(1) Soit $f : X \to Y$ une application continue ; exprimer $\pi_0(C_f)$ en termes de $\pi_0(X)$ et $\pi_0(Y)$. Montrer que, si $|\pi_0(X)| < |\pi_0(Y)| < \infty$, C_f n'est pas connexe par arcs.

(2) Soient $f, g : X \rightrightarrows S^n$ deux applications continues ($n \geq 1$) telles que, $\forall x \in X$, $f(x) \neq -g(x)$. Montrer que $f \simeq g$.

(3) Soient X un espace topologique localement connexe par arcs, $x_0 \in X$ un point et X_0 la composante connexe qui contient x_0. Montrer que $\pi_1(X_0, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ est un isomorphisme.

(4) Soit $(X, *)$ un espace topologique pointé muni d'une application continue $\mu : X \times X \to X$ telle que les deux applications continues $\mu(*, -), \mu(-, *) : X \to X$ sont homotopes à 1_X relativement à $*$. Montrer que μ induit une application (ensembliste)

$$\mu_* : \pi_1(X, *) \times \pi_1(X, *) \to \pi_1(X, *).$$

Si α, β sont deux lacets de X basés à $*$, montrer que $\mu_*([\alpha], [\beta]) = [\alpha].[\beta] = [\beta].[\alpha]$. En déduire que $\pi_1(X, *)$ est un groupe abélien.

Soit ΩX l'espace des lacets basés à $*$, pointé par le lacet constant c_*. Montrer que $\pi_1(\Omega X, c_*)$ est un groupe abélien.

(5) Montrer que le tore $S^1 \times S^1$ et la bouteille de Klein K n'ont pas le même type d'homotopie. (La bouteille de Klein est l'espace quotient $K := S^1 \times I/\sim$ où $(y, 0) \sim (\lambda(y), 1)$, $\lambda : S^1 \to S^1$ le lacet (basé) induit par $I \to I$, $t \mapsto 1 - t$.)

(6) Soient X un espace topologique connexe par arcs et $f, g : S^0 \rightrightarrows X$ deux applications (nécéssairement continues). Montrer que les cônes C_f, C_g ont le même type d'homotopie.

Prendre $X = S^2$ et $f : S^0 \hookrightarrow X$ l'inclusion des pôles nord et sud. Calculer $\pi_1(C_f, x)$, x un point quelconque de C_f.

(7) En considérant les sous-espaces de $S^3 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 | \, ||\underline{x}|| = 1\}$ donnés par $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2}$ (respectivement $x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2}$), montrer qu'il existe un homéomorphisme

$$S^3 \cong (S^1 \times B^2) \cup_{S^1 \times S^1} (B^2 \times S^1).$$

Le tore $T \cong S^1 \times S^1$ est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par l'action du sous-groupe discret $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ (tels que $pq \neq 0$), définir $C \hookrightarrow T \subset S^3$ par l'image de la droite affine $qy = px$.

Calculer $\pi_1(S^3 \backslash C)$ en utilisant le théorème de Seifert et van Kampen.

(8) Soient $\tilde{X}_1 \to X_1$, $\tilde{X}_2 \to X_2$ deux revêtements, où $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ sont simplement connexes et localement connexes par arcs. Si X_1 et X_2 ont le même type d'homotopie, montrer que $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ ont le même type d'homotopie.

(9) Décrire les revêtements universels de
   (a) $S^2 \cup (\{0\} \times [-1, 1])$;
   (b) $S^2 \vee (S^1 \times S^1)$.

(10) Construire un espace topologique pointé (X, x) tel que $\pi_1(X, x) \cong \mathfrak{S}_3$, le groupe symétrique sur $\{1, 2, 3\}$. (Rappel : $\mathfrak{S}_3$ est engendré par les transpositions $(1, 2)$, $(2, 3)$.)

(11) Décrire le revêtement universel de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$.

(12) Soient G_1, G_2 deux groupes discrets. Montrer qu'une action de $G_1 * G_2$ sur un ensemble X est déterminé par sa restriction (lelong des monomorphismes $G_1 \hookrightarrow G_1 * G_2 \hookleftarrow G_2$ aux actions de G_1 et G_2 sur X.

Classifier les revêtements connexes (à isomorphisme près) de $S^1 \vee S^1$:

(a) à 2 feuillets ;

(b) à 3 feuillets.

Classifier les classes de conjugaison des sous-groupes d'indexe 3 de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(13) Soient (X, x) un espace topologique pointé qui est connexe et localement connexe par arcs et $p : \tilde{Y} \to Y$ un revêtement universel. Montrer qu'il existe un relèvement $\tilde{f} : X \to \tilde{Y}$ d'une application continue $f : X \to Y$ tel que $\tilde{f}(x) = u$ si et seulement si $p(u) = f(x)$ et $\pi_1(f) : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ est le morphisme trivial.

Montrer que, si $\pi_1(X, x)$ est un groupe de torsion, alors toute application continue $X \to S^1$ est homotopiquement triviale.

(14) Décrire le revêtement de $S^1 \vee S^1$ qui correspond au sous-groupe distingué de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle$ engendré par a^2, b^2 et $(ab)^3$.

Calculer le groupe d'automorphismes du revêtement.

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539, Institut Galilée, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse, France

E-mail address: powell@math.univ-paris13.fr