

Géométrie analytique – 2025-2026

FEUILLE D'EXERCICES N° 4

Dans tous les exercices, on se place dans l'espace affine $\mathbb{A}^3$ ou dans l'espace affine euclidien $\mathbb{E}^3$. Ce dernier est ou peut être muni d'un repère orthonormé.

Géométrie dans l'espace

Exercice 1. Trouver un système d'équations paramétriques pour chacun des plans suivants (décrits par des équations cartésiennes).

$$(i) \mathcal{P} : x + 3y - z = 1 \quad (ii) \mathcal{P} : x - 2y + 4z - 3 = 0 \quad (iii) \mathcal{P} : -3y + 2z = 2$$

Exercice 2. Trouver une équation cartésienne pour chacun des plans suivants (décrits par des systèmes d'équations paramétriques en $s, t \in \mathbb{R}$).

$$(i) \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 1 + s + t \\ z = 1 + 4s + 3t \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x = 2 - 3s + t \\ y = s - t \\ z = -1 + s - 4t \end{cases} \quad (iii) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Dans (iii), il faut discuter la configuration en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$. Y a-t-il un (ou des) plan(s) apparaissant aussi dans l'exercice précédent ?

Exercice 3. Trouver une équation cartésienne pour chacun des plans suivants.

- 1) passant par le point $A = (1, 1, -1)$ et dirigé par les vecteurs $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ et $\mathbf{v} = (-2, 2, 1)$
- 2) contenant les points $(4, -1, 2)$, $(3, 3, 1)$ et $(3, 2, 0)$
- 3) contenant les points¹ $(3, 5, -2)$, $(1, -1, -6)$ et $(1, 1, a)$
- 4) contenant le point $(4, 3, 1)$ et parallèle au plan défini par $2x - y + 3z - 5 = 0$
- 5) contenant le point $(3, -4, 2)$ et ne coupant pas le plan $5x - 4y + z - 7 = 0$
- 6) passant par $(1, -1, 2)$ et ayant $\mathbf{n} = (2, -3, 1)$ comme vecteur normal
- 7) passant par $(1, -1, 2)$ et ayant $\mathbf{n} = (4, -3, -2)$ comme vecteur normal
- 8) contenant $(4, -1, 2)$ et étant perpendiculaire à la droite passant par $(2, 3, 0)$ et $(-1, 4, 5)$
- 9) passant par le milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à (AB) , où $A = (3, 2, -1)$ et $B = (4, 0, 5)$
- 10) passant par $(1, 1, 0)$ et $(1, 3, -2)$ et parallèle à l'axe Oy
- 11) passant par $(5, 3, 7)$ et $(1, 1, 1)$ et perpendiculaire à $x - y - 4 = 0$ (Deux plans sont perpendiculaires s'ils ont des vecteurs normaux orthogonaux.)
- 12) passant par $(1, 1, 0)$ et perpendiculaire à l'axe Oy
- 13) passant par $(5, 5, -4)$ et parallèle au plan passant par $(2, 3, -1)$, $(0, 1, -3)$ et $(1, a, -2)$.

Exercice 4. Trouver des équations paramétriques pour chacune des droites suivantes. Puis, présenter chacune de ces droites comme intersection de deux plans dans l'espace affine.

- 1) passant par $(2, 2, 1)$ et perpendiculaire au plan $3x - 2y + z - 6 = 0$
- 2) passant par $(2, 2, -1)$ et parallèle aux plans $x + y - z = 3$ et $2x - 2y + 3z = 0$
- 3) passant par $(5, 5, -4)$ et perpendiculaire au plan passant par $(2, 3, -1)$, $(0, 1, -2)$ et $(1, -1, 1)$
- 4) passant par l'origine, contenue dans le plan $x - 2y + z = 0$ et orthogonale au vecteur $\mathbf{v} = (3, 4, 2)$
- 5) passant par $(3, 2, -4)$, horizontale et contenue dans le plan $x - y + 2z = -7$.

¹On pourrait essayer aussi le cas quand le dernier point est $(2, 2, a)$.

Exercice 5. Déterminer les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les deux plans définissent une droite. Dans ce cas trouver des équations paramétriques pour la droite.

- 1) $\mathcal{P}_1 : x + 3y - 4z = 4$ et $\mathcal{P}_2 : 5x - ay + (a - 5)z = -1$
- 2) $\mathcal{P}_1 : 3x - 2y + z = 2$ et $\mathcal{P}_2 : (a^2 - 1)x - ay + (a^2 - 3)z = 2$

Exercice 6. On considère le plan $\mathcal{P} : 2x + 2y - z = 3$. Trouver une équation pour un plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{P}'$ contienne un point A avec $d(A, \mathcal{P}) = 1$.

Exercice 7. On considère les plans qui passent par $(2, 3, 4)$ et sont parallèles à la droite

$$\mathcal{D} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- 1) Trouver une équation cartésienne pour le plan qui passe aussi par $(2, -1, 3)$.
- 2) Dans la famille considérée, on se restreint aux plans pour lesquels une équation cartésienne s'écrit $ax + by + z + d = 0$. Déterminer b et d en fonction de a .
- 3) Existe-t-il dans la famille initiale un plan dont aucune équation ne peut s'écrire sous la forme $ax + by + z + d = 0$?

Exercice 8. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 9.

- 1) Calculer le produit vectoriel de $\mathbf{u} = (-1, 2, 5)$ et $\mathbf{v} = (2, 0, -3)$. De même pour $\mathbf{u} = (-1, -3, 4)$ et $\mathbf{v} = (5, 6, -2)$. Appliquer les calculs précédents, pour répondre à la question suivante : si $A = (-2, 1, 1)$ et si $\mathcal{P}$ est le plan passant par A et ayant $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ comme vecteurs directeurs, trouver une paramétrisation de la droite passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
- 2) Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ une base orthonormée directe de l'espace $\mathbb{E}^3$. Calculer $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ pour $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ et $\mathbf{v} = -2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Même question pour $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ et $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.
- 3) Calculer le produit mixte (c'est-à-dire le déterminant) de $\mathbf{u} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (1, -2, -3)$ et $\mathbf{w} = (1, 5, 0)$.

Exercice 10. Soient les points $A = (1, -1, 1)$, $B = (-m, 4, 2)$, $C = (-1, m, 3)$ et $D = (2, 1, 4)$.

- 1) Pour quelles valeurs du paramètre réel m les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles (ou coplanaires) ?
- 2) Si $m = -1$, lequel des deux triangles $[ABD]$ et $[ACD]$ a l'aire la plus grande ?
- 3) Pour quelles valeurs du paramètre réel m les triangles $[ABD]$ et $[ACD]$ ont-ils la même aire ?

Exercice 11. Calculer le volume du

- 1) tétraèdre de sommets $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$, $R = (-1, 1, 0)$ et $S = (0, 0, 1)$
 - 2) parallélépipède engendré par les vecteurs $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 3, -2)$ et $\mathbf{c} = (-1, 5, 0)$
 - 3) tétraèdre ayant les sommets $P = (2, 2, 1)$, $R = (-1, -1, 0)$, $S = (0, 0, 3)$ et $T_m = (2, -2, m)$, où $m \in \mathbb{R}$. Ce volume est-il nul pour certaines valeurs de m ? Interpréter le résultat.
- 4*) polyèdre convexe² ayant les sommets $P = (2, 2, 1)$, $Q = (0, 2, 1)$, $R = (-1, -1, 0)$, $S = (0, 0, 3)$ et $T = (2, -2, 1)$.

²Pour toute face du polyèdre, les autres sommets se trouvent dans un même demi-espace défini par celle-ci.

Exercices apparaissant sur les sujets des examens des années précédentes

Exercice 12. On considère les points $A = (1, -2, 2)$, $B = (3, 1, 4)$, $D = (2, 0, 5)$, $E = (1, 1, 1)$ et $C_t = (-1 + t, 5 + 2t, 1 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.

- 1) Donner une forme paramétrique et une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A , B et D .
- 2) Donner une forme paramétrique de la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par E .
- 3) Donner une équation cartésienne du plan passant par A , B et parallèle à la droite (DE) .
- 4) Donner une forme paramétrique de la droite qui passe par E et qui est parallèle à $\mathcal{P}$ et au plan d'équation cartésienne $2x + y - z - 8 = 0$.
- 5) Montrer que la distance de C_t à $\mathcal{P}$ est indépendante de t et calculer cette distance.
- 6) Calculer l'aire $a(t)$ du triangle $[OEC_t]$ où $O = (0, 0, 0)$.
- 7) Déterminer le(s) nombre(s) réel(s) t tel(s) que $a(t)$ soit minimale.
- 8) Calculer le volume du tétraèdre de sommets A , B , D et E .

Exercice 13. Soit $[ABCD]$ un tétraèdre de $\mathbb{A}^3$. On désigne par J le milieu du segment $[AD]$, par K le milieu du segment $[BC]$, par G le point défini par $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ et par E le point tel que $[BCDE]$ soit un parallélogramme.

- 1) Décomposez les vecteurs $\overrightarrow{JE}$ et $\overrightarrow{JG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
- 2) Les points J , G et E sont-ils alignés ?

Exercice 14. Soit $[ABCD]$ un tétraèdre de $\mathbb{A}^3$. On désigne par I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ et par J le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$. On désigne par K et L les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[BD]$.

Les droites (KI) , (LJ) et (AB) sont-elles concourantes ?

Exercice 15. On considère les deux plans $\mathcal{P}_1 : 2x + y - 2z = 5$ et $\mathcal{P}_2 : 4x - 3y = 2$. Soit $\mathcal{L}$ la droite de vecteur directeur $\vec{v} = (1, -1, 2)$ et passant par le point $A = (3, 2, -2)$.

- 1) Montrer que les deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.
- 2) Donner une écriture paramétrée de la droite $\mathcal{D}$ intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$.
- 3) Ecrire $\mathcal{L}$ comme intersection de deux plans dont on donnera des équations cartésiennes.
- 4) Trouver une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- 5) Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}$ sont-elles contenues dans un même plan ? On justifiera la réponse !
- 6) Trouver les points $M \in \mathcal{L}$ tels que la distance de M à $\mathcal{P}_1$ soit égale à 3.
- 7) Trouver un vecteur directeur de la droite qui passe par $B = (1, 1, 1)$ et qui est parallèle à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice 16. On considère les points $A = (-1, 1, -1)$, $B = (-2, 1, 0)$, $C = (3, -2, -2)$ et $D = (1, t, 2)$ où t est un paramètre réel.

- 1) Calculer l'aire du triangle $[ABC]$.
- 2) Calculer le volume du tétraèdre déterminé par A , B , C et D .
- 3) Justifier géométriquement que ce volume est nul si $t = -4$.

Exercices variés

Exercice 17. Montrer que trois plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ($\mathcal{P}_i : f_i = 0$) sont parallèles ou contiennent une droite commune si et seulement s'il existe trois constantes non nulles k_1, k_2 et k_3 telles que

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 \equiv 0.$$

Exercice 18. Déterminer α pour que les plans d'équations $x - 2y + z = \alpha x$, $3x - y - 2z = \alpha y$ et $3x - 2y - z = \alpha z$ contiennent une même droite.

Exercice 19. On considère (x, y, z) un système de coordonnées affines.

- 1) Montrer que les équations d'une droite dépendent de quatre constantes indépendantes.
- 2) Montrer que si la droite $\mathcal{L}$ n'est pas parallèle au plan $\{z = 0\}$, alors il existe $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{L}$ soit définie par les équations $x = az + a'$ et $y = bz + b'$.
- 3) Montrer que la droite passant par $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$, est donnée par

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Exercice 20. Former les équations des sous-ensembles suivants dans $\mathbb{A}^3$:

- 1) Droite qui passe par $(-1, 3, 2)$ et qui est parallèle au plan $2x - y + z = 1$ et s'appuie sur la droite $x = 2y = 3z$.
- 2) Droite parallèle à la droite $2x = 3y = 6z$ et qui s'appuie sur les droites $x = 0, z = 4$ et $y = 0, z = -4$.
- 3) Droite qui passe par $(2, -1, 1)$ et qui s'appuie sur les droites $x = 0, -2y + 3z = 0$ et $y = 0, x - z + 1 = 0$.

Exercice 21. Soit $\Gamma \subset \mathbb{E}^3$ le cylindre défini par l'équation $x^2 + y^2 = R^2$, où $R > 0$ est fixé. On considère $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et le plan

$$\mathcal{P}_\theta : \tan \theta (y + R) - z = 0.$$

- 1) Dessiner les traces du cylindre et du plan $\mathcal{P}_\theta$ dans le plan de coordonnées Oyz .
- 2) Déterminer les points $A, A' \in \Gamma \cap \mathcal{P}_\theta$ tels que la longueur du segment $[AA']$ soit maximale.
- 3*) Si $\mathcal{S}$ est une sphère de rayon R ayant le centre sur l'axe des z et étant tangente au plan $\mathcal{P}_\theta$, déterminer les coordonnées du point de tangence.
- 4*) Montrer que l'intersection $\Gamma \cap \mathcal{P}_\theta$ est une ellipse dans le plan euclidien $\mathcal{P}_\theta$.