Géométrie analytique — 2025-2026

Une solution pour l'exercice 8 de la feuille n° 2

On considère un triangle $[ABC]$ non aplati. Sur ses côtés on construit, à l'extérieur du triangle, des triangles équilatéraux. Montrer que les centres de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Solution.
Dans un système de coordonnées orthonormé on a $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ et $C = (x_C, y_C)$. On note $a = BC$, $b = CC$ et $c = AB$. On se propose de calculer les coordonnées du point I, voir la figure 1.

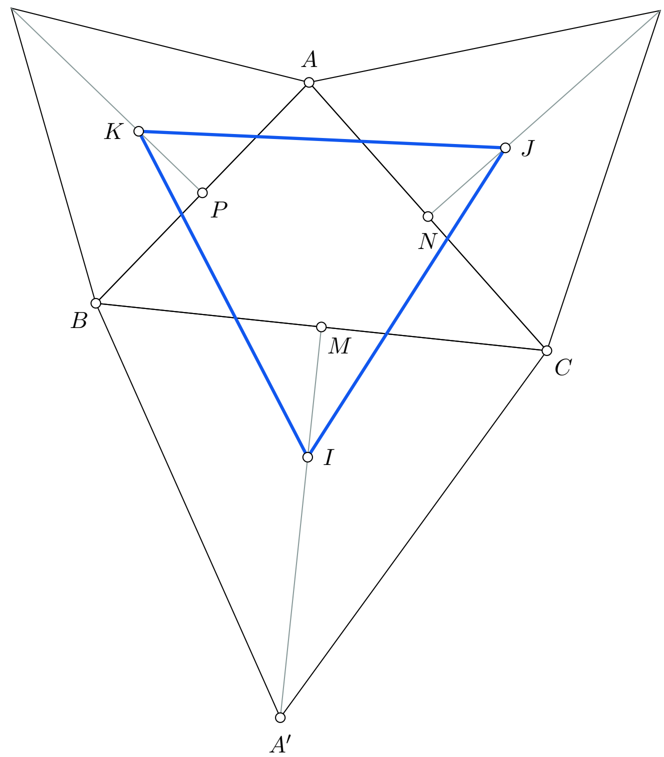

Figure 1: Le triangle $[IJK]$ est équilatéral.

Le point I est le centre du triangle équilatéral $[BCA']$. Comme $BC = a$,

$$MI = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

où M est le milieu du segment $[BC]$. Donc, si u est un vecteur de norme 1 — on dit que u est *unitaire* — tel que $u \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, alors

$$I = M + \overrightarrow{MI} = M + \frac{a}{2\sqrt{3}}\, u.$$

Comme $\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B, y_C - y_B)$, on a

$$u = \frac{1}{a}\left(y_C - y_B, -x_C + x_B\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
I &= \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) + \frac{a}{2\sqrt{3}}\,\frac{1}{a}\,(y_C - y_B, -x_C + x_B) \\
&= \left(\frac{x_B + x_C - \frac{1}{\sqrt{3}}(y_B - y_C)}{2}, \frac{y_B + y_C + \frac{1}{\sqrt{3}}(x_B - x_C)}{2}\right).
\end{aligned} \tag{$\sharp$}$$

En permutant circulairement les sommets du triangle $[ABC]$ dans la dernière formule de ($\sharp$), il s'ensuit que

$$J = \left(\frac{x_C + x_A - \frac{1}{\sqrt{3}}(y_C - y_A)}{2}, \frac{y_C + y_A + \frac{1}{\sqrt{3}}(x_C - x_A)}{2}\right)$$

et que

$$K = \left(\frac{x_A + x_B - \frac{1}{\sqrt{3}}(y_A - y_B)}{2}, \frac{y_A + y_B + \frac{1}{\sqrt{3}}(x_A - x_B)}{2}\right).$$

Pour finir, il suffit de calculer la longueur du segment $[IJ]$ par exemple, et de voir qu'elle est invariante si on fait une permutation cyclique en A, B et C.

On commence par calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$. On a

$$2\,x_{\overrightarrow{IJ}} = 2(x_J - x_I) = x_A - x_B + \frac{1}{\sqrt{3}}\,(y_A + y_B) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,y_C$$

et

$$2\,y_{\overrightarrow{IJ}} = 2(y_J - y_I) = y_A - y_B - \frac{1}{\sqrt{3}}\,(x_A + x_B) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,x_C$$

Alors

$$\begin{aligned}
4\,IJ^2 &= (2\,x_{\overrightarrow{IJ}})^2 + (2\,y_{\overrightarrow{IJ}})^2 \\
&= (x_A - x_B)^2 + \frac{1}{3}\,(y_A + y_B)^2 + \frac{4}{3}\,y_C^2 \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{3}}\,(x_A - x_B)(y_A + y_B) - \frac{4}{\sqrt{3}}\,(x_A - x_B)y_C - \frac{4}{3}\,(y_A + y_B)y_C \\
&\quad + (y_A - y_B)^2 + \frac{1}{3}\,(x_A + x_B)^2 + \frac{4}{3}\,x_C^2 \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{3}}\,(y_A - y_B)(x_A + x_B) + \frac{4}{\sqrt{3}}\,(y_A - y_B)x_C - \frac{4}{3}\,(x_A + x_B)x_C \\
&= x_A^2 - 2x_Ax_B + x_B^2 + \frac{1}{3}\,y_A^2 + \frac{2}{3}\,y_Ay_B + \frac{1}{3}\,y_B^2 + \frac{4}{3}\,y_C^2 \\
&\quad + y_A^2 - 2y_Ay_B + y_B^2 + \frac{1}{3}\,x_A^2 + \frac{2}{3}\,x_Ax_B + \frac{1}{3}\,x_B^2 + \frac{4}{3}\,x_C^2 \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{3}}\,(x_Ay_A + x_Ay_B - x_By_A - x_By_B - 2x_Ay_C + 2x_By_C) - \frac{4}{3}\,(y_Ay_C + y_By_C) \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{3}}\,(x_Ay_A + x_By_A - x_Ay_B - x_By_B - 2x_Cy_A + 2x_Cy_B) - \frac{4}{3}\,(x_Ax_C + x_Bx_C) \\
&= \frac{4}{3}\,(x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + y_A^2 + y_B^2 + y_C^2) - \frac{4}{3}\,(x_Ax_B + x_Bx_C + x_Cx_A + y_Ay_B + y_By_C + y_Cy_A) \\
&\quad + \frac{4}{\sqrt{3}}\,(x_Ay_B - x_By_A + x_By_C - x_Cy_B + x_Cy_A - x_Ay_C).
\end{aligned}$$

Donc, en multipliant par $\frac{1}{4}$, en regroupant des termes et en faisant apparaître des déterminants 2×2,

$$
\begin{aligned}
IJ^2 = \frac{1}{6}\Big[(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2\Big] \\
+ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} x_B & x_C \\ y_B & y_C \end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} x_C & x_A \\ y_C & y_A \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

car

$$
\begin{aligned}
&x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + y_A^2 + y_B^2 + y_C^2 - (x_A x_B + x_B x_C + x_C x_A + y_A y_B + y_B y_C + y_C y_A) \\
&\quad = \frac{1}{2}\Big[(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2\Big]
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que $IJ = JK = KI$, donc que $[IJK]$ est un triangle équilatéral.

Remarque. En utilisant les éléments du triangle $[ABC]$ (en supposant que ses sommets respecte le sens trigonométrique[1]), on a

$$
IJ^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\sigma([ABC]),
$$

ou encore, en utilisant la formule de Héron,

$$
IJ^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
$$

où $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

[1] Tous les calculs ont supposé implicitement le sens trigonométrique des sommets ; il faut voir surtout la partie sur la construction du vecteur unitaire u.