Géométrie analytique – 2025-2026

Examen seconde chance
22 juin, 2026 — 9:00-11:00

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone portable, ...) n'est autorisé.

Dans tous les exercices, on se place dans le plan ou l'espace affine euclidien, qui est ou peut être muni d'un repère orthonormé.

Le point avec une étoile dans l'exercice 2 vaut un point sur les 21 du barème.

Exercice 1. On se place dans le plan euclidien.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A = (-1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (-2, 4)$.

2) Justifier que pour tout $b \in \mathbb{R}$, la droite $\mathcal{D}_b$ d'équation $x+by+\frac{1}{2} = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ s'intersectent.

3) Déterminer la valeur du paramètre b pour laquelle le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}_b$ appartient à l'axe des ordonnées.

Solution.

1) Un vecteur normal est $(4, 2)$ ou $(2, 1)$. On obtient $\mathcal{D} : 2x + y + 1 = 0$.

2) En remplaçant $y = -2x - 1$ dans $\mathcal{D}_b : x + by + \frac{1}{2} = 0$ on obtient

$$(1 - 2b)x = b - \frac{1}{2}.$$

Si $b = \frac{1}{2}$ alors les droites sont confondues. Si non, on a un unique point d'intersection. On en déduit que les droties $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_n$ s'intersectent pour tout b.

3) Si $x = 0$, alors $y = -1$ car le point appartient à $\mathcal{D}$. Comme $(0, -1) \in \mathcal{D}_b$, on obtient $b = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. On se place dans l'espace euclidien. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A = (1, 0, 0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (1, 2, 2)$ et $\vec{v} = (2, -2, 1)$.

1) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

2) Justifier que la droite $\mathcal{D}$ paramétrée par $(x, y, z) = (1 + 2t, 2 + t, 3 - 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, est perpendiculaire à $\mathcal{P}$. Puis, décrire $\mathcal{D}$ comme l'intersection de deux plans.

3) Trouver A_1 et A_2 sur la droite $\mathcal{D}$ tels que

$$d(A_1, \mathcal{P}) = d(A_2, \mathcal{P}) = 2.$$

(On va supposer que A_1 est le point dont la première coordonnée est la plus grande).

4*) Soit C le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$. Justifier géométriquement que

$$\{M \in \mathcal{P} \mid \sigma([A_1CM]) = 3\}$$

est un cercle dans $\mathcal{P}$ et donner son rayon.

Solution.

1) Un vecteur normal pour $\mathcal{P}$ est

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2), 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 2) = (6, 3, -6)$$

2) Comme $\vec{w} = (2, 1, -2)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et comme $\vec{w}\,\vec{n} = (6, 3, -6)$ sont colinéaires (car $3(2, 1, -2) = (6, 3, -6)))$, il s'ensuit que $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$.

Pour décrire $\mathcal{D}$ comme intersection de deux plans, on élimine t dans la paramétrisation : $t = \frac{x-1}{2}$, alors $y = 2 + \frac{x-1}{2} = \frac{x+3}{2}$, et $z = 3 - 2 \cdot \frac{x-1}{2} = 4 - x$. Donc

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \mid 2y - x = 3,\ x + z = 4\}.$$

3) Distance d'un point de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{P}$: si $M \in \mathcal{D}$, alors

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|2x + y - 2z - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2(1 + 2t) + (2 + t) - 2(3 - 2t) - 2|}{3} = \frac{|-4 + 9t|}{3}.$$

La condition $d(M, \mathcal{P}) = 2$ entraîne $|9t - 4| = 6$, c'est-à-dire

$$9t - 4 = 6 \qquad \text{ou} \qquad 9t - 4 = -6.$$

Alors

— $t = \frac{10}{9}$ donne $x = 1 + \frac{20}{9} = \frac{29}{9}$, $y = 2 + \frac{10}{9} = \frac{28}{9}$, $z = 3 - \frac{20}{9} = \frac{7}{9}$

— $t = -\frac{2}{9}$ donne $x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, $y = 2 - \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$, $z = 3 + \frac{4}{9} = \frac{31}{9}$.

On a

$$A_1 = \left(\frac{29}{9}, \frac{28}{9}, \frac{7}{9}\right).$$

4*) $C = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ mène à un système de quatre équations avec quatre inconnues, x, y, z et t. On obtient $t = \frac{4}{9}$, et donc $C = (\frac{17}{9}, \frac{22}{9}, \frac{19}{9})$.

Si $\sigma([A_1CM]) = 3$ avec $M \in \mathcal{P}$, alors, comme $[A_1C]$ est fixe, la hauteur depuis M par rapport à (A_1C) est constante, h. Le lieu des points dans le plan $\mathcal{P}$ à distance fixe de C est un cercle de rayon h. On a

$$h = 2\,\frac{\sigma([A_1CM])}{A_1C} = \frac{6}{\sqrt{(\frac{17}{9} - \frac{29}{9})^2 + (\frac{22}{9} - \frac{28}{9})^2 + (\frac{19}{9} - \frac{7}{9})^2}} = \frac{6}{\frac{6}{9}}\,\frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3.$$

Exercice 3. On se place dans le plan euclidien.

1) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x + y - \sqrt{2} = 0$. Justifier que le cercle $\mathcal{C}_O$ de centre $O = (0, 0)$ et de rayon 1 est tangent à $\mathcal{D}$.

2) Déterminer l'ensemble des points P du plan tels que le cercle $\mathcal{C}_P$ de centre P et de rayon 1 est tangent à $\mathcal{D}$. Faire un dessin, et préciser sa nature géométrique.

3) Soit $\mathcal{D}'$ la droite d'équation cartésienne $3x - 4y = 0$. Trouver le lieu géométrique des points Q du plan qui satisfont à la propriété suivante : *il existe un cercle de centre Q qui est tangent à $\mathcal{D}'$ et à l'axe Oy.*

Solution.

1) Il suffit de calculer la distance de O à $\mathcal{D} : x + y - \sqrt{2} = 0$:

$$d(O, \mathcal{D}) = \frac{|0 + 0 - \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1.$$

Donc $\mathcal{D}$ et$\mathcal{C}_O$ sont tangents.

2) Un cercle de centre P et rayon 1 est tangent à $\mathcal{D}$ si et seulement si $d(P, \mathcal{D}) = 1$. L'ensemble des P tels que $\frac{|x_P + y_P - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1$ et caractérisé par l'équation $|x + y - \sqrt{2}| = \sqrt{2}$. Ce sont deux droites parallèles à $\mathcal{D}$: $x + y - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ et $x + y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$, c'est-à-dire $x + y = 2\sqrt{2}$ et $x + y = 0$ – deux droites parallèles de part et d'autre de $\mathcal{D}$.

3) On a deux droites $\mathcal{D}' : 3x - 4y = 0$e et l'axe $Oy : x = 0$. Un cercle de centre $Q = (x, y)$ et rayon $R > 0$ est tangent aux deux droites si et seulement si

$$d(Q, \mathcal{D}') = d(Q, Oy) = R,$$

c'est-à-dire

$$\frac{|3x - 4y|}{5} = |x|.$$

En élévant au carré, on arrive à

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0.$$

Mais

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 = (2x - y)(x + 2y).$$

Donc le lieu recherché est la réunion des deux droites $2x - y = 0$ et $x + 2y = 0$. Ce sont les bissectrices des angles formés par $\mathcal{D}'$ et Oy.

Exercice 4. Soient A, B, C, D quatre points de l'espace euclidien.

1) Donner la formule du volume du tétraèdre $[ABCD]$.

2) Calculer le volume $v(t)$ du tétraèdre déterminé par les points $A = (1, 2, -2)$, $B = (-1, 3, -1)$, $C = (-2, 0, 3)$, et $D = (3, -4, t)$ où $t \in \mathbb{R}$.

3) Déterminer la valeur de t pour laquelle ce volume est nul. Que peut-on dire sur le point D correspondant ?

4) Pour $t = 2$, calculer un vecteur normal au plan (ABD) et la distance de C à (ABD).

Solution.

1) Le volume du tétraèdre $[ABCD]$ est $v = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$.

2) Comme $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, -2, 5)$, et $\overrightarrow{AD} = (2, -6, t + 2)$, on a

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (7, 7, 7).$$

Le produit scalaire avec $\overrightarrow{AD}$ vaut $7 \cdot 2 + 7 \cdot (-6) + 7 \cdot (t + 2) = 14 - 42 + 7t + 14 = 7t - 14$. Donc

$$v(t) = \frac{1}{6}|7t - 14| = \frac{7}{6}|t - 2|.$$

3) Le volume est nul si et seulement si $|t - 2| = 0$ c'est-à-dire $t = 2$. Alors D est dans le plan (ABC) (les quatre points sont coplanaires).

4) Pour $t = 2$, $D = (3, -4, 2)$. On a $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 1)$ et $\overrightarrow{AD} = (2, -6, 4)$ (car $t + 2 = 4$). Un vecteur normal au plan (ABD) est

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (4 + 6,\ 2 + 8,\ 12 - 2) = (10, 10, 10).$$

On prend $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

La distance de C à (ABD) est

$$\frac{|-2 + 0 + 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{3}} = 0.$$

car

$$(ABD) : x + y + z = 1.$$

Remarque. On aurait pu dire directement que cette distance est nulle et que le vecteur normal est $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Barème indicatif : 3 — 6 — 6 — 6