Université d'Angers
Département de Mathématiques

L1

# Géométrie analytique — 2025-2026

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

Dans tous les exercices, on se place dans le plan affine euclidien, qui est ou peut être muni d'un repère orthonormé.

## *Produit scalaire et distance dans $\mathbb{R}^2$*

**Exercice 1.** Soit $A = (0, 4)$ et soit $\mathcal{D}$ la droite des abscisses, c'est-à-dire $\mathcal{D} : y = 0$. On considère le point $P_s = (s, 0) \in \mathcal{D}$, $s \in ]0, +\infty[$.

1) Trouver un point $Q_s \in \mathcal{D}$ tel que $(AP_s)$ et $(AQ_s)$ soient perpendiculaires.
2) Calculer la distance $P_sQ_s$.
3) Pour quel(s) $s \in \mathbb{R}$ la longueur de l'hypoténuse du triangle $[AP_sQ_s]$ vaut-elle 10 ?
4) Soit $M_s \in (AP_s)$ tel que $(OM_s)$ soit perpendiculaire à $(AP_s)$. Calculer la longueur du segment $[AM_s]$. Peut-on donner une borne supérieure à cette longueur sans effectuer aucun calcul ?

**Exercice 2.** Soient $A = (-3, 1)$, $B = (2, 13)$ et $C_s = (s, 5)$ avec $s \in \mathbb{R}$. Pour chaque $s$ déterminer le point $P_s \in (AB)$ tel que $(C_sP_s)$ soit perpendiculaire à $(AB)$. Pour quel $s \in \mathbb{R}$ a-t-on $C_sP_s = 4$ ?

**Exercice 3.** Soit $[ABC]$ un triangle non aplati.

1) Donner une équation de la hauteur issue de $A$ sur le côté déterminé par $B$ et $C$. En déduire, en échangeant le rôle des sommets, des équations pour les autres hauteurs. On prend $A = (x_A, y_A)$ et ainsi de suite.
2) Simplifier les équations en supposant $A = (0, 0)$.
3) Montrer que les hauteurs sont concourantes en $H$, l'*orthocentre du triangle*.
4) Quelles sont les coordonnées de $H$ pour le triangle de sommets $(-1, 2)$, $(3, -1)$ et $(1, 3)$ ? (*Indication :* On pourrait utiliser une translation.)

**Exercice 4.**

1) Soient $p > 0$, le point $F = (0, p/2)$ et la droite $\mathcal{D} : y = -p/2$. Déterminer (par une équaiton) le lieu géométrique (une équation) des points $P$ du plan euclidien tels que $PF = d(P, \mathcal{D})$. Ce lieu est appelée la *parabole de foyer $F$ et de droite directrice $\mathcal{D}$.*
2) Déterminer l'équation de la parabole de foyer $F = (-1, 2)$ et de directrice $\mathcal{D} : 3x - 4y + 1 = 0$.
3) Soit $\Gamma : 4x = y^2$ une parabole. Déterminer son foyer et sa droite directrice. Pour un point $A = (a^2/4, a) \in \Gamma$, déterminer la droite $\mathcal{T}_{\Gamma,A}$ tangente à $\Gamma$ en $A$.

**Exercice 5.**

1) On considère le triangle isocèle $[ABC]$ avec $b = AB = AC$ et $\alpha \in ]0, \pi[$ la mesure de l'angle $\widehat{A}$. Pour tout point $P \in [BC]$, calculer la somme des distances de $P$ aux droites $(AB)$ et $(AC)$.
2) Utiliser ce résultat pour déterminer le lieu géométrique des points $P$ qui satisfont la relation $d(P, \mathcal{D}_1) + d(P, \mathcal{D}_2) = a$, avec $a > 0$ fixé, où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites fixées. (On distinguera les cas $\mathcal{D}_1 \nparallel \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$.)

**Exercice 6.** Soient $O$ l'origine du repère $Oxy$ et $A$ le point de coordonnées $(2, 0)$. Pour chaque point $P$ appartenant à la droite d'équation $y = 1$, on considère le triangle $[OAP]$. Nous cherchons à savoir pour combien de tels points $P$ le périmètre du triangle $[OAP]$ vaut 5.

1) Faire un dessin pour $P = (1, 1)$ et pour $P = (2, 1)$.
2) Soit $x > 0$. Soit $P = (1 + x, 1)$ et $P' = (1 - x, 1)$. Montrer que les périmètres de $[OAP]$ et de $[OAP']$ sont égaux.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction qui à chaque réel $x$ associe le périmètre du triangle $[OAP]$ avec $P = (x, 1)$. Calculer $f(x)$.

4) Soit $g : x \mapsto f(x+1)$. Montrer que $g$ est une fonction paire puis calculer $g(0)$, $g(1)$ et les zéros de $g'$. Conclure.

**Exercice 7.** Dans le plan affine euclidien $\mathbb{E}^2$, on considère les points $A = (1,1)$ et $P_t = (t, t^2)$, où $t > 1$ joue le rôle d'un paramètre.

1) Calculer $\lim\limits_{t \to 1^+} \overrightarrow{AP_t}/\|\overrightarrow{AP_t}\|$. (*Indication :* La limite d'un vecteur est calculée composante par composante.)

2) Calculer cette limite en $\pm\infty$.

3) Conjecturer la valeur de $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\overrightarrow{BP_t}}{\|\overrightarrow{BP_t}\|}$ où $B = (b, b^2)$.

**Exercice 8** (*)**.** On considère un triangle $[ABC]$ non aplati. Sur ses côtés on construit, à l'extérieur du triangle, des triangles équilatéraux. Montrer que les centres de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

## *Aires des triangles dans le plan euclidien*

**Exercice 9.** On considère la droite $\mathcal{D}$ définie par $\mathcal{D} : x - 3y + 3 = 0$ ainsi que les points $A$ et $B$ ayant les coordonnées $x_A = 3$, $y_A = 1$ et $x_B = -9$, $y_B = -3$.

1) Faire un dessin et calculer l'aire du triangle $[ABP_0]$ pour $P_0 = (0, 1)$.

2) Déterminer le nombre de points $P$ appartenant à la droite $\mathcal{D}$ tels que l'aire du triangle $[ABP]$ soit égale à 6.

**Exercice 10.** Soient deux triangles non aplatis $[PAB]$ et $[QAB]$ tels que le côté $[AB]$ soit commun et que $(PQ)$ et $(AB)$ s'intersectent. On note $M$ le point d'intersection des droites $(PQ)$ et $(AB)$. Après avoir fait un dessin :

1) Montrer que $\dfrac{\sigma([PAB])}{\sigma([QAB])} = \dfrac{MP}{MQ}$.

2) En supposant $Q$ fixe et $P$ un point qui varie dans le plan, déterminer le lieu géométrique des points $P$ tels que $\sigma([PAB]) = \sigma([QAB])$. On suppose toujours que $M$ existe.

**Exercice 11.** Soit $[ABC]$ un triangle non aplati. On note $a$, $b$ et $c$ les longueurs de ses côtés.

1) Montrer qu'il existe un unique point $\Omega$ tel que $\Omega A = \Omega B = \Omega C =: R$. Le point $\Omega$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $[ABC]$.

2) On suppose que la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ est plus petite que $\frac{\pi}{2}$. Soit $Q$ tel que $\Omega$ soit le milieu du segment $[BQ]$. Soit $D \in [AC]$ tel que $(BD) \perp (AC)$.

a) Montrer que les triangles $[ABQ]$ et $[DBC]$ sont semblables. (*Indication :* $2\widehat{BCA} = \widehat{B\Omega A}$)

b) Utiliser cette relation (c'est-à-dire le théorème de Thalès) pour déduire que $4R\sigma([ABC]) = abc$ où $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

**Exercice 12.** On considère la droite $\mathcal{D} : y = -1$ et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et de rayon 2[1]. La droite $\mathcal{D}$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points $A = (-\sqrt{3}, -1)$ et $B = (\sqrt{3}, -1)$. Pour combien de points $M$ appartenant au cercle $\mathcal{C}$ l'aire du triangle $[ABM]$ vaut-elle $\sqrt{3}$ ?

**Exercice 13.** Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon 2 centré en $O = (0,0)$ et soient les points $A = (-1, -2)$ et $B = (5, -4)$. Déterminer le triangle $[ABP]$ d'aire maximale quand le point $P$ parcourt le cercle $\mathcal{C}$. (*Indication :* Il faudrait commencer par paramétrer le cercle, par exemple en utilisant les fonctions trigonométriques.)

[1] Une équation de ce cercle est $x^2 + y^2 = 4$.