

Géométrie dans le plan affine euclidien

LA DROITE DE SIMSON

Je développe une solution en coordonnées pour ce résultat classique. Il faut comprendre que, même si on arrive au résultat, le chemin est assez laborieux. Une preuve plus naturelle est synthétique (voir le livre de Coxeter et Greitzer, page 40).

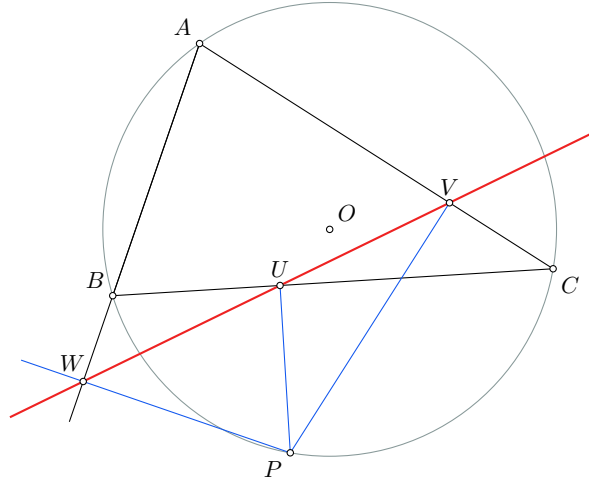


Figure 1: La droite de Simson : quel que soit P sur le cercle circonscrit, les projections orthogonales de P sur les côtés du triangle sont alignés.

Démonstration. On considère que le cercle circonscrit au triangle $[ABC]$ est le cercle trigonométrique. On note α, β, γ les angles tels que $A = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $B = (\cos \beta, \sin \beta)$ et $C = (\cos \gamma, \sin \gamma)$. Comme P appartient au cercle, il existe θ tel que

$$P = (\cos \theta, \sin \theta).$$

On calcule les coordonnées du point U , où $U \in (BC)$ tel que $(PU) \perp (BC)$. On a besoin de décrire la droite (BC) . On a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x - \cos \gamma & \cos \beta - \cos \gamma \\ y - \sin \gamma & \sin \beta - \sin \gamma \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x - \cos \beta & -2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \\ y - \sin \beta & 2 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \end{vmatrix} \\ &= 2 \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \left[\cos \frac{\beta + \gamma}{2} (x - \cos \beta) + \sin \frac{\beta + \gamma}{2} (y - \sin \beta) \right] \end{aligned}$$

d'où,

$$(BC) : \cos \frac{\beta + \gamma}{2} x + \sin \frac{\beta + \gamma}{2} y - \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = 0$$

Par la suite on a besoin d'une présentation paramétrique de la droite (PU) , c'est-à-dire de la droite passant par P et ayant le vecteur normal $n = (\cos \frac{\beta + \gamma}{2}, \sin \frac{\beta + \gamma}{2})$. Il s'ensuit qu'un point quelconque M de cette droite a les coordonnées

$$M = P + tn = (\cos \theta, \sin \theta) + t \left(\cos \frac{\beta + \gamma}{2}, \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \right)$$

avec $t \in \mathbb{R}$. Le point U est le point M qui vérifie aussi l'équation de (BC) . En substituant dans l'équation de (BC) et en résolvant pour t , on a

$$\begin{aligned} 0 &= \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \left(\cos \theta + t \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \right) + \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \left(\sin \theta + t \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \right) - \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \\ &= \cos \left(\frac{\beta + \gamma}{2} - \theta \right) - \cos \frac{\beta - \gamma}{2} + t \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} t_U &= \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \cos \left(\frac{\beta + \gamma}{2} - \theta \right) \\ &= -2 \sin \frac{\frac{\beta - \gamma}{2} + \frac{\beta + \gamma}{2} - \theta}{2} \sin \frac{\frac{\beta - \gamma}{2} - \frac{\beta + \gamma}{2} + \theta}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\beta - \theta}{2} \sin \frac{\gamma - \theta}{2} \end{aligned}$$

définit le point U . Donc

$$\begin{aligned} U &= P + t_U \left(\cos \frac{\beta + \gamma}{2}, \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \right) \\ &= \left(\cos \theta + 2 \sin \frac{\beta - \theta}{2} \sin \frac{\gamma - \theta}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2}, \sin \theta + 2 \sin \frac{\beta - \theta}{2} \sin \frac{\gamma - \theta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

Par permutations circulaires, on en déduit les coordonnées des points V et W :

$$V = \left(\cos \theta + 2 \sin \frac{\gamma - \theta}{2} \sin \frac{\alpha - \theta}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2}, \sin \theta + 2 \sin \frac{\gamma - \theta}{2} \sin \frac{\alpha - \theta}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \right)$$

et

$$W = \left(\cos \theta + 2 \sin \frac{\alpha - \theta}{2} \sin \frac{\beta - \theta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \sin \theta + 2 \sin \frac{\alpha - \theta}{2} \sin \frac{\beta - \theta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

Pour vérifier si U , V et W sont colinéaires, on calcule le déterminant (il faut conserver les t_U , t_V et t_W le plus longtemps possible pour comprendre le calcul)

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} x_W - x_U & x_V - x_U \\ y_W - y_U & y_V - y_U \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} t_W \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - t_U \cos \frac{\beta + \gamma}{2} & t_V \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} - t_U \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \\ t_W \sin \frac{\alpha + \beta}{2} - t_U \sin \frac{\beta + \gamma}{2} & t_V \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} - t_U \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \end{vmatrix} \\ &= \left(t_W \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - t_U \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \right) \left(t_V \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} - t_U \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \right) \\ &\quad - \left(t_W \sin \frac{\alpha + \beta}{2} - t_U \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \right) \left(t_V \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} - t_U \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \right) \\ &= t_V t_W \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} - t_U t_W \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} - t_U t_V \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \\ &\quad - t_V t_W \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} + t_U t_W \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} + t_U t_V \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} \\ &= t_V t_W \sin \frac{\gamma - \beta}{2} + t_W t_U \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} + t_U t_V \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \end{aligned}$$

En utilisant les expressions pour les $t_U \dots$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{4} &= \sin \frac{\gamma - \theta}{2} \sin \frac{\alpha - \theta}{2} \sin \frac{\alpha - \theta}{2} \sin \frac{\beta - \theta}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2} \\
&+ \sin \frac{\alpha - \theta}{2} \sin \frac{\beta - \theta}{2} \sin \frac{\beta - \theta}{2} \sin \frac{\gamma - \theta}{2} \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} \\
&+ \sin \frac{\beta - \theta}{2} \sin \frac{\gamma - \theta}{2} \sin \frac{\gamma - \theta}{2} \sin \frac{\alpha - \theta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \\
&= \sin \frac{\alpha - \theta}{2} \sin \frac{\beta - \theta}{2} \sin \frac{\gamma - \theta}{2} \left(\sin \frac{\alpha - \theta}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2} + \sin \frac{\beta - \theta}{2} \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} + \sin \frac{\gamma - \theta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right).
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
2 \sin \frac{\alpha - \theta}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2} &= \cos \left(\frac{\alpha - \theta}{2} - \frac{\gamma - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha - \theta}{2} + \frac{\gamma - \beta}{2} \right) \\
&= \cos \frac{\alpha + \beta - \gamma - \theta}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta + \gamma - \theta}{2}
\end{aligned}$$

et par permutations circulaires,

$$\begin{aligned}
2 \sin \frac{\beta - \theta}{2} \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} &= \cos \frac{-\alpha + \beta + \gamma - \theta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta - \gamma - \theta}{2} \\
2 \sin \frac{\gamma - \theta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} &= \cos \frac{\alpha - \beta + \gamma - \theta}{2} - \cos \frac{-\alpha + \beta + \gamma - \theta}{2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la somme dans la parenthèse de l'expression de Δ est nulle, donc

$$\Delta = 0.$$

□

Remarque. Pour utiliser l'effort fourni ci-dessus, il serait intéressant de calculer une équation pour la droite de Simson.