Université d'Angers
Département de Mathématiques

Géométrie analytique — 2025-2026

Une solution pour l'exercice 9 de la feuille n° 1

On considère deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qui s'intersectent en O ainsi qu'un point F tel que $F \notin \mathcal{D}_j$, $j = 1, 2$.

1) Choisir un système de coordonnées tel que cette configuration soit décrite en coordonnées de manière simple (par exemple on aura $F = (1, 1)$ et le point A_1 ci-dessous deviendra $A_1 = (a, 0)$).

2*) Soit $A_1 \in \mathcal{D}_1$ un point quelconque tel que $(FA_1) \not\parallel \mathcal{D}_2$. On note A_2 le point d'intersection de (FA_1) et de $\mathcal{D}_2$.

a) Calculer le rapport $\frac{\overline{FA_1}}{\overline{FA_2}}$.

b) Trouver le point $P \in (FA_1)$ tel que $\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_2}} = -\frac{\overline{FA_1}}{\overline{FA_2}}$.

c) Que décrit le point P quand A_1 varie le long de la droite $\mathcal{D}_1$?

Solution.
On choisit le système de coordonnées Ox_1x_2 tel que $\mathcal{D}_1 : x_2 = 0$, $\mathcal{D}_2 : x_1 = 0$ et que $F = (1, 1)$ (voir la figure 1). Une équation pour la droite (FA_1) est

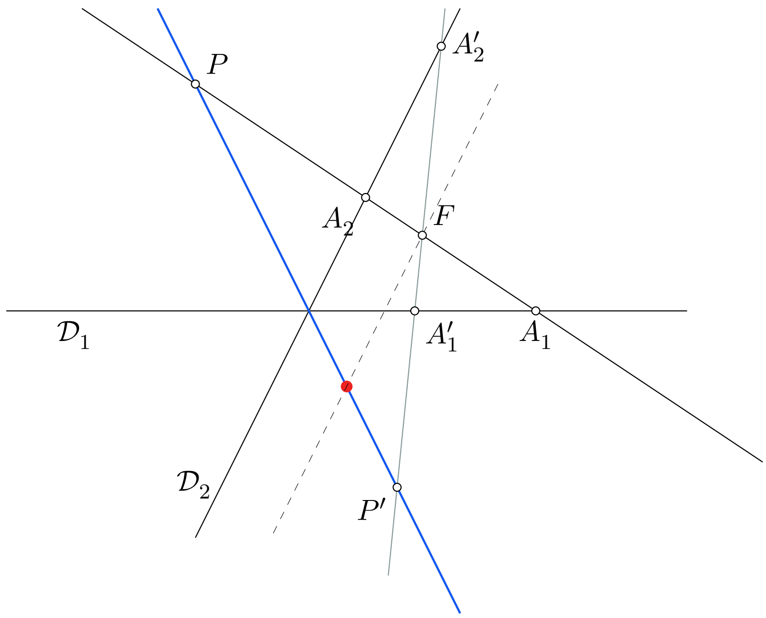

Figure 1: L'expression $\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_2}} : \frac{\overline{FA_1}}{\overline{FA_2}}$ est appelée le *birapport* est elle vaut -1. Quand A_1 bouge le long de la droite $\mathcal{D}_1$, le point P décrit la droite bleu privée du point rouge.

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 - 1 & a - 1 \\ x_2 - 1 & -1 \end{vmatrix} = -x_1 - (a-1)x_2 + a,$$

ou encore

$$\mathcal{D}_1 : x_1 + (a-1)x_2 - a = 0.$$

Alors, comme son abscisse est nulle, on a $A_2 = (0, \frac{a}{a-1})$. En comparant les vecteurs $\overrightarrow{FA_1}$ et $\overrightarrow{FA_2}$,

$$\overrightarrow{FA_1} = (a-1, -1) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{FA_2} = \left(-1, \frac{a}{a-1} - 1\right) = \left(-1, \frac{1}{a-1}\right) = -\frac{1}{a-1}\,\overrightarrow{FA_1}$$

on en déduit que

$$\frac{\overline{FA_1}}{\overline{FA_2}} = -(a-1).$$

Pour trouver le point P, on peut emprunter des chemins différents. Je développe ci-dessous deux méthodes.

Première méthode. On paramètre la droite (FA_1). On a

$$(FA_1) : \begin{cases} x = 1 + t(a-1) \\ y = 1 - t. \end{cases} \tag{1}$$

On calcule le rapport algébrique $\frac{\overline{QA_1}}{\overline{QA_2}}$, où Q est un point quelconque de la droite donné par (1). On a

$$\overrightarrow{QA_1} = (a - 1 - t(a-1), -1 + t) = ((a-1)(1-t), -1 + t) = (1-t)(a-1, -1)$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA_2} &= \left(-1 - t(a-1), \frac{a}{a-1} - 1 + t\right) = \left(-1 - t(a-1), \frac{1 + t(a-1)}{a-1}\right) \\ &= -\frac{1 + t(a-1)}{a-1}\,(a-1, -1)\,,\end{aligned}$$

donc

$$\overrightarrow{QA_1} = (1-t)(a-1, -1) = -\frac{(a-1)(t-1)}{1 + t(a-1)}\,\overrightarrow{QA_2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\overline{QA_1}}{\overline{QA_2}} = -\frac{(a-1)(1-t)}{1 + t(a-1)} = \frac{(a-1)(t-1)}{1 + t(a-1)}.$$

Le point P est le point Q qui vérifie

$$\frac{(a-1)(t-1)}{1 + t(a-1)} = \frac{\overline{QA_1}}{\overline{QA_2}} = -\frac{\overline{FA_1}}{\overline{FA_2}} = a - 1,$$

donc

$$\frac{t-1}{1 + t(a-1)} = 1,$$

c'est-à-dire

$$t - 1 = 1 + t(a-1).$$

En résolvant pour t on obtient

$$t_P = -\frac{2}{a-2}.$$

En explicitant les coordonnées du point Q pour cette valeur du paramètre, on obtient

$$P = \left(-\frac{a}{a-2}, \frac{a}{a-2}\right).$$

Quand A_1 varie sur $\mathcal{D}_1$, le point P décrit la droite $x_1 + x_2 = 0$.

Remarque. La construction du point P en fonction du point A_1 établit une fonction de Ox à valeurs dans la droite $\mathcal{L} : x_1 + x_2 = 0$. En inspectant les configurations et les expressions apparues lors de l'argumentation, on remarque que le domaine de définition de cette fonction n'est pas l'abscisse (la droite $\mathcal{D}_1$) toute entière. Les points correspondant à $x = 1$ et à $x = 2$ doivent être exclus : le premier, car les droites (A_1F) et $\mathcal{D}_2$ seraient parallèles ; le deuxième, car on a la condition d'existence $a \neq 2$ dans l'expression des coordonnées de P. De même, l'image de l'application n'est pas $\mathcal{L}$ toute entière, mais $\mathcal{L}$ privée du point $(1, -1)$ (voir la figure 1).

Deuxième méthode. On cherche les coordonnées du point P directement. On considère $P = (x_1, x_2)$. Alors P vérifie deux équations. La première est donnée par la droite (FA_1) et la deuxième par la condition sur les rapports algébriques. La première entraine[1]

$$x_1 = -(a-1)x_2 + a.$$

Alors, pour la deuxième, on a

$$\overrightarrow{PA_1} = (x_1 - a, x_2) = (-(a-1)x_2, x_2) = x_2\,(-a+1, 1)$$

et

$$\overrightarrow{PA_2} = \left(x_1, x_2 - \frac{a}{a-1}\right) = \left(-(a-1)x_2 + a, \frac{(a-1)x_2 - a}{a-1}\right) = \frac{(a-1)x_2 - a}{a-1}\,(-a+1, 1).$$

Donc

$$\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_2}} = \frac{(a-1)x_2}{(a-1)x_2 - a}$$

et la condition sur les rapports algébriques implique

$$\frac{x_2}{(a-1)x_2 - a} = 1,$$

c'est-à-dire

$$x_2 = \frac{a}{a-2}.$$

Alors

$$x_1 = -\frac{a}{a-2} = -x_2.$$

[1] À vrai dire, on refait le premier argument en choisissant une meilleure paramétrisation de la droite (FA_1).