Géométrie analytique — 2025-2026

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 1

Équations cartésiennes et paramétriques

Exercice 1.

1) Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par l'équation $2x - y + 6 = 0$.
   a) Donner quatre points distincts de $\mathcal{D}$ (ayant des coordonnées "simples").
   b) Déterminer une paramétrisation de $\mathcal{D}$.
2) Même question pour $\mathcal{D}_a : 2x - 3ay + 6 = 0$, où $a \in \mathbb{R}$.
3) Soit la droite $\mathcal{L}$ du plan définie par la paramétrisation $x = 1 - t$ et $y = -8 + 2t$, pour $t \in \mathbb{R}$.
   a) Déterminer une équation cartésienne (ou implicite) de $\mathcal{L}$.
   b) Existe-t-il une valeur de a pour laquelle $\mathcal{L} = \mathcal{D}_a$?

Exercice 2. On considère les points $P = (-1, 1)$, $B = (2, -1)$ et $C = (1, 3)$. Soit Q le point du plan tel que $\overrightarrow{BQ} = 3\,\overrightarrow{QC}$.

1) Après avoir fait un dessin, donner une équation décrivant la droite (PQ) ; d'abord une équation paramétrée puis une équation cartésienne.

2) Déterminer le point A, point d'intersection de la droite (BP) et de la droite parallèle à (PQ) passant par C.

3) Si M est le point d'intersection de (AQ) et (CP), donner la relation vérifiée par les vecteurs $\overrightarrow{QM}$ et $\overrightarrow{MA}$.

Exercice 3. Soit $[ABC]$ un triangle non aplati. Montrer que ses médianes sont concourantes.

Exercice 4 (faisceau de droites)**.**

1) Soit $A = (\sqrt{3}, -1)$. Pour chaque droite $\mathcal{D}$ passant par A, on note, quand ces points existent, $X_{\mathcal{D}}$ et $Y_{\mathcal{D}}$ les points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement. Déterminer toutes les droites passant par A pour lesquelles $X_{\mathcal{D}}$ soit strictement entre A et $Y_{\mathcal{D}}$.

2) Pour tout $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on note $\overrightarrow{v}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$. Soit $A = (a, b)$ un point du plan affine.

   a) Montrer que pour toute droite $\mathcal{D}$ passant par A, il existe $\theta_{\mathcal{D}} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\mathcal{D}$ soit décrite par $(x, y) = (a, b) + t\,\overrightarrow{v}_{\theta_{\mathcal{D}}}$, $t \in \mathbb{R}$. (*Indication :* Commencer par étudier le cas $A = (0, 0)$ et dessiner le cercle trigonométrique vu dans le cours *Calcul algébrique*.)

   b) Est-ce qu'on aurait pu prendre, au départ, $-\pi < \theta < \pi$?

Exercice 5 (cas particulier du théorème de Desargues)**.** On considère les trois droites $\mathcal{D}_1 : y = 0$, $\mathcal{D}_2 : x = 0$ et $\mathcal{D}_3 : -2x + y = 0$ ainsi que les six points $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (0, 1)$, $A_3 = (\frac{1}{2}, 1)$, $B_1 = (2, 0)$, $B_2 = (0, 4)$, $B_3 = (t, 2t)$, où $t \in \mathbb{R}$.

1) Faire un dessin pour $t = \frac{3}{2}$. Justifier que $B_3 \in \mathcal{D}_3$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2) Déterminer toutes les valeurs de t pour lesquelles les trois couples de droites

$$(A_1A_2) \quad \text{et} \quad (B_1B_2), \qquad (A_2A_3) \quad \text{et} \quad (B_2B_3), \qquad (A_3A_1) \quad \text{et} \quad (B_3B_1)$$

s'intersectent en C_3, C_1 et C_2 respectivement.

3) Quand les points C_3, C_1 et C_2 existent, montrer qu'ils sont alignés.
4) Que peut-on dire quand les trois points d'intersection n'existent pas tous ?

Exercice 6 (déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$)**.**

1) Soit $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$ et $\overrightarrow{w} = (w_x, w_y)$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$. L'expression $v_x w_y - v_y w_x$ est appelée le *déterminant des vecteurs* $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *(dans la base canonique)* et est notée $\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. Montrer que

$$\forall\, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ sont colinéaires} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0.$$

2) On considère les droites $\mathcal{D}_1 : (m+1)\,x + (m^2 - 3m - 10)\,y - 1 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : 2\,x - 5\,y + 6 = 0$, où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Trouver tous les m pour lesquels $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles.

Exercice 7. Soient $\mathcal{D}_1 : (\lambda - 1)x - (2\lambda - 5)y + 3 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : (2\lambda + 3)x + (\lambda + 5)y - 8 = 0$. Déterminer les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles

1) les droites sont parallèles,

2) le vecteur $\overrightarrow{v}_1 = (\lambda - 1, -2\lambda + 5)$ soit le vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$. (Cette condition signifie que les droites sont perpendiculaires ; la définition de la perpendicularité utilisera le produit scalaire qui sera vu plus tard en cours.)

Exercice 8. On considère la parabole $\Gamma : y = x^2$ (c'est-à-dire le graphe de la fonction $f(x) = x^2$) et le point $A = (2, -5)$. Soit $P_t = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de Γ.

1) Écrire une équation cartésienne pour $\mathcal{T}_t$, la droite tangente à Γ en P_t et donner le vecteur directeur de cette droite dont la première coordonnée vaut 1. (*Indication :* On pourrait commencer par prendre $t = 2$.)

2) Trouver les t pour lesquels $(AP_t) = \mathcal{T}_t$.

Exercice 9. On considère deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qui s'intersectent en O ainsi qu'un point F tel que $F \notin \mathcal{D}_j$, $j = 1, 2$.

1) Choisir un système de coordonnées tel que cette configuration soit décrite en coordonnées de manière simple (par exemple on aura $F = (1,1)$ et le point A_1 ci-dessus deviendra $A_1 = (a, 0)$).

2*) Soit $A_1 \in \mathcal{D}_1$ un point quelconque tel que $(FA_1) \nparallel \mathcal{D}_2$. On note A_2 le point d'intersection de (FA_1) et de $\mathcal{D}_2$.

a) Calculer le rapport $\frac{\overline{FA_1}}{\overline{FA_2}}$.

b) Trouver le point $P \in (FA_1)$ tel que $\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_2}} = -\frac{\overline{FA_1}}{\overline{FA_2}}$.

c) Que décrit le point P quand A_1 varie le long de la droite $\mathcal{D}_1$?

Sujet de recherche. Étudier la technique mise en place par Ératosthène au IIIe siècle av. J. C. pour mesurer le rayon de la Terre. Faire la liaison avec le théorème de Thalès