\Delta(-, [n])$ qui ne sont pas surjectifs. On a deux 'modèles' dans la catégorie des ensembles simpliciaux pour le cercle :

- (1) $\partial\Delta_2$;
- (2) $\Delta_1/\partial\Delta_1$, où le quotient se forme dans la catégorie des ensembles.

En particulier, on a des homéomorphismes $|\partial\Delta_2| \cong S^1 \cong |\Delta_1/\partial\Delta_1|$. Ceci se généralise au cas des sphères S^n .

$\Delta_1/\partial\Delta_1$ donne le modèle le plus petit que possible pour le cercle ; il a un seul 0-simplexe non-dégénéré et un seul 1-simplexe non-dégénéré ; tous les autres simplexes sont dégénérés.

Remarque 6.63. Le foncteur $|-|$ est en fait l'adjoint à gauche du foncteur $\text{Sing} :$

$$|-| : \Delta^{\text{op}}\text{Ens} \rightleftarrows \mathfrak{T} : \text{Sing}.$$

La théorie d'homotopie peut être développée en utilisant les ensembles simpliciaux, qui fournissent des modèles *combinatoires* des espaces topologiques. L'exemple 6.62 montre que la réalisation topologique d'un ensemble simplicial n'est pas en général un *complexe simplicial*.

6.10. Les chaînes singulières d'un espace topologique. Pour simplifier la présentation, dans section on ne considère que les chaînes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Définition 6.64. Le foncteur des *chaînes singulières* $\mathfrak{Ch}_*^{\text{sing}} : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\text{Ab}$ est le foncteur composé :

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) := C_*(\mathbb{Z}[\text{Sing}(X)]).$$

Lemme 6.65. Soit $(X, A) \in \text{Ob}\mathfrak{T}^{[2]}$; alors $\text{Sing}(A) \hookrightarrow \text{Sing}(X)$ est un monomorphisme d'ensembles simpliciaux et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{Z}[\text{Sing}_n(X)] \cong \mathbb{Z}[\text{Sing}_n(A)] \oplus (\mathbb{Z}[\text{Sing}_n(X)]/\mathbb{Z}[\text{Sing}_n(A)])$$

dans la catégorie des groupes abéliens. En particulier

$$n \mapsto \mathbb{Z}[\text{Sing}_n(X)]/\mathbb{Z}[\text{Sing}_n(A)]$$

est un groupe abélien simplicial qui prend ses valeurs dans la catégorie des groupes abéliens libres.

Démonstration. Exercice. □

Définition 6.66. Le foncteur des chaînes singulières relatives $\mathfrak{Ch}_*^{\text{sing}} : \mathfrak{T}^{[2]} \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\text{Ab}$ est le foncteur composé :

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X, A) := C_*(\mathbb{Z}[\text{Sing}(X)]/\mathbb{Z}[\text{Sing}(A)]).$$

Remarque 6.67. Pour $X \in \text{Ob}\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \cong \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X, \emptyset)$.

Définition 6.68. Pour $n \in \mathbb{N}$, le foncteur n -ième groupe d'homologie singulière (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) $H_n^{\text{sing}} : \mathfrak{T}^{[2]} \rightarrow \text{Ab}$ est le foncteur

$$(X, A) \mapsto H_n(\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X, A)),$$

le n -ième groupe d'homologie du complexe des chaînes singulières.

Par construction, on a le résultat suivant :

Proposition 6.69. Soit $(X, A) \in \text{Ob}\mathfrak{T}^{[2]}$. Il existe une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A) \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X, A) \rightarrow 0$$

et, pour $C_* \in \{\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A), \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X), \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X, A)\}$ et $n \in \mathbb{N}$, C_n est un groupe abélien libre.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 6.70. Soit $\{(X_i, A_i) \in \text{Ob}\mathfrak{T}^{[2]} | i \in \mathcal{I}\}$ un ensemble de paires d'espaces topologiques. Alors, il existe un isomorphisme naturel de complexes de chaînes

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(\coprod_{i \in \mathcal{I}} (X_i, A_i)) \cong \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X_i, A_i).$$

Démonstration. Le cas relatif est une conséquence du cas absolu, où $A_i = \emptyset, \forall i$; donc, contentons-nous de démontrer le cas absolu.

Il y a un isomorphisme naturel d'ensembles simpliciaux :

$$\coprod_{i \in \mathcal{I}} \text{Sing}(X_i) \xrightarrow{\cong} \text{Sing}(\coprod_{i \in \mathcal{I}} X_i)$$

puisque les simplexes topologiques Δ_n^{top} sont connexes. (Le terme à gauche est le coproduit dans la catégorie des ensembles simpliciaux, ce qui fournit le morphisme naturel.)

En appliquant le foncteur groupe abélien libre, on obtient un isomorphisme naturel :

$$\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{Z}[\text{Sing}(X_i)] \cong \mathbb{Z}[\text{Sing}(\coprod_{i \in \mathcal{I}} X_i)]$$

de groupes abéliens simpliciaux.

Le foncteur $C_*(-)$ commute aux sommes directes (exercice !), ce qui entraîne le résultat. □

Proposition 6.71. *Le complexe $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(\text{pt})$ d'un point est de la forme*

$$\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z};$$

en particulier $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(\text{pt})_n \cong \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et

$$d_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pair} \\ 0 & n \text{ impair et } n = 0 \end{cases}$$

Donc

$$H_n^{\text{sing}}(\text{pt}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n > 0. \end{cases}$$

Remarque 6.72. Les Propositions 6.69, 6.70, 6.71 établissent les axiomes de la *suite exacte longue*, de l'*additivité* et de la *normalisation* d'une théorie d'homologie. Il nous reste d'établir les axiomes d'*homotopie* et d'*excision*.

6.11. Invariance par homotopie. Pour démontrer que le foncteur H_n^{sing} satisfait l'axiome d'invariance en homotopie, il suffit de montrer que, si $f, g : X \rightrightarrows Y$ sont deux applications continues, homotopes par une homotopie H , alors

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(f), \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(g) : \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \rightrightarrows \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(Y)$$

sont homotopes par une homotopie de chaînes.

Pour motiver la construction utilisée dans la démonstration, introduisons la notion d'une homotopie simpliciale.

Définition 6.73. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $f, g : K_{\bullet} \rightrightarrows L_{\bullet}$ deux morphismes de la catégorie $\Delta^{\text{op}}\mathcal{C}$ des objets simpliciaux. Une *homotopie simpliciale* de f vers g est la donnée d'un ensemble de morphismes de $\mathcal{C}$ $\{h_i : K_n \rightarrow L_{n+1} \mid 0 \leq i \leq n\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tels que

- (1) $\partial_0 h_0 = f$ et $\partial_{n+1} h_n = g$;
- (2) $\partial_i h_j = \begin{cases} h_{j-1} \partial_i & i < j \\ \partial_i h_{i-1} & i = j \neq 0 \\ h_j \partial_{i-1} & i > j + 1; \end{cases}$
- (3) $s_i h_j = \begin{cases} h_{j+1} s_i & i \leq j \\ h_j s_{i-1} & i > j. \end{cases}$

Lemme 6.74. Soient $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur et $\{h_i : K_n \rightarrow L_{n+1} \mid 0 \leq i \leq n\}$ une homotopie simpliciale entre $f, g : K_{\bullet} \rightrightarrows L_{\bullet}$, deux morphismes de la catégorie $\Delta^{\text{op}}\mathcal{C}$.

Alors, $\{F \circ h_i : F(K_n) \rightarrow F(L_{n+1}) \mid 0 \leq i \leq n\}$ est une homotopie simpliciale entre $F \circ f, F \circ g : F(K_{\bullet}) \rightrightarrows F(L_{\bullet})$ dans $\Delta^{\text{op}}\mathcal{D}$.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 6.75. Soient $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ (ou une catégorie abélienne quelconque) et $h_{\bullet}$ une homotopie simpliciale de f à g , $f, g : K_{\bullet} \rightrightarrows L_{\bullet}$, deux morphismes de la catégorie $\Delta^{\text{op}}\mathcal{A}$. Alors l'ensemble des morphismes ($n \in \mathbb{N}$) :

$$h(n) := \sum_{j=0}^n (-1)^j h_j : K_n \rightarrow L_{n+1}$$

est une homotopie de chaînes entre $C_*(f), C_*(g) : C_*(K_{\bullet}) \rightrightarrows C_*(L_{\bullet})$.

Démonstration. Calculons

$$\begin{aligned} d_L h(n) + h(n-1) d_K &= \left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i \right) \circ \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j h_j \right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k h_k \right) \circ \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l \partial_l \right) \\ &= \sum (-1)^{i+j} \partial_i h_j + \sum (-1)^{k+l} h_k \partial_l. \end{aligned}$$

On a, pour $i = j = 0$, $\partial_0 h_0 = f$ et, pour $i = n+1, j = n$, $(-1) \partial_{n+1} h_n = -g$. Il faut montrer que la somme des autres termes est zéro. On considère les cas suivants :

- (1) $i < j$: on a la relation $\partial_i h_j = h_{j-1} \partial_i$ et, si $(k, l) = (j-1, i)$, alors $k \geq l$;
- (2) $i > j+1$: on a la relation $\partial_i h_j = h_j \partial_{i-1}$ et, si $(k, l) = (j, i-1)$, alors $k < l$;
- (3) $i = j \neq 0$: on a la relation $\partial_i h_i = \partial_i h_{i-1}$.

A cause des signes, la somme des termes est bien zéro. $\square$

On va voir que la notion d'une homotopie simpliciale correspond à une décomposition (ou *triangulation*) de $\Delta_n^{\text{top}} \times \Delta_1^{\text{top}}$ (rappeler que $\Delta_1^{\text{top}} \cong I$). Le résultat suivant montre l'intérêt de cette notion :

Lemme 6.76. *Soient $H : X \times \Delta_1^{\text{top}} \rightarrow Y$ une homotopie entre deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ et $\alpha \in \text{Sing}_n(X)$ un n -simplexe singulier, $\alpha : \Delta_n^{\text{top}} \rightarrow X$. Alors H induit une homotopie*

$$H \circ (\alpha \times 1_{\Delta_1^{\text{top}}}) : \Delta_n^{\text{top}} \times \Delta_1^{\text{top}} \rightarrow Y$$

entre $f \circ \alpha, g \circ \alpha \in \text{Sing}_n(Y)$.

Démonstration. Le simplexe singulier α est une application continue $\Delta_n^{\text{top}} \xrightarrow{\alpha} X$. Le résultat est une conséquence immédiate du Lemme 3.6. $\square$

Remarque 6.77. L'espace topologique $\Delta_n^{\text{top}} \times \Delta_1^{\text{top}}$ admet une structure de *complexe simplicial* (voir [FT10, Définition 5.20], par exemple), pour chaque $n \in \mathbb{N}$; ces structures sont compatibles entre eux. Pour l'expliquer, il est commode d'utiliser le fait que $\Delta_n^{\text{top}} \cong |\Delta_n|$ et que

$$\Delta_n^{\text{top}} \times \Delta_1^{\text{top}} \cong |\Delta_n \times \Delta_1|.$$

Exercice 6.78. (Non-trivial.) Démontrer que $\Delta_n^{\text{top}} \times \Delta_1^{\text{top}} \cong |\Delta_n \times \Delta_1|$. (Cf. la remarque 6.81.)

Par définition de la catégorie Δ des ordinaux et du produit de deux ensembles simpliciaux, un élément de $(\Delta_n \times \Delta_1)_k$ est une application non-décroissante :

$$\{0, \dots, k\} \rightarrow \{0, \dots, n\} \times \{0, 1\}.$$

Lemme 6.79. *L'ensemble $(\Delta_n \times \Delta_1)_{n+1}^{\text{non.deg}}$ des $n+1$ -simplexes non-dégénérés est $\{\theta_j \mid 0 \leq j \leq n\}$, où*

$$\theta_j : t \in \{0, \dots, n+1\} \mapsto \begin{cases} (t, 0) & t \leq j \\ (t-1, 1) & t > j. \end{cases}$$

Démonstration. Exercice. $\square$

L'élément $\theta_j \in (\Delta_n \times \Delta_1)_{n+1}$ correspond à un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$\theta_j : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n \times \Delta_1.$$

Notation 6.80. Pour $0 \leq j \leq n$, soit $\theta_j^{\text{top}} : \Delta_{n+1}^{\text{top}} \rightarrow \Delta_n^{\text{top}} \times \Delta_1^{\text{top}}$ la réalisation topologique $|\theta_j|$.

Remarque 6.81. Pour définir les applications continues θ_j^{top} , on n'a pas besoin d'utiliser le homéomorphisme $\Delta_n^{\text{top}} \times \Delta_1^{\text{top}} \cong |\Delta_n \times \Delta_1|$. En effet, par construction $\Delta_n^{\text{top}} \times \Delta_1^{\text{top}} \subset \mathbb{R}^{n+3}$ est une partie convexe. Ainsi, pour définir une application *linéaire*

$$\Delta_{n+1}^{\text{top}} \rightarrow \Delta_n^{\text{top}} \times \Delta_1^{\text{top}}$$

il suffit de donner l'image des vertexes de $\Delta_{n+1}^{\text{top}}$.

Par construction, les applications continues θ_j^{top} définissent une triangulation de $\Delta_n^{\text{top}} \times \Delta_1^{\text{top}}$:

$$\Delta_n^{\text{top}} \times \Delta_1^{\text{top}} = \bigcup_{j=0}^n \Delta_{n+1}^{\text{top}}.$$

Définition 6.82. Pour $H : X \times \Delta_1^{\text{top}} \rightarrow Y$ une homotopie, définir

$$\begin{aligned} h_j : \text{Sing}_n(X) &\rightarrow \text{Sing}_{n+1}(Y) \\ \alpha &\mapsto H \circ (\alpha \times 1_{\Delta_1^{\text{top}}}) \circ \theta_j^{\text{top}} \end{aligned}$$

pour $0 \leq j \leq n$.

Lemme 6.83. Soit $H : X \times \Delta_1^{\text{top}} \rightarrow Y$ une homotopie entre $f, g : X \rightrightarrows Y$. Alors, les applications $\{h_j : \text{Sing}_n(X) \rightarrow \text{Sing}_{n+1}(Y) \mid 0 \leq j \leq n\}$ définissent une homotopie simpliciale entre

$$\text{Sing}(f), \text{Sing}(g) : \text{Sing}(X) \rightrightarrows \text{Sing}(Y).$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 6.84. La définition d'une homotopie simpliciale est calquée sur la structure de l'ensemble simplicial $\Delta_n \times \Delta_1$. De ce point de vue, le Lemme 6.83 est tautologique.

Pour démontrer le théorème d'invariance par homotopie de l'homologie singulière, il suffit d'établir le résultat suivant.

Théorème 6.85. Soit $H : X \times \Delta_1^{\text{top}} \rightarrow Y$ une homotopie entre $f, g : X \rightrightarrows Y$. Alors les morphismes

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(f), \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(g) : \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \rightrightarrows \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(Y)$$

sont homotopes par une homotopie de chaînes.

Démonstration. Par le Lemme 6.83, H induit une homotopie simpliciale $\{h_j : \text{Sing}_n(X) \rightarrow \text{Sing}_{n+1}(Y)\}$. En appliquant le foncteur $\mathbb{Z}[-]$ de groupe abélien libre, par le lemme 6.74, on obtient une homotopie simpliciale

$$\{\mathbb{Z}[h_j] : \mathbb{Z}[\text{Sing}_n(X)] \rightarrow \mathbb{Z}[\text{Sing}_{n+1}(Y)]\}$$

entre les morphismes $\mathbb{Z}[\text{Sing}(f)], \mathbb{Z}[\text{Sing}(g)] : \mathbb{Z}[\text{Sing}(X)] \rightrightarrows \mathbb{Z}[\text{Sing}(Y)]$ de groupes abéliens simpliciaux.

Alors, en passant aux complexes de chaînes associés, la Proposition 6.75 fournit l'homotopie de chaînes recherchée. □

6.12. Le lemme des cinq. On a besoin d'un résultat classique d'algèbre homologique, le *lemme des cinq* :

Proposition 6.86. Soit

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \xrightarrow{f_0} & A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 \\ g_0 \downarrow & & g_1 \downarrow & & g_2 \downarrow & & g_3 \downarrow & & g_4 \downarrow \\ B_0 & \xrightarrow{h_0} & B_1 & \xrightarrow{h_1} & B_2 & \xrightarrow{h_2} & B_3 & \xrightarrow{h_3} & B_4 \end{array}$$

un diagramme commutatif de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$ tel que les lignes sont exactes.

Si les morphismes g_0, g_1, g_3, g_4 sont des isomorphismes, alors g_2 est un isomorphisme.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\text{Ker } g_2 = 0$ et que g_2 est surjectif.

Soit $x \in \text{Ker } g_2 \subset A_2$. Alors, puisque g_3 est injectif, $f_2x = 0$, donc il existe $y \in A_1$ tel que $f_1y = x$, par exactitude. On a $h_1g_1y = 0$, donc il existe $z \in B_0$ tel que $h_0z = g_1y$. Le morphisme g_0 est surjectif, donc z se relève à $\tilde{z} \in A_0$ et, par l'injectivité de g_1 , on déduit que $f_0\tilde{z} = y$. Il en découle que $x = f_1y = f_1f_0\tilde{z} = 0$, puisque $f_1f_0 = 0$.

La démonstration que g_2 est surjectif est similaire (*exercice* : compléter cette démonstration). (En fait, la démonstration est formellement duale.) □

Exercice 6.87. Préciser les hypothèses requises sur g_0, g_1, g_3, g_4 afin de pouvoir démontrer que g_2 est injectif par l'argument précédent.

Corollaire 6.88. *Soit*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow m_0 & & \downarrow m_1 & & \downarrow m_2 \\ 0 & \longrightarrow & D_0 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & D_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

un diagramme commutatif dans $\mathfrak{Ch}\mathcal{A}$ dont les lignes sont des suites exactes courtes de complexes de chaînes.

Si deux des morphismes $\{m_0, m_1, m_2\}$ induisent des isomorphismes en homologie, alors le troisième aussi.

Démonstration. Exercice. □

6.13. Le théorème des petites chaînes - et ses conséquences.

Définition 6.89. Pour $\mathcal{U} := \{U_i | i \in \mathcal{I}\}$ une famille de parties d'un espace topologique X telle que $X = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i^\circ$, le sous-complexe des $\mathcal{U}$ -petites chaînes :

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{U}}(X) \leq \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X)$$

est le sous-complexe engendré par les simplexes singuliers $\Delta_n^{\text{top}} \rightarrow X$ qui se factorise à travers une partie $U_i \subset X$, pour $i \in \mathcal{I}$.

Le théorème des petites chaînes est le résultat suivant :

Théorème 6.90. *Pour $\mathcal{U} := \{U_i | i \in \mathcal{I}\}$ une famille de parties d'un espace topologique X telle que $X = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i^\circ$, l'inclusion $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{U}}(X) \hookrightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X)$ induit un isomorphisme en homologie.*

Avant le démontrer, considérons quelques applications du résultat ; en particulier, on va voir que la propriété d'excision pour l'homologie singulière est un corollaire du théorème des petites-chaînes.

Exercice 6.91. Soient C', C'' deux sous-complexes d'un complexe de chaînes C . Montrer que

- (1) $C' \cap C''$;
- (2) $C' + C''$

sont des sous-complexes de C .

Lemme 6.92. *Soient $A, B \subset X$ deux parties d'un espace topologique. Alors $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A)$, $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(B)$ sont des sous-complexes de $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X)$ et*

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A \cap B) = \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A) \cap \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(B).$$

Démonstration. Exercice. □

Théorème 6.93. *Soient $(X, A) \in \text{Ob}\mathfrak{T}^{[2]}$ et $U \subset X$ une partie de X telle que $\overline{U} \subset A^\circ$. Alors l'inclusion $(X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme en homologie*

$$H_*^{\text{sing}}(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_*^{\text{sing}}(X, A).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{U} := \{A, X \setminus U\}$; l'hypothèse entraîne que $X = A^\circ \cup (X \setminus U)^\circ$ et donc on peut appliquer le théorème des petites chaînes.

Par la définition de $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}$, on a des inclusions de sous-complexes

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A) \hookrightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \hookleftarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \setminus U).$$

Par définition :

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{U}}(X) = \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A) + \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \setminus U) \leq \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X).$$

En particulier, $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A)$ est un sous-complexe de $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X)$ et on peut former le complexe quotient $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{U}}(X)/\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A)$. On obtient des isomorphismes de complexes

$$\begin{aligned} \mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{U}}(X)/\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A) &\cong \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \setminus U)/\{\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \setminus U) \cap \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A)\} \\ &\cong \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \setminus U)/\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A \setminus U). \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une suite exacte courte de complexes de chaînes $0 \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A) \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{U}}(X) \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow 0$ qui figure dans un diagramme commutatif de complexes de chaînes, dont les lignes sont des suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A) & \longrightarrow & \mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(A) & \longrightarrow & \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X, A) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Le morphisme vertical à droite est le morphisme induit par $(X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$.

On conclut par le lemme des cinq (Corollaire 6.88), en utilisant le fait que $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{U}}(X) \hookrightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X)$ induit un isomorphisme en homologie, par Théorème 6.90. $\square$

Théorème 6.94. *Soit $\mathcal{U} := \{U, V\}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique X . Alors les inclusions*

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i_U} & U \\ i_V \downarrow & & \downarrow j_U \\ V & \xrightarrow{j_V} & X \end{array}$$

induisent une suite exacte longue (dite de Mayer-Vietoris) en homologie

$$\rightarrow H_n^{\text{sing}}(U \cap V) \xrightarrow{(i_U)^* - (i_V)^*} H_n^{\text{sing}}(U) \oplus H_n^{\text{sing}}(V) \xrightarrow{(j_U)^* + (j_V)^*} H_n^{\text{sing}}(X) \rightarrow H_{n-1}^{\text{sing}}(U \cap V) \rightarrow .$$

Démonstration. Le foncteur $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}$ nous fournit un diagramme commutatif d'inclusions de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(U \cap V) & \xrightarrow{\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(i_U)} & \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(U) \\ \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(i_V) \downarrow & & \downarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(j_U) \\ \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(V) & \xrightarrow[\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(j_V)]{} & \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \end{array}$$

et les morphismes $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(j_U)$ et $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(j_V)$ se factorise à travers l'inclusion

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{U}}(X) \hookrightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X).$$

Puisque $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{U}}(X) = \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(U) + \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(V)$, par le lemme 6.92 on déduit qu'il existe une suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(U \cap V) \xrightarrow{\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(i_U) - \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(i_V)} \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(U) \oplus \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(V) \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{U}}(X) \rightarrow 0.$$

On obtient la suite exacte longue de Mayer-Vietoris en passant à l'homologie, en utilisant Théorème 6.90 pour identifier l'homologie de $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{U}} X$ avec $H_*^{\text{sing}}(X)$. $\square$

6.14. Interlude : le nerf d'une catégorie.

Remarque 6.95. Un *ensemble partiellement ordonné* peut être défini comme une catégorie petite $\mathcal{C}$ telle que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \{\emptyset, \{*\}\} \forall X, Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$.

Cette catégorie correspond à l'ensemble partiellement ordonné $(\text{Ob}\mathcal{C}, \leq)$ ou $X \leq Y$ ssi $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \neq \emptyset$.

Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre catégories de cette forme correspond à une application $F : \text{Ob}\mathcal{C} \rightarrow \text{Ob}\mathcal{D}$ entre ensembles partiellement ordonnés qui préserve l'ordre.

Exemple 6.96. Pour $n \in \mathbb{N}$, $[n] := \{0, \dots, n\}$ est un ensemble partiellement ordonné, muni de l'ordre naturel induit par $(\mathbb{N}, \leq)$. On écrira $[n]_{\text{CAT}} \in \text{ObCAT}$ pour indiquer la catégorie associée.

Lemme 6.97. L'association $[n] \mapsto [n]_{\text{CAT}}$ définit un foncteur :

$$[-]_{\text{CAT}} : \Delta \rightarrow \text{CAT}.$$

Démonstration. Exercice! □

Remarque 6.98. Lemme 6.97 montre que $[-]_{\text{CAT}}$ est un objet cosimplicial de CAT .

Définition 6.99. Le foncteur *nerf* $\mathcal{N} : \text{CAT} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\text{Ens}$ est le foncteur

$$\mathcal{N}(-) := \text{Hom}_{\text{CAT}}([-]_{\text{CAT}}, -).$$

Concrètement, pour $\mathcal{C} \in \text{ObCAT}$, $(\mathcal{N}\mathcal{C})_i = \text{Hom}_{\text{CAT}}([i]_{\text{CAT}}, \mathcal{C})$.

Remarque 6.100. Pour $\mathcal{C}$ une catégorie petite, $(\mathcal{N}\mathcal{C})_0$ est l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$, $(\mathcal{N}\mathcal{C})_1$ l'ensemble des morphismes, $(\mathcal{N}\mathcal{C})_2$ l'ensemble des morphismes composables ...

Exercice 6.101. Préciser l'action des opérateurs faces et dégénérescences sur $\mathcal{N}\mathcal{C}$.

Exemple 6.102. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nerf $\mathcal{N}([n]_{\text{CAT}})$ est l'ensemble simplicial Δ_n .

Remarque 6.103. L'espace classifiant d'une catégorie petite $\mathcal{C}$ est la réalisation géométrique $|\mathcal{N}\mathcal{C}|$ et cette construction définit un foncteur

$$\begin{aligned} \text{CAT} &\rightarrow \mathfrak{T} \\ \mathcal{C} &\mapsto |\mathcal{N}\mathcal{C}|. \end{aligned}$$

Exemple 6.104. Soit G un groupe discret, qu'on considère comme une catégorie à un seul objet. Le nerf $\mathcal{N}G$ est un modèle simplicial de l'espace classifiant du groupe G et l'homologie du groupe G est l'homologie du complexe de chaînes associé à $\mathbb{Z}[\mathcal{N}G]$. L'espace classifiant BG peut être défini comme $BG := |\mathcal{N}G|$.

Par exemple, pour $G = \mathbb{Z}/2$, $B\mathbb{Z}/2 \simeq \mathbb{R}P^\infty$.

Remarque 6.105. On va utiliser le nerf pour donner une construction *naturelle* de la sous-division barycentrique du simplexe Δ_n^{top} . Il est à noter que les ensembles simpliciaux de la forme $\mathcal{N}\mathcal{C}$ ont des propriétés très particulières.

Exercice 6.106. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble partiellement ordonné fini. Montrer que l'espace classifiant $|\mathcal{N}\mathcal{C}|$ a la structure d'un *complexe simplicial* (voir [FT10, Définition 5.20], par exemple).

6.15. Démonstration du théorème des petites chaînes. Soit X un espace topologique ; le théorème des petites chaînes se démontre à l'aide d'une procédure de *sous-division*¹ qui induit un morphisme de complexes

$$S : \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X)$$

qui est homotope à l'identité et nous permet de nous ramener aux $\mathcal{U}$ -petites chaînes.

La démonstration utilise le résultat algébrique suivant :

1. Pour comprendre ces constructions, il faut considérer des dessins qui représentent les décompositions en basse dimension.

Lemme 6.107. Soit $A_* \subset C_*$ un sous-complexe dans $\mathfrak{Ch}(\mathcal{A})$. Supposer qu'il existe un morphisme $S : C_* \rightarrow C_*$ de $\mathfrak{Ch}(\mathcal{A})$ tel que :

- (1) $S|_{A_*} : A_* \rightarrow A_*$;
- (2) il existe une homotopie de chaînes $S \sim_h 1_{C_*}$ tel que h se restreint à une homotopie de chaînes $S|_{A_*} \sim 1_{A_*}$;
- (3) $\forall n \in \mathbb{Z}$ et $\forall x \in C_n$, $\exists N(x) \in \mathbb{N}$ tel que $S^{N(x)} \in A_n$.

Alors, $A_* \hookrightarrow C_*$ induit un isomorphisme en homologie.

Démonstration. Montrons la surjectivité de $H_n(A_*) \rightarrow H_n(C_*)$. Soit $[x] \in H_n(C_*)$ représenté par un cycle $x \in C_n$; par hypothèse, il existe un nombre naturel N tel que $S^N x \in A_n$. L'élément $S^N x$ est un cycle (puisque S est un morphisme de complexes de chaînes) et l'homotopie $S \sim 1_{C_*}$ induit une homotopie de chaînes $S^N \sim 1_{C_*}$ (*Exercice : expliciter cette homotopie*). Alors $[S^N x]$ est dans l'image de $H_n(A_*) \rightarrow H_n(C_*)$ et $[S^N x] = [x]$, donc le morphisme est surjectif.

Considérons l'injectivité. Soit $[w] \in H_n(A_*)$, représenté par un cycle $w \in A_n$, tel que $[w] = 0$ dans $H_n(C_*)$, donc $\exists y \in C_{n+1}$ tel que $dy = x$ dans C_n . Par l'hypothèse, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $S^M y \in A_{n+1}$ et donc

$$S^M w = S^M(dy) = dS^M y,$$

en particulier $S^M w$ est le bord d'un élément de A_{n+1} , donc $[S^M w] = 0$. Mais $[S^M w] = [w]$, puisque $S|_{A_*} \sim 1_{A_*}$, donc $[w] = 0$. $\square$

Remarque 6.108. Le morphisme S est une généralisation d'un rétracte par déformation forte dans le cadre des complexes de chaînes.

Pour construire $S : \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X)$ on utilise la *sous-division barycentrique* des simplexes; la vérification que S satisfait les propriétés du Lemme utilise le théorème de Lebesgue.

Rappeler qu'un simplexe dans un espace Euclidéen $\mathbb{R}^D$ de dimension n est l'enveloppe convexe $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ de ses vertexes.

Définition 6.109. Le *barycentre* du simplexe $\langle v_0, \dots, v_n \rangle \subset \mathbb{R}^D$ est le point

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v_i.$$

(centre de masse).

Proposition 6.110. Soit $n \in \mathbb{N}$; il existe une décomposition barycentrique

$$\Delta_n^{\text{top}} \cong \bigcup_{i=1}^{(n+1)!} \Delta_n^{\text{top}}(i)$$

tel que $\Delta_n^{\text{top}}(i) \cong \Delta^{\text{top}}$ et, si $i \neq j$, $\Delta_n^{\text{top}}(i)^\circ \cap \Delta_n^{\text{top}}(j)^\circ = \emptyset$.

Démonstration. La démonstration est par récurrence sur n ; pour $n = 0$ il n'y a rien à faire.

Pour l'étape de récurrence, le bord $\partial \Delta_n^{\text{top}}$ se décompose en $\bigcup_{j=1}^{n+1} \Delta_{n-1}^{\text{top}}$ et, par la compatibilité des sous-divisions-barycentriques et l'hypothèse de récurrence, on dispose d'une sous-division de $\partial \Delta_n^{\text{top}}$.

Le barycentre de Δ_n^{top} induit un homéomorphisme $\Delta_n^{\text{top}} \cong C \partial \Delta_n^{\text{top}}$, le cône du bord. Donc, la sous-division du bord induit la sous-division recherchée. $\square$

Chaque simplexe $\Delta_n^{\text{top}}(i)$ de la décomposition barycentrique induit une application *linéaire*

$$\alpha(i) : \Delta_n^{\text{top}} \hookrightarrow \Delta_n^{\text{top}}$$

qui est déterminée par l'image de ses vertexes. Il est important de bien indexer les vertexes et de tenir en compte l'orientation. Pour cela, on utilise une description combinatoire de la sous-division.

Définition 6.111. Soit $\Delta_{\text{inj}} \subset \Delta$ la sous-catégorie des monomorphismes.

Exercice 6.112. Soit $n \in \mathbb{N}$; montrer que la catégorie $\Delta_{\text{inj}}/[n]$ correspond à l'ensemble partiellement ordonné des simplexes non-dégénérés de Δ_n (où $\sigma \leq \tau$ si et seulement si σ est une face de τ).

On obtient un foncteur

$$\Delta_{\text{inj}}/[-] : \Delta_{\text{inj}} \rightarrow \mathbf{CAT}$$

et donc, par composition avec le foncteur nerf $\mathcal{N} : \mathbf{CAT} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\mathbf{Ens}$:

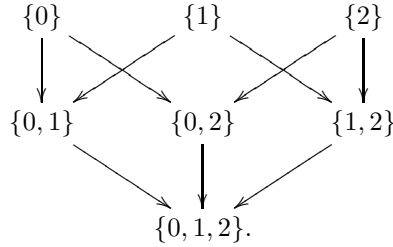
$$\mathcal{N}(\Delta_{\text{inj}}/[-]) : \Delta_{\text{inj}} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\mathbf{Ens}.$$

Exemple 6.113. Pour $n = 1$, la catégorie $\Delta_{\text{inj}}/[1]$ a pour objets $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0, 1\}$ (on identifie un monomorphisme avec son image dans $[1]$) et pour morphismes (on omet les morphismes identité) :

$$\{0\} \rightarrow \{0, 1\} \leftarrow \{1\}.$$

La réalisation topologique du nerf est homéomorphe à la sous-division barycentrique de Δ_1^{top} .

Pour $n = 2$, on peut représenter la catégorie $\Delta_{\text{inj}}/[2]$ par le diagramme suivant



La réalisation topologique du nerf est homéomorphe à la sous-division barycentrique de Δ_2^{top} ; en particulier, un simplexe $\Delta_2^{\text{top}}(i)$ de la décomposition correspond à un chemin de haut en bas du diagramme. Les objets correspondent aux vertexes dans la décomposition barycentrique, donc cette description détermine les applications linéaires

$$\alpha(i) : \Delta_2^{\text{top}} \rightarrow \Delta_2^{\text{top}}.$$

En général, on a la Proposition suivante :

Proposition 6.114. Soit $n \in \mathbb{N}$; il existe un homéomorphisme

$$|\mathcal{N}(\Delta_{\text{inj}}/[n])| \cong \Delta_n^{\text{top}}$$

qui envoie la réalisation d'un n -simplexe non-dégénéré de $\mathcal{N}(\Delta_{\text{inj}}/[n])$ linéairement à un n -simplexe de la décomposition barycentrique de Δ_n^{top} .

Démonstration. Exercice. □

Notation 6.115. Pour $f : \Delta_n^{\text{top}} \rightarrow X$ un n -simplexe singulier de X et $1 \leq i \leq (n+1)!$ un nombre naturel, soit $f(i)$ le n -simplexe singulier

$$\Delta_n^{\text{top}} \xrightarrow{\alpha(i)} \Delta_n^{\text{top}} \xrightarrow{f} X.$$

Définition 6.116. L'opérateur de sous-division barycentrique

$$S : \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X)$$

est défini sur les n -chaînes singulières par $S[f] := \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{\text{orient}(\alpha(i))} [f(i)]$.

Lemme 6.117. L'opérateur $S : \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X)$ est un morphisme de complexes de chaînes.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 6.118. Soit $x \in \mathfrak{Ch}_n^{\text{sing}}(X)$, alors il existe $N(x) \in \mathbb{N}$ tel que $S^{N(x)}x \in \mathfrak{Ch}^{\text{sing}, \mathcal{W}}(X)$.

Démonstration. Par linéarité, on peut réduire au cas $x = [f]$ pour $f : \Delta_n^{\text{top}} \rightarrow X$ un n -simplexe singulier. Alors, le résultat est une conséquence immédiate du théorème de Lebesgue (Proposition 4.43). $\square$

Pour compléter la démonstration du théorème des petites chaînes (en appliquant le Lemme 6.107), il faut construire une homotopie de chaînes entre S et $1_{\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X)}$. Pour cela, on utilise une décomposition de $\Delta_n^{\text{top}} \times \Delta_1^{\text{top}}$, dont la restriction à la face supérieure est la décomposition barycentrique.

Remarque 6.119. Diagrammes à rajouter

6.16. Homologie à coefficients. On a défini l'homologie singulière $H_n^{\text{sing}} : \mathfrak{T}^{[2]} \rightarrow \mathbf{Ab}$ pour n en utilisant le foncteur des chaînes singulières :

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}} : \mathfrak{T}^{[2]} \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\geq 0}(\mathbf{Ab}).$$

Il est utile de considérer l'homologie singulière à coefficients dans un groupe abélien M , qu'on dénotera $(X, A) \mapsto H_*^{\text{sing}}(X, A; M)$ (le cas considéré jusqu'à présent correspond à $M = \mathbb{Z}$). En effet, parfois il est plus facile de calculer $H_*^{\text{sing}}(X, A; M)$, par exemple lorsque M est un corps $\mathbb{K}$, car le foncteur $(X, A) \mapsto H_*^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{K})$ a plus de structure.

Rappeler que le produit tensoriel

$$\otimes : \mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

a la propriété que les foncteurs $M \otimes -, - \otimes M : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$ sont *additifs* (par exemple, $M \otimes (A \oplus B) \cong (M \otimes A) \oplus (M \otimes B)$).

Lemme 6.120. Le produit tensoriel induit un foncteur

$$\begin{aligned} \mathfrak{Ch}(\mathbf{Ab}) \times \mathbf{Ab} &\rightarrow \mathfrak{Ch}(\mathbf{Ab}) \\ (C_*, M) &\mapsto C_* \otimes M, \end{aligned}$$

où $(C_* \otimes M)_n = C_n \otimes M$ et $d_{C_* \otimes M} = d_{C_*} \otimes 1_M$.

Démonstration. Exercice. $\square$

Définition 6.121. Soit $M \in \mathbf{ObAb}$ un groupe abélien. Le complexe de chaînes singulières à coefficients dans M est le foncteur

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(-; M) := \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(-) \otimes M : \mathfrak{T}^{[2]} \rightarrow \mathfrak{Ch}(\mathbf{Ab})$$

et l'homologie singulière à coefficients dans M est défini pour $(X, A) \in \mathbf{Ob}\mathfrak{T}^{[2]}$ par :

$$H_n^{\text{sing}}(X, A; M) := H_n(\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X, A; M)).$$

Exercice 6.122. Montrer que $H_*(-; M)$ est une théorie d'homologie (mais ne satisfait pas l'axiome *dimension* en général).

Il est naturel de se demander quelle est la relation entre $H_n^{\text{sing}}(-)$ et $H_n^{\text{sing}}(-; M)$. Pour cela, il nous faut introduire quelques notions d'algèbre homologique.

Lemme 6.123. Soient $(C_*, M) \in \mathbf{Ob}\mathfrak{Ch}(\mathbf{Ab}) \times \mathbf{Ab}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors il existe un morphisme naturel de groupes abéliens :

$$\begin{aligned} H_n(C_*) \otimes M &\rightarrow H_n(C_* \otimes M) \\ [z] \otimes m &\mapsto [z \otimes m]. \end{aligned}$$

Démonstration. Exercice. $\square$

Exemple 6.124. En général, ce morphisme n'est pas bijectif. Par exemple, considérer le complexe C_* :

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

dont les seuls termes non-triviaux sont en degrés 0, 1. Donc, l'homologie de C_* est $\mathbb{Z}/2$, concentré en degré zéro.

En prenant le produit tensoriel avec $M = \mathbb{Z}/2$, on obtient le complexe $C_* \otimes \mathbb{Z}/2$:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

dont l'homologie est $\mathbb{Z}/2$ en degrés 0 et 1. Ainsi, le morphisme

$$H_*(C_*) \otimes \mathbb{Z}/2 \hookrightarrow H_*(C_* \otimes \mathbb{Z}/2)$$

est injectif mais pas surjectif. Le problème provient du fait que $-\otimes \mathbb{Z}/2$ ne préserve pas les monomorphismes.

Le foncteur $-\otimes M$ est *exact à droite* :

Lemme 6.125. Soient $M \in \text{ObAb}$ et $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ une suite exacte de groupes abéliens, alors la suite

$$A \otimes M \xrightarrow{f \otimes 1_M} B \otimes M \xrightarrow{g \otimes 1_M} C \otimes M \rightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Il est évident que $(g \otimes 1_M)(f \otimes 1_M) = 0$, donc on a bien une suite de morphismes, et le morphisme $g \otimes 1_M$ se factorise à travers un morphisme

$$\overline{g \otimes 1_M} : B \otimes M / \text{image}(f \otimes 1_M) \rightarrow C \otimes M.$$

On construit une section $s : C \otimes M \rightarrow B \otimes M / \text{image}(f \otimes 1_M)$ de $\overline{g \otimes 1_M}$, en posant

$$s(c \otimes m) := [b \otimes m],$$

où $b \in B$ tel que $g(b) = c$ (qui existe, puisque g est surjectif). On vérifie facilement que s est bien défini, en particulier que $s(c \otimes m)$ ne dépend pas du choix de b .

L'existence de la section montre que $g \otimes 1_M$ est surjectif; mais s est également surjectif, car $[b \otimes m] = s(g(b) \otimes m)$. On déduit que $g \otimes 1_M$ induit un isomorphisme $B \otimes M / \text{image}(f \otimes 1_M) \cong C \otimes M$, donc la suite est exacte. $\square$

Remarque 6.126. Le lemme 6.125 se généralise au cas de la catégorie des modules sur un anneau commutatif R et le produit tensoriel $\otimes_R$; le cas précédent correspond à $R = \mathbb{Z}$.

Définition 6.127. Soit R un anneau commutatif. Un R -module M est *plat* si le foncteur $-\otimes_R M$ est exact (si et seulement si $-\otimes_R M$ préserve les monomorphismes).

Exemple 6.128.

- (1) Pour $R = \mathbb{Z}$, les groupes abéliens libres sont plats, puisque le produit tensoriel $\otimes$ commute aux sommes directes $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}}$; par contre un groupe de torsion n'est jamais plat.
- (2) Si $R = \mathbb{K}$ est un corps, alors tout R -module est plat.

Proposition 6.129. Soient R un anneau commutatif, M un R -module plat et $C_* \in \mathfrak{Ch}(R\text{-Mod})$ un complexe de chaînes de R -modules. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme naturel

$$H_n(C_*) \otimes M \rightarrow H_n(C_* \otimes M)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Écrivons Z_n pour les n -cycles et B_n pour les n -bords ; par définition, on dispose de suites exactes courtes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n(C_*) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Puisque M est plat, le foncteur $-\otimes_R M$ nous fournit les suites exactes courtes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z_n \otimes_R M \rightarrow C_n \otimes_R M \rightarrow B_{n-1} \otimes_R M \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow B_n \otimes_R M \rightarrow Z_n \otimes_R M \rightarrow H_n(C_*) \otimes_R M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et on a les identifications $Z_n \otimes M = \text{Ker}(d \otimes 1_M)$ et $B_n \otimes M = \text{Image}(d \otimes 1_M)$ (*exercice : vérifier cette affirmation*).

Ainsi, $(Z_n \otimes M)/(B_n \otimes M) \cong H_n(C_* \otimes M)$, donc la deuxième suite exacte donne l'isomorphisme recherché. $\square$

Exemple 6.130. Le groupe abélien $\mathbb{Q}$ est plat donc, pour tout $C_* \in \mathfrak{Ch}(\text{Ab})$, on a un isomorphisme naturel

$$H_n(C_*) \otimes \mathbb{Q} \cong H_n(C_* \otimes \mathbb{Q}).$$

Remarque 6.131. On va admettre le fait que tous sous-groupe d'un groupe abélien libre est un groupe abélien libre.

Le résultat suivant n'est pas valable pour des anneaux commutatifs quelconque :

Lemme 6.132. *Soit M un groupe abélien. Alors, M admet une résolution libre naturelle de longueur 1*

$$0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

où les L_i sont des groupes abéliens libres.

Démonstration. On prend pour L_0 le groupe abélien libre $\mathbb{Z}[M] := \bigoplus_{m \in M} \mathbb{Z}$, muni de la surjection canonique

$$\varepsilon_M : \mathbb{Z}[M] \rightarrow M$$

$\varepsilon_M[m] = m$. Le groupe L_0 est le noyau de ε_M et donc est un groupe abélien libre, étant un sous-groupe d'un groupe abélien libre. $\square$

Définition 6.133. Soient A, M deux groupes abéliens ; le groupe abélien $\text{Tor}_1(A, M)$ est l'homologie en degré 1 du complexe $A \otimes L_1 \rightarrow A \otimes L_0$, où $L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M$ est la résolution fournie par le lemme 6.132. Autrement dit :

$$\text{Tor}_1(A, M) := \text{Ker}\{A \otimes L_1 \rightarrow A \otimes L_0\}.$$

Lemme 6.134. *Soit M un groupe abélien ; alors $A \mapsto \text{Tor}_1(A, M)$ définit un foncteur*

$$\text{Tor}_1(-, M) : \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}.$$

Démonstration. Conséquence immédiate de la naturalité de la résolution du lemme 6.132. $\square$

Remarque 6.135. Le conoyau $\text{Coker}\{A \otimes L_1 \rightarrow A \otimes L_0\}$ est naturellement isomorphe à $A \otimes M$, par le lemme 6.125.

Exercice 6.136. Soit $0 \rightarrow L'_1 \rightarrow L'_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ une suite exacte courte de groupes abéliens, où L'_1 et L'_0 sont des groupes abéliens libres. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel

$$\text{Tor}_1(A, M) \cong \text{Ker}\{A \otimes L'_1 \rightarrow A \otimes L'_0\}.$$

(Il s'agit d'un cas très particulier d'un résultat standard en homologie algébrique.)

On est maintenant en mesure d'énoncer une version algébrique du *théorème des coefficients universels*.

Théorème 6.137. *Soient M un groupe abélien et C_* un complexe de chaînes de groupes abéliens tel que chaque C_n est un groupe abélien libre. Alors il existe une suite exacte courte naturelle :*

$$0 \rightarrow H_n(C_*) \otimes M \rightarrow H_n(C_* \otimes M) \rightarrow \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(C_*), M) \rightarrow 0$$

qui se scinde (non-naturellement) : $H_n(C_ \otimes M) \cong (H_n(C_*) \otimes M) \oplus \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(C_*), M)$.*

Démonstration. Soit $L_1 \xrightarrow{f} L_0 \rightarrow M$ la résolution libre fournie par le lemme 6.132. Puisque chaque groupe C_n est libre (donc plat), le produit tensoriel $C_* \otimes -$ nous donne une suite exacte courte de complexes

$$0 \rightarrow C_* \otimes L_1 \rightarrow C_* \otimes L_0 \rightarrow C_* \otimes M \rightarrow 0.$$

En passant à l'homologie, on obtient une suite exacte longue et les isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(C_*) \otimes L_1 & \xrightarrow{H_n(C_*) \otimes f} & H_n(C_*) \otimes L_0 & & & & \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong & & & & \\ \dots \longrightarrow & H_n(C_* \otimes L_1) \longrightarrow & H_n(C_* \otimes L_0) \longrightarrow & H_n(C_* \otimes M) \longrightarrow & H_{n-1}(C_* \otimes L_1), & & \end{array}$$

où les isomorphismes verticaux sont fournis par Proposition 6.129. Le noyau de $H_n(C_*) \otimes f$ est, par définition, naturellement isomorphe à $\mathrm{Tor}_1(H_n(C_*), M)$ et le conoyau est $H_n(C_*) \otimes M$; donc la suite exacte longue fournit la suite exacte courte naturelle.

Pour démontrer que la suite exacte courte est scindée, il suffit de construire un rétracte du morphisme $H_n(C_*) \otimes M \hookrightarrow H_n(C_* \otimes M)$ (*exercice : expliquer pourquoi ceci est suffisant*). Considérons la suite exacte courte

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \xrightarrow{d} B_{n-1} \rightarrow 0;$$

le groupe B_{n-1} est un sous-groupe du groupe abélien libre C_{n-1} , donc est libre. Ainsi, il existe une section $s_n : B_{n-1} \rightarrow C_n$. On définit un rétracte $r_n : C_n \rightarrow Z_n$ par $r_n(x) := x - s_n(dx)$. Par composition, on obtient un morphisme de groupes abéliens $\tilde{r}_n : C_n \rightarrow H_n$:

$$C_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n.$$

On vérifie que le morphisme $\tilde{r}_n$ induit un rétracte

$$H_n(C_* \otimes M) \rightarrow H_n(C_*) \otimes M.$$

(*Exercice : fournir les détails.*) □

Ce résultat s'applique notamment au cas des chaînes singulières, donc on obtient le *théorème des coefficients universels* pour l'homologie singulière :

Théorème 6.138. *Soient $M \in \mathrm{ObAb}$ un groupe abélien et $(X, A) \in \mathrm{Ob}\mathfrak{T}^{[2]}$. Alors, il existe une suite exacte courte naturelle :*

$$0 \rightarrow H_n^{\mathrm{sing}}(X, A) \otimes M \rightarrow H_n^{\mathrm{sing}}(X, A; M) \rightarrow \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}^{\mathrm{sing}}(X, A), M) \rightarrow 0$$

qui se scinde (non-naturellement).

7. OBJETS BISIMPLICIAUX ET LE MORPHISME D'ALEXANDER-WHITNEY

Dans cette section, on peut supposer que $\mathcal{A}$ est soit la catégorie **Ab** des groupes abéliens soit la catégorie $R\text{-Mod}$ des R -modules sur un anneau commutatif R .

7.1. Motivation.

Définition 7.1. Pour $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque, la catégorie des *objets bisimpliciaux* $\Delta^{\text{op}}\Delta^{\text{op}}\mathcal{C}$ est la catégorie des foncteurs de $(\Delta \times \Delta)^{\text{op}}$ vers $\mathcal{C}$. (Cette catégorie est équivalente à la catégorie $\Delta^{\text{op}}(\Delta^{\text{op}}\mathcal{C})$ des objets simpliciaux de $\Delta^{\text{op}}\mathcal{C}$.)

Le foncteur $\text{diag} : \Delta^{\text{op}}\Delta^{\text{op}}\mathcal{C} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\mathcal{C}$ est induit par la diagonale $\Delta \rightarrow \Delta \times \Delta$, $[n] \mapsto [n] \times [n]$.

Lemme 7.2. *Le produit d'ensembles induit un foncteur produit extérieur*

$$\overline{\times} : \Delta^{\text{op}}\text{Ens} \times \Delta^{\text{op}}\text{Ens} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\Delta^{\text{op}}\text{Ens}$$

et le produit d'ensembles simpliciaux est donné par $\times = \text{diag} \circ \overline{\times}$.

Démonstration. Évident. □

Lemme 7.3. *Soient X, Y deux espaces topologiques, alors*

$$\text{Sing}(X \times Y) \cong \text{diag}(\text{Sing}(X) \overline{\times} \text{Sing}(Y))$$

dans $\Delta^{\text{op}}\text{Ens}$, donc

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \times Y) \cong C_*(\text{diag}\mathbb{Z}[\text{Sing}(X) \overline{\times} \text{Sing}(Y)]).$$

Démonstration. Par définition, $\text{Sing}_n(X \times Y)$ est l'ensemble des applications continues $\text{Hom}_{\mathfrak{T}}(\Delta_n^{\text{top}}, X \times Y)$. Le produit $X \times Y$ est le produit catégorique, donc $\text{Hom}_{\mathfrak{T}}(\Delta_n^{\text{top}}, X \times Y) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{T}}(\Delta_n^{\text{top}}, X) \times \text{Hom}_{\mathfrak{T}}(\Delta_n^{\text{top}}, Y)$; on vérifie facilement que la structure d'ensemble simplicial est bien la structure diagonale.

Le deuxième énoncé en découle directement, car les groupes abéliens simpliciaux $\text{diag}\mathbb{Z}[\text{Sing}(X) \overline{\times} \text{Sing}(Y)]$ et $\mathbb{Z}[\text{diag}(\text{Sing}(X) \overline{\times} \text{Sing}(Y))]$ sont isomorphes. □

Question 7.4. *Quelle est la relation entre $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \times Y)$ et $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X)$, $\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(Y)$?*

7.2. Complexes doubles.

Définition 7.5. La catégorie des *complexes doubles*² de $\mathcal{A}$ est la catégorie $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{Ch}(\mathcal{A}))$ des complexes de chaînes de la catégorie des complexes de chaînes de $\mathcal{A}$. Explicitement, un objet de $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{Ch}(\mathcal{A}))$ est la donnée d'un objet bigradué $\{C_{p,q} \mid (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ de $\mathcal{A}$, muni de deux différentielles

$$\begin{aligned} d_h &: C_{p,q} \rightarrow C_{p-1,q} \\ d_v &: C_{p,q} \rightarrow C_{p,q-1} \end{aligned}$$

telles que $d_h \circ d_h = 0$, $d_v \circ d_v = 0$ et, $\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} C_{p,q+1} & \xleftarrow{d_h} & C_{p+1,q+1} \\ d_v \downarrow & & \downarrow d_v \\ C_{p,q} & \xleftarrow{d_h} & C_{p+1,q} \end{array}$$

Un morphisme de complexes doubles $(C_{*,*}, d_h, d_v) \rightarrow (C'_{*,*}, d'_h, d'_v)$ est la donnée d'un ensemble de morphismes $\{f_{p,q} : C_{p,q} \rightarrow C'_{p,q} \mid (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ tel que $f_{p,q} \circ d_h = d'_h \circ f_{p+1,q}$ et $f_{p,q} \circ d_v = d'_v \circ f_{p,q+1}$, quelque soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

La catégorie $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$ est la sous-catégorie pleine des objets C tels que $C_{p,q} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$.

2. Attention : la terminologie varie dans la littérature

Remarque 7.6. Il existe une involution $\tau : \mathfrak{Ch}(\mathfrak{Ch}\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{Ch}(\mathfrak{Ch}\mathcal{A})$ définie par $(\tau C)_{p,q} := C_{q,p}$ et $(\tau d)_h = d_v$, $(\tau d)_v = d_h$. Ce foncteur est un *isomorphisme* de catégories.

Définition 7.7. Le foncteur *complexe total*, $\text{Tot}^\oplus : \mathfrak{Ch}\mathfrak{Ch}\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{Ch}\mathcal{A}$ est le foncteur défini sur les objets par

$$\text{Tot}^\oplus(C)_n := \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$$

avec différentielle d induite par

$$C_{p,q} \xrightarrow{d_h + (-1)^p d_v} C_{p-1,q} \oplus C_{p,q-1}.$$

Pour vérifier que $d^2 = 0$, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 C_{p,q} & \xrightarrow{d_h} & C_{p-1,q} & \xrightarrow{d_h} & C_{p-2,q} \\
 \downarrow (-1)^p d_v & & \downarrow (-1)^{p-1} d_v & & \\
 C_{p,q-1} & \xrightarrow{d_h} & C_{p-1,q-1} & & \\
 \downarrow (-1)^p d_v & & & & \\
 C_{p,q-2} & & & &
 \end{array}$$

(Le carré central est anti-commutatif, indiqué par $\ominus$.)

dont le carré anti-commute (indiqué par $\ominus$), en raison du choix des signes.

Remarque 7.8.

- (1) On a fait un choix dans la définition de $\text{Tot}^\oplus$; par exemple, en pré-composant avec l'involution τ , on obtient un autre foncteur qui jouerait le même rôle.
- (2) En général, la somme directe qui intervient dans la définition de $\text{Tot}^\oplus$ n'est pas finie ; c'est pour cela qu'il faut préciser qu'on utilise la somme directe et pas le produit. Lorsqu'on se restreint à la sous-catégorie pleine $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$, la somme directe est finie.

Lemme 7.9. Le foncteur complexe de chaînes associé, $C_* : \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{Ch}\mathcal{A}$ induit un foncteur

$$C_{*,*} : \Delta^{\text{op}}\Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}.$$

Démonstration. Le foncteur $C_{*,*}$ correspond à la composition

$$\Delta^{\text{op}}\Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \cong \Delta^{\text{op}}(\Delta^{\text{op}}\mathcal{A}) \rightarrow \Delta^{\text{op}}(\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\geq 0}(\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}) \cong \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}.$$

(Ici, on utilise implicitement le fait que $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne. On peut donner la définition directement sans faire appel à ce fait.) $\square$

Ainsi, on obtient deux foncteurs de la catégorie des objets bisimpliciaux $\Delta^{\text{op}}\Delta^{\text{op}}\mathcal{A}$ vers $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} & \\
 \text{diag} \nearrow & & \searrow C_* \\
 \Delta^{\text{op}}\Delta^{\text{op}}\mathcal{A} & & \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} \\
 C_{*,*} \searrow & \wr & \nearrow \text{Tot}^\oplus \\
 & \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} &
 \end{array}$$

Question 7.10. Quelle est la relation entre ces deux foncteurs ? (NB Le diagramme ne commute pas en général, même à isomorphisme naturel près.)

7.3. Le théorème d'Eilenberg-Zilber.

Théorème 7.11. *Soit $A \in \text{Ob} \Delta^{\text{op}} \Delta^{\text{op}} \mathcal{A}$; alors les complexes $\text{Tot}^{\oplus}(C_{*,*}A)$ et $C_* \text{diag} A$ de $\mathfrak{Ch}_{\geq 0} \mathcal{A}$ sont naturellement équivalents à homotopie de chaînes près.*

On ne va pas démontrer ce résultat; par contre on explicite les transformations naturelles qui interviennent

$$\begin{aligned} \text{AW} &: C_* \text{diag} A \rightarrow \text{Tot}^{\oplus}(C_{*,*}A) \\ \text{EZ} &: \text{Tot}^{\oplus}(C_{*,*}A) \rightarrow C_* \text{diag} A, \end{aligned}$$

où AW est le morphisme d'Alexander-Whitney et EZ le morphisme d'Eilenberg-Zilber.

Notation 7.12. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, soient $\alpha_{p,q} : [p] \rightarrow [p+q]$ le morphisme défini par $i \mapsto i$ ($i \in \{0, \dots, p\}$) et $\beta_{p,q} : [q] \rightarrow [p+q]$ le morphisme $j \mapsto j+p$ ($j \in \{0, \dots, q\}$).

Lemme 7.13. *Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $A \in \text{Ob} \Delta^{\text{op}} \Delta^{\text{op}} \mathcal{A}$. Alors $\alpha_{p,q}, \beta_{p,q}$ induisent un morphisme de $\mathcal{A}$:*

$$\alpha_{p,q} \beta_{p,q} : A_{p+q, p+q} \rightarrow A_{p,q}.$$

Démonstration. Évident. □

Proposition 7.14. *Soit $A \in \text{Ob} \Delta^{\text{op}} \Delta^{\text{op}} \mathcal{A}$, alors les morphismes α, β induisent un morphisme de complexes de chaînes :*

$$\text{AW} : C_* \text{diag} A \rightarrow \text{Tot}^{\oplus}(C_{*,*}A).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $\text{AW} : A_n \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} A_{p,q}$ est la somme des morphismes $\alpha_{p,q} \beta_{p,q}$. Pour vérifier que AW est un morphisme de complexes de chaînes, on utilise la commutativité des diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} [p-1] & \xrightarrow{\alpha_{p-1,q}} & [n-1] \\ \varepsilon_i \downarrow & & \downarrow \varepsilon_i \\ [p] & \xrightarrow{\alpha_{p,q}} & [n] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} [n-1] & \xleftarrow{\beta_{p,q-1}} & [q-1] \\ \varepsilon_{j+p} \downarrow & & \downarrow \varepsilon_j \\ [n] & \xleftarrow{\beta_{p,q}} & [q]. \end{array}$$

Observer que le décalage ε_{j+p} donne le changement de signe dans la définition de la différentielle du complexe total $\text{Tot}^{\oplus}$. (*Exercice : vérifier les détails.*) □

On peut considérer que le morphisme d'Eilenberg-Zilber est d'origine 'géométrique', et provient de la décomposition de $\Delta_p^{\text{top}} \times \Delta_q^{\text{top}}$ en n -simplexes (ou $n = p+q$). Cette décomposition se comprend à l'aide de l'homéomorphisme

$$\Delta_p^{\text{top}} \times \Delta_q^{\text{top}} \cong |\Delta_p \times \Delta_q|.$$

Donc, il suffit de comprendre l'ensemble des n -simplexes non-dégénérés de $\Delta_p \times \Delta_q$. Un n -simplexe de $\Delta_p \times \Delta_q$ est la donnée de deux morphismes de Δ :

$$\begin{aligned} \varphi &: [n] \rightarrow [p] \\ \theta &: [n] \rightarrow [q], \end{aligned}$$

qui correspondent à des applications $\varphi : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, p\}$ et $\theta : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, q\}$. Le n -simplexe est non-dégénéré si et seulement si, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$:

$$\varphi(i+1) + \theta(i+1) = \varphi(i) + \theta(i) + 1.$$

De manière équivalente, (φ, θ) correspond à une permutation 'battage' :

$$\sigma_{\varphi, \theta} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}.$$

Explicitement :

$$\sigma_{\varphi, \theta}(i) := \begin{cases} \inf(\varphi^{-1}(i)) & 1 \leq i \leq p \\ \inf(\theta^{-1}(i-p)) & p+1 \leq i \leq p+q. \end{cases}$$

Le couple de morphismes (φ, θ) induit

$$\sigma_{\varphi, \theta}^* : A_{p,q} \rightarrow A_{n,n}.$$

Définition 7.15. Le morphisme d'Eilenberg-Zilber

$$\text{EZ} : \text{Tot}^\oplus(C_{*,*}A) \rightarrow C_*\text{diag}A,$$

est le morphisme $\bigoplus_{p+q=n} A_{p,q} \rightarrow A_{n,n}$ donné par

$$\bigoplus_{p+q=n} \bigoplus_{\varphi, \theta} (-1)^{\text{signe}(\sigma_{\varphi, \theta})} \sigma_{\varphi, \theta}^*.$$

Exercice 7.16. (Facultatif.) Vérifier que EZ est un morphisme de complexes de chaînes.

7.4. Produit tensoriel de complexes. On se restreint dans cette section aux complexes de $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$; cette restriction n'est pas essentielle.

Lemme 7.17. Soit R un anneau commutatif. Le produit tensoriel $\otimes_R : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ induit des produits tensoriels extérieurs :

$$\begin{aligned} \overline{\otimes}_R & : \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} \times \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} \\ \overline{\otimes}_R & : \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \times \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\Delta^{\text{op}}\mathcal{A}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$.

De plus, le diagramme suivant de foncteurs commute à isomorphisme naturel près :

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \times \Delta^{\text{op}}\mathcal{A} & \xrightarrow{\overline{\otimes}_R} & \Delta^{\text{op}}\Delta^{\text{op}}\mathcal{A} \\ C_* \times C_* \downarrow & & \downarrow C_{*,*} \\ \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} \times \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} & \xrightarrow{\overline{\otimes}_R} & \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}. \end{array}$$

Démonstration. Exercice. □

Définition 7.18. Soient R un anneau commutatif et $\mathcal{A}$ la catégorie $R\text{-Mod}$. Le produit tensoriel interne de complexes est le foncteur

$$\text{Tot}^\oplus \circ \overline{\otimes}_R : \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} \times \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}.$$

Explicitement, pour $C_\bullet, D_\bullet$ deux complexes de R -modules, $C \otimes_R D$ est le complexe $(C \otimes_R D)_n := \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_R D_q$ avec différentielle induite par

$$C_p \otimes_R D_q \xrightarrow{d_C \otimes 1_D + (-1)^p 1_C \otimes d_D} (C_{p-1} \otimes_R D_q) \oplus (C_p \otimes_R D_{q-1}).$$

Remarque 7.19. Le foncteur $\text{const} : \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$ envoie un objet M au complexe M concentré en degré zéro. Le produit tensoriel de la Définition 7.18 est compatible avec le foncteur introduit dans Lemme 6.120, car il existe un isomorphisme naturel

$$C_* \otimes M \cong C_* \otimes \text{const}M.$$

Proposition 7.20. Soient $C, D \in \text{Ob}\mathfrak{Ch}_{\geq 0}\mathcal{A}$ deux complexes de R -modules. Alors, il existe un morphisme naturel

$$H_p(C) \otimes_R H_q(D) \rightarrow H_{p+q}(C \otimes_R D)$$

induit par $[z] \otimes [w] \mapsto [z \otimes w]$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 7.21. Considérer le complexe de groupes abéliens $C := \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$, concentré en degrés 0, 1. Alors l'homologie de C est $\mathbb{Z}/2$, concentré en degré zéro. On peut calculer (*exercice !*) facilement que

$$H_n(C \otimes C) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & n \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $H_*(C) \otimes H_*(C) \rightarrow H_*(C \otimes C)$ est un monomorphisme mais n'est pas un isomorphisme.

7.5. Le morphisme d'Alexander-Whitney topologique. L'exemple fondamental qui nous intéresse provient des chaînes singulières (ici on prend $R = \mathbb{Z}$) :

Lemme 7.22. *Soient X, Y deux espaces topologiques. Alors, il existe des isomorphismes naturels de complexes de chaînes*

$$\begin{aligned} \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \otimes \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(Y) &\cong \text{Tot}^{\oplus}(\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \overline{\otimes} \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(Y)) \\ &\cong \text{Tot}^{\oplus} C_{*,*}(\mathbb{Z}[\text{Sing}(X) \times \text{Sing}(Y)]). \end{aligned}$$

Démonstration. Conséquence immédiate des définitions et du Lemme 7.17 et l'isomorphisme des groupes abéliens bisimpliciaux :

$$\mathbb{Z}[\text{Sing}(X) \overline{\times} \text{Sing}(Y)] \cong \mathbb{Z}[\text{Sing}(X)] \overline{\otimes} \mathbb{Z}[\text{Sing}(Y)].$$

□

Rappeler qu'il existe un isomorphisme naturel

$$\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \times Y) \cong C_* \text{diag} \mathbb{Z}[\text{Sing}(X) \times \text{Sing}(Y)].$$

Ainsi, le théorème d'Eilenberg-Zilber, 7.11, nous fournit le résultat suivant :

Théorème 7.23. *Soient X, Y deux espaces topologiques. Alors, le morphisme d'Alexander-Whitney induit un diagramme commutatif naturel :*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \times Y) & \xrightarrow{\text{AW}_{X,Y}} & \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \otimes \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(Y) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ C_* \text{diag} \mathbb{Z}[\text{Sing}(X) \times \text{Sing}(Y)] & \xrightarrow{\text{AW}} & \text{Tot}^{\oplus} C_{*,*}(\mathbb{Z}[\text{Sing}(X) \times \text{Sing}(Y)]). \end{array}$$

dont les morphismes AW sont des équivalences d'homotopie (à chaînes) près.

En particulier, $\text{AW}_{X,Y} : \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \times Y) \rightarrow \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \otimes \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(Y)$ induit un isomorphisme en homologie.

Exercice 7.24. Expliciter le morphisme $\text{AW}_{X,Y}$.

Corollaire 7.25. *Soient X, Y deux espaces topologiques et R un anneau commutatif. Il existe un morphisme naturel*

$$H_p^{\text{sing}}(X; R) \otimes_R H_q^{\text{sing}}(Y; R) \rightarrow H_{p+q}^{\text{sing}}(X \times Y; R).$$

Démonstration. Exercice.

□

Remarque 7.26. Le morphisme d'Alexander-Whitney est associatif au sens suivant ; soient X, Y, Z trois espaces topologiques, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \times Y \times Z) & \xrightarrow{\text{AW}_{X \times Y, Z}} & \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X \times Y) \otimes \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(Z) \\ \text{AW}_{X, Y \times Z} \downarrow & & \downarrow \text{AW}_{X, Y} \otimes 1 \\ \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \otimes \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(Y \times Z) & \xrightarrow{1 \otimes \text{AW}_{Y, Z}} & \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X) \otimes \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(Y) \otimes \mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(Z). \end{array}$$

Remarque 7.27. Soient X un espace topologique et R un anneau commutatif; la diagonale $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ induit un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H_n^{\text{sing}}(X; R) & \xrightarrow{(\Delta_X)_*} & H_n^{\text{sing}}(X \times X; R) \\ & \searrow \times & \uparrow \\ & \bigoplus_{p+q=n} H_p^{\text{sing}}(X; R) \otimes_R H_q^{\text{sing}}(X; R). & \end{array}$$

En général, il n'existe pas un relèvement (la flèche en pointillés) qui rend commutatif ce diagramme.

Remarque 7.28. Si $H_p^{\text{sing}}(X; R)$ est un R -module plat, $\forall p \in \mathbb{N}$, alors le morphisme

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p^{\text{sing}}(X; R) \otimes_R H_q^{\text{sing}}(Y; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X \times Y; R)$$

est un isomorphisme. Par exemple, ceci est le cas si $R = \mathbb{K}$ est un corps.

En ce cas, $(\Delta_X)_*$ munit $H_*(X; R)$ de la structure d'une R -cogèbre (ou coalgèbre); cette structure est la notion duale à celle d'une R -algèbre.

8. COHOMOLOGIE

Dans cette section, on peut supposer que $\mathcal{A}$ est soit la catégorie $\mathbf{Ab}$ des groupes abéliens soit la catégorie $R\text{-Mod}$ des R -modules sur un anneau commutatif R . Une partie des résultats sont valables pour n'importe quelle catégorie abélienne.

8.1. La catégorie des cochaînes.

Définition 8.1.

- (1) La catégorie $\mathfrak{CoCh}(\mathcal{A})$ des *cochaînes de $\mathcal{A}$* est la catégorie ayant pour objets $\{C^n, d : C^n \rightarrow C^{n+1} | n \in \mathbb{Z}\}$ tels que $d^2 = 0$. Un morphisme de complexes de cochaînes $f : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ est un ensemble de morphismes $\{f^n : C^n \rightarrow D^n\}$ tel que $f^{n+1}d_C = d_D f^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.
- (2) La catégorie $\mathfrak{CoCh}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ est la sous-catégorie pleine des objets $C^\bullet$ tels que $C^p = 0$ si $p < 0$.
- (3) L'objet des n -cocycles Z^n de $C^\bullet$ est $\ker\{C^n \xrightarrow{d} C^{n+1}\}$ et l'objet des n -cobords B^n de $C^\bullet$ est $\text{Im}\{C^{n-1} \xrightarrow{d} C^n\}$, de sorte que $B^n \subset Z^n \subset C^n$.
- (4) La n -ième objet de cohomologie de $C^\bullet$ est $H^n(C) := Z^n/B^n$.

Proposition 8.2. *La catégorie $\mathfrak{CoCh}(\mathcal{A})$ est isomorphe (plus fort que équivalente) à la catégorie $\mathfrak{Ch}(\mathcal{A})$ via l'association $C^\bullet \mapsto C_\bullet$, ou $C_n := C^{-n}$. Cet isomorphisme de catégories se restreint à un isomorphisme de catégories :*

$$\mathfrak{CoCh}^{\geq 0}(\mathcal{A}) \cong \mathfrak{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A}).$$

De plus, on a un isomorphisme naturel $H^n(C^\bullet) \cong H_n(C_\bullet)$.

Démonstration. Exercice. □

8.2. Le complexe des morphismes.

Définition 8.3. Soient $C, D \in \text{Ob}\mathfrak{Ch}\mathcal{A}$; le complexe $\text{Hom}(C, D) \in \mathfrak{Ch}\mathcal{A}$ est défini par

$$\text{Hom}(C, D)_n := \prod_p \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_p, D_{p+n})$$

muni de la différentielle $d = d_1 + d_2$, où

$$d_1 := (-1)^{n+1}(d_C)^* : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_p, D_{p+n}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_{p+1}, D_{p+n})$$

et

$$d_2 := (d_D)_* : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_p, D_{p+n}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C_p, D_{p+n-1}).$$

Remarque 8.4. La vérification que $d^2 = 0$ dépend du fait que le diagramme suivant *anti-commute* :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(C_p, D_{p+n}) & \xrightarrow{(-1)^{n+1}d_C^*} & \text{Hom}(C_{p+1}, D_{p+n}) \\ (d_D)_* \downarrow & \ominus & \downarrow (d_D)_* \\ \text{Hom}(C_p, D_{p+n-1}) & \xrightarrow{(-1)^n d_C^*} & \text{Hom}(C_{p+1}, D_{p+n-1}), \end{array}$$

par le choix des signes.

Remarque 8.5. Il existe plusieurs choix possibles des signes qui interviennent dans la définition³.

Proposition 8.6. *L'association Hom définit un foncteur*

$$\text{Hom}(-, -) : \mathfrak{Ch}\mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathfrak{Ch}\mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{Ch}\mathcal{A}.$$

3. Dans cette section, on a suivi les conventions utilisées dans [tD08]

Démonstration. Exercice. $\square$

Exercice 8.7. Soient $C, D \in \text{Ob}\mathfrak{Ch}\mathcal{A}$ et $f \in \text{Hom}(C, D)_n$. Montrer que f est un morphisme de complexes de chaînes si et seulement si f est un cycle.

Exemple 8.8. Soit $C \in \text{Ob}\mathfrak{Ch}_{\geq 0}(R\text{-Mod})$ et M un R -module, alors

$$\text{Hom}(C, \text{const}M)_n = \begin{cases} 0 & n > 0 \\ \text{Hom}_R(C_{-n}, M) & n \leq 0. \end{cases}$$

et la différentielle $\text{Hom}_R(C_{-n}, M) \rightarrow \text{Hom}_R(C_{-(n+1)}, M)$ est $(-1)^n(d_C)^*$.

Il est commode de ré-indexer, en posant :

$$\text{Hom}(C, M)^n := \text{Hom}(C, M)_{-n}$$

de sorte que la différentielle est de la forme :

$$\text{Hom}(C, M)^n \rightarrow \text{Hom}(C, M)^{n+1}$$

donc augmente le degré par 1 ; ainsi on obtient un complexe de *cochaînes*.

Corollaire 8.9. Le foncteur $\text{Hom}_R(-, M)$ induit :

$$\text{Hom}_R(-, M) : \mathfrak{Ch}(R\text{-Mod})^{\text{op}} \times R\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{CoCh}(R\text{-Mod}),$$

qui se restreint à :

$$\text{Hom}_R(-, M) : \mathfrak{Ch}_{\geq 0}(R\text{-Mod})^{\text{op}} \times R\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{CoCh}^{\geq 0}(R\text{-Mod}).$$

8.3. Produits tensoriels. Le produit tensoriel $\otimes_R : \mathfrak{Ch}_{\geq 0}(R\text{-Mod}) \times \mathfrak{Ch}_{\geq 0}(R\text{-Mod}) \rightarrow \mathfrak{Ch}_{\geq 0}(R\text{-Mod})$ a un analogue pour la catégorie $\mathfrak{CoCh}^{\geq 0}(R\text{-Mod})$:

$$\otimes_R : \mathfrak{CoCh}^{\geq 0}(R\text{-Mod}) \times \mathfrak{CoCh}^{\geq 0}(R\text{-Mod}) \rightarrow \mathfrak{CoCh}^{\geq 0}(R\text{-Mod}).$$

Exercice 8.10. Expliciter la définition du produit tensoriel de deux complexes de cochaînes.

On a le résultat de compatibilité entre les produits tensoriels $\otimes_R$ suivant :

Proposition 8.11. Soient $C, D \in \text{Ob}\mathfrak{Ch}_{\geq 0}(R\text{-Mod})$. Alors, il existe un morphisme naturel de complexes de chaînes

$$\begin{aligned} \text{Hom}(C, R) \otimes_R \text{Hom}(D, R) &\rightarrow \text{Hom}(C \otimes_R D, R) \\ [f] \otimes_R [g] &\mapsto (-1)^{|f||g|}[f \otimes g], \end{aligned}$$

où $f \in \text{Hom}_R(C_{|f|}, R)$ et $g \in \text{Hom}_R(C_{|g|}, R)$.

De plus, si $\forall p, q$ C_p, D_q sont des R -modules libres finiment-engendrés, alors ce morphisme est un isomorphisme.

Démonstration. Exercice ! (Il s'agit d'un bon exercice de vérification des signes, en utilisant les définitions des objets qui interviennent.) $\square$

8.4. La cohomologie singulière.

Définition 8.12. Soit M un groupe abélien.

- (1) Le foncteur *complexe de cochaînes singulières à coefficients dans M* est le foncteur $\mathfrak{T}^{[2]^{\text{op}}} \rightarrow \mathfrak{CoCh}^{\geq 0}(\text{Ab})$ défini par

$$\mathfrak{CoCh}_{\text{sing}}(-; M) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(-), M).$$

- (2) Le n -ième groupe de cohomologie singulière à coefficients dans M , $H_{\text{sing}}^n(-; M) : \mathfrak{T}^{[2]^{\text{op}}} \rightarrow \text{Ab}$, est le foncteur

$$(X, A) \mapsto H^n(\mathfrak{CoCh}_{\text{sing}}(X, A; M)) = H^n(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{Ch}^{\text{sing}}(X, A), M)).$$

On écrit $H_{\text{sing}}^n(X; M)$ pour le groupe de cohomologie singulière $H_{\text{sing}}^n(X, \emptyset; M)$ (respectivement $\mathfrak{CoCh}_{\text{sing}}(X; M)$ à la place de $\mathfrak{CoCh}_{\text{sing}}(X, \emptyset; M)$).

Exercice 8.13. Soit M un groupe abélien.

- (1) Montrer que $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}^n(X; M)$ est le groupe $M^{\text{Sing}_n(X)}$ des applications d'ensembles de l'ensemble des n -simplexes singuliers de X , $\text{Sing}_n X$ vers le groupe abélien M , la structure de groupé étant induite par celle de M .
- (2) Montrer que $[n] \mapsto M^{\text{Sing}_n(X)}$ est un groupe abélien cosimplicial; définir le complexe de cochaînes $C^*(B^\bullet)$ associé à un groupe abélien cosimplicial $B^\bullet$ et démontrer que $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}(X; M) \cong C^*(M^{\text{Sing}(X)})$.

Exercice 8.14. Formuler les axiomes d'Eilenberg-Steenrod pour une théorie de cohomologie et démontrer que $H_{\text{sing}}^*(-; M)$ est une théorie de cohomologie.

8.5. Le cup produit. Un avantage important de la *cohomologie* par rapport à l'*homologie* est qu'elle admet un cup produit (sans besoin d'hypothèse supplémentaire). On ne démontrera pas le résultat suivant, mais la définition du cup produit sera donnée :

Théorème 8.15. *Soit R un anneau commutatif. Alors, le foncteur*

$$H_{\text{sing}}^*(-; R) : \mathfrak{T}^{\text{op}} \rightarrow \text{gr}R\text{-Mod}$$

prend ses valeurs dans la catégorie des R -algèbres graduées commutatives.

Pour préciser, pour X un espace topologique, il existe un cup produit naturel

$$\begin{aligned} \cup & : H_{\text{sing}}^p(X; R) \otimes_R H_{\text{sing}}^q(X; R) \rightarrow H_{\text{sing}}^{p+q}(X; R) \\ x \otimes y & \mapsto x \cup y, \end{aligned}$$

qui est associatif et unitaire par rapport au morphisme de R -modules $R \cong H_{\text{sing}}^0(; R) \rightarrow H_{\text{sing}}^0(X; R)$ induit par la projection $X \rightarrow *$. De plus, le produit $\cup$ est commutatif au sens gradué :*

$$x \cup y = (-1)^{pq} y \cup x.$$

Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, le morphisme induit en cohomologie $H_{\text{sing}}^(f) : H_{\text{sing}}^*(Y; R) \rightarrow H_{\text{sing}}^*(X; R)$ est un morphisme de R -algèbres qui ne dépend que de la classe d'homotopie de f .*

Le cup produit est induit par un cup-produit extérieur au niveau des complexes de cochaînes :

Définition 8.16. Soient X, Y deux espaces topologiques. Le *cup produit extérieur* est le morphisme de complexes de cochaînes

$$\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}(X; R) \otimes_R \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}(Y; R) \rightarrow \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}(X \times Y; R)$$

qui est donné par la composition

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}(X; R) \otimes_R \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}(Y; R) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{C}\mathfrak{h}^{\text{sing}}(X), R) \otimes_R \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{C}\mathfrak{h}^{\text{sing}}(Y), R) \\ & & \downarrow \\ & & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{C}\mathfrak{h}^{\text{sing}}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{C}\mathfrak{h}^{\text{sing}}(Y), R) \\ & & \downarrow \text{AW}_{X,Y}^* \\ \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}(X \times Y; R) & \xleftarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{C}\mathfrak{h}^{\text{sing}}(X \times Y), R), \end{array}$$

dont le premier morphisme vertical est fourni par la Proposition 8.11 et les isomorphismes proviennent de la définition de $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}$.

Définition 8.17. Soient X un espace topologique et R un anneau commutatif; le *cup produit intérieur* (au niveau des cochaînes singulières) est le morphisme de complexes de cochaînes :

$$\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}(X; R) \otimes_R \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}(X; R) \rightarrow \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}(X; R)$$

fourni par la composition du morphisme cup produit extérieur de la Définition 8.16 (pour $Y = X$) avec le morphisme $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{C}\mathfrak{h}_{\text{sing}}(\Delta_X; R)$ induit par la diagonale $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$.

Exercice 8.18. Donner une description explicite (et directe) du cup produit intérieur de la définition 8.17.

Remarque 8.19. Le cup produit de la cohomologie singulière (Théorème 8.15) est induit par le cup produit de la définition 8.17.

Exemple 8.20. L'algèbre $H_{\text{sing}}^*(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$ est isomorphe à l'algèbre de polynômes tronquée :

$$\mathbb{Z}[x]/(x^3 = 0),$$

où x est une classe de degré 2.

En particulier, on peut en déduire facilement que $\mathbb{C}P^2$ n'a pas le même type d'homotopie que $S^2 \vee S^4$, bien que leurs groupes d'homologie sont isomorphes.

Exercice : démontrer que $H_{\text{sing}}^*(S^2 \vee S^4; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\langle 1, u, v \rangle$, où $|u| = 2$ et $|v| = 4$ et $u^2 = 0$.

Remarque 8.21. Cet exemple montre que la cohomologie singulière, munie du cup produit, est un invariant plus fin que la cohomologie singulière considérée simplement comme foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens gradués. On peut obtenir des invariants encore plus fins en considérant les *opérations cohomologiques*.

RÉFÉRENCES

- [Dol95] Albrecht Dold, *Lectures on algebraic topology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1972 edition. MR MR1335915 (96c :55001)
- [FT10] Yves Félix and Daniel Tanré, *Topologie algébrique*, Dunod, Paris, 2010.
- [GJ99] Paul G. Goerss and John F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999. MR 1711612 (2001d :55012)
- [GM03] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin, *Methods of homological algebra*, second ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. MR MR1950475 (2003m :18001)
- [Gra75] Brayton Gray, *Homotopy theory*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975, An introduction to algebraic topology, Pure and Applied Mathematics, Vol. 64. MR MR0402714 (53 #6528)
- [Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR MR1867354 (2002k :55001)
- [HS97] P. J. Hilton and U. Stambach, *A course in homological algebra*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 4, Springer-Verlag, New York, 1997. MR MR1438546 (97k :18001)
- [May92] J. Peter May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992, Reprint of the 1967 original. MR MR1206474 (93m :55025)
- [May99] J. P. May, *A concise course in algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999. MR MR1702278 (2000h :55002)
- [Sel97] Paul Selick, *Introduction to homotopy theory*, Fields Institute Monographs, vol. 9, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. MR MR1450595 (98h :55001)
- [Spa81] Edwin H. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, New York, 1981, Corrected reprint. MR MR666554 (83i :55001)
- [Swi02] Robert M. Switzer, *Algebraic topology—homotopy and homology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002, Reprint of the 1975 original [Springer, New York; MR0385836 (52 #6695)]. MR MR1886843
- [td08] Tammo tom Dieck, *Algebraic topology*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008. MR 2456045 (2009f :55001)
- [Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR MR1269324 (95f :18001)

LABORATOIRE ANALYSE, GÉOMÉTRIE ET APPLICATIONS, UMR 7539, INSTITUT GALILÉE,
 UNIVERSITÉ PARIS 13, 93430 VILLETANEUSE, FRANCE
E-mail address: `powell@math.univ-paris13.fr`