

Géométrie analytique – 2025-2026

FEUILLE D'EXERCICES N° 3

Dans tous les exercices, on se place dans le plan affine euclidien $\mathbb{E}^2$, qui est ou peut être muni d'un repère orthonormé.

Droites et cercles

Exercice 1. On considère le point $P = (1, 3)$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre $O = (0, 0)$ et de rayon 1.

- 1) Déterminer des équations cartésiennes des tangentes à $\mathcal{C}$ qui passent par P .
- 2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces tangentes avec $\mathcal{C}$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{C}$ le cercle $x^2 + y^2 = 4$.

- 1) Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x - 2y = 6$.
- 2) Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{L} : x + y = -6$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $O = (0, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Soient $A = (1, 1)$ et $B = (\sqrt{2}, 0)$ deux points de $\mathcal{C}$.

- 1) Donner une équation de $\mathcal{C}$.
- 2) Donner des équations cartésiennes des tangentes $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ à $\mathcal{C}$ en respectivement A et B .
- 3) Calculer les coordonnées du point I qui est l'intersection de $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$.
- 4) Déterminer la nature du triangle $[ABI]$.
- 5) Déterminer le point C de $\mathcal{C}$ tel que le triangle $[ABC]$ soit rectangle en B .
- 6) Déterminer des équations cartésiennes des tangentes à $\mathcal{C}$ qui sont perpendiculaires à la droite d'équation cartésienne $2x - y + 3 = 0$.
- 7) Déterminer des équations cartésiennes des tangentes à $\mathcal{C}$ qui passent par $D = (2, \sqrt{2})$.

Exercice 4. Soient les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement de centres $A = (0, -4)$ et $A' = (0, 4)$ et de rayons $r = 1$ et $r' = 3$. Soit $\mathcal{D} : -2x + y + \frac{5}{2} = 0$ une droite du plan qui intersecte $\mathcal{C}$ en $E = (x_E, y_E)$ et $F = (x_F, y_F)$ et $\mathcal{C}'$ en $E' = (x_{E'}, y_{E'})$ et $F' = (x_{F'}, y_{F'})$.

- 1) Faire un dessin (éventuellement à main levée, mais soigneusement tout de même) des deux cercles et de $\mathcal{D}$. Mettre en évidence les points d'intersection.
- 2) On donne

$$y_E = \frac{-37 - 2\sqrt{11}}{10}, \quad y_F = \frac{-37 + 2\sqrt{11}}{10}, \quad y_{E'} = \frac{27 - 2\sqrt{11}}{10}, \quad y_{F'} = \frac{27 + 2\sqrt{11}}{10}.$$

Retrouver par le calcul, en résolvant le problème de l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, les coordonnées des points E et F .

- 3) Vérifier que $d(E, F)^2 = d(E', F')^2$ et que

$$r^2 - d(A, \mathcal{D})^2 = r'^2 - d(A', \mathcal{D})^2. \quad (\star)$$

- 4) Soit Γ la parabole d'équation $\Gamma : x^2 = 2y + 1$.
 - a) Pour chaque réel t , donner une équation de la tangente $\mathcal{D}_t$ à Γ au point $(t, \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2})$.
 - b) Montrer que la relation $(\star)$ est aussi vérifiée par la droite $\mathcal{D}_t$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon $r > 0$ centré en $O = (0, 0)$ et soit $F = (a, b)$ un point tel que $a^2 + b^2 > r^2$. Si $\mathcal{D}$ est une droite passant par F et qui rencontre le cercle en A et B (non nécessairement distincts), montrer que le produit $FA \cdot FB$ est indépendant de la droite $\mathcal{D}$. Ce nombre s'appelle *la puissance du point F par rapport au cercle $\mathcal{C}$* et est noté $\rho_{\mathcal{C}}(F)$.

Exercice 6. Soient $\mathcal{C}_1$ le cercle de rayon 1 centré en $O_1 = (0, 0)$ et $\mathcal{C}_2$ le cercle de rayon 3 centré en $O_2 = (5, 0)$. Soit $\mathcal{T}$ une tangente commune aux deux cercles ; on suppose que O_1 et O_2 se trouvent dans un même demi-plan déterminé par $\mathcal{T}$.

- 1) Faire un dessin.
- 2) Remarquer que les droites (O_1O_2) et $\mathcal{T}$ font apparaître deux triangles semblables. Déterminer leur point d'intersection en appliquant le théorème de Thalès.
- 3) Déterminer une équation pour $\mathcal{T}$.

Exercice 7. On considère les points $A = (-1, 1)$, $B = (1, 0)$ et $C = (3, 3)$.

- 1) Calculer le périmètre du triangle $[ABC]$. Ce triangle est-il isocèle ?
 - a) Donner une équation paramétrée et une équation cartésienne de la droite (AB) .
 - b) Calculer la distance de C à la droite (AB) .
- 2) Trouver les coordonnées du point D tel que $[ABCD]$ soit un parallélogramme.
- 3) Calculer les aires du parallélogramme $[ABCD]$ et du triangle $[ABC]$.
- 4) La médiatrice d'un segment $[PQ]$ est la droite passant par le milieu de $[PQ]$ et perpendiculaire à la droite (PQ) .
 - a) Donner des équations cartésiennes des médiatrices Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
 - b) Montrer que les droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 se coupent en un unique point I dont on calculera les coordonnées.
 - c) Comparer les distances IA , IB et IC .

Exercice 8. On considère les points $A = (-1, 1)$, $B = (1, 0)$ et $C = (3, 3)$. Soit $P_t = (t, t^2)$ où $t \in \mathbb{R}$ est une paramètre.

- 1) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles les droites (AP_t) et (BC) sont sécantes.
- 2) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles le triangle $[ACP_t]$ est rectangle en C .
- 3) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la distance de P_t à la droite (AB) vaut $\sqrt{5}$.