

# Géométrie analytique – 2025-2026

CONTRÔLE CONTINU  
7 AVRIL 2026 — 9 :30-11 :30

Aucun document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone portable, ...) n'est autorisé.

Dans tous les exercices, on se place dans le plan ou l'espace affine euclidien, qui est ou peut être muni d'un repère orthonormé.

**Exercice 1.** Soit  $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}^2$  le sous-ensemble défini par l'équation  $x^2 - 4x - 21 + y^2 = 0$  et soit  $\mathbf{v} = (3, -4) \in \mathbb{R}^2$ .

- 1) Écrire une équation cartésienne pour la droite  $\mathcal{D}_{-11}$  passant par  $(0, -11)$  et ayant  $\mathbf{v}$  comme vecteur directeur.
- 2) Montrer que  $\mathcal{C}$  est un cercle de centre  $A = (2, 0)$  dont on donnera le rayon.
- 3) Quel est le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de  $\mathcal{D}_{-11}$  ?
- 4) Soit  $\mathcal{D}_b$  la droite de vecteur directeur  $\mathbf{v}$  passant par le point  $(0, b)$ . Donner le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{D}_b$  avec  $\mathcal{C}$  en fonction de  $b$ . (*Indication:* On pourrait s'appuyer sur l'étude de la distance de  $A$  à la droite ; **on ne demande pas** les coordonnées des points d'intersection.)
- 5) Si l'intersection est composée de deux points, pour quel  $b$  la distance entre ces deux points est-elle maximale ?

**Solution.**

- 1) On a

$$\begin{vmatrix} x - 0 & 3 \\ y + 11 & -4 \end{vmatrix} = -4x - 3y - 33,$$

donc  $\mathcal{D}_{-11} : 4x + 3y + 33 = 0$ .

- 2) En groupant le carré en  $x$ , la forme canonique pour l'équation du cercle est

$$\mathcal{C} : 0 = x^2 - 4x - 21 + y^2 = (x - 2)^2 + y^2 - 5^2.$$

Donc son centre est  $A = (2, 0)$  et le rayon  $r = 5$ .

- 3) Comme

$$d(A, \mathcal{D}_{-11}) = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 33|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{41}{5} > 5,$$

on en déduit que le cercle et la droite ne s'intersectent pas.

- 4) En général,

$$d(A, \mathcal{D}_b) = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot (0 - b)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|3b - 8|}{5}.$$

L'égalité  $|3b - 8| = 5 \cdot 5 = 25$  est réalisée pour  $b_1 = -17/3$  et  $b_2 = 11$ . Pour ces deux valeurs la droite  $\mathcal{D}_b$  est tangente au cercle. De plus, elle intersecte le cercle en deux points distincts si et seulement si  $b \in ]-17/3, 11[$ .

- 5) La distance est maximale si et seulement si le segment déterminé par les deux points d'intersection est un diamètre, donc si et seulement si  $A \in \mathcal{D}_b$ . On obtient  $b = 8/3$ .

**Exercice 2.** Dans l'espace affine euclidien on considère les cinq points  $A = (-1, 0, 0)$ ,  $B = (1, 1, 0)$ ,  $C = (1, 2, -1)$ ,  $D = (-2, 1, 3)$  et  $P_t = (4, 1, t)$ , où  $t \in \mathbb{R}$ .

- 1) Calculer l'aire du triangle  $[ABC]$ .

- 2) Calculer le volume du tétraèdre  $[ABCD]$ .
- 3) Déterminer les valeurs du paramètre  $t$  pour lesquelles le volume du tétraèdre  $[ABCP_t]$  soit le double du volume de  $[ABCD]$ .
- 4) Pour quelles valeurs de  $t$  le volume de  $[ABCP_t]$  est-il nul ? Que peut-on dire du point  $P_t$  dans ce cas ?

**Solution.**

On aura besoin du produit vectoriel  $\vec{AB} \times \vec{AC}$ . Il est donné par

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & 1+1 & 1+1 \\ j & 1-0 & 2-0 \\ k & 0-0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & 2 & 2 \\ j & 1 & 2 \\ k & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, 2).$$

- 1)  $\sigma([ABC]) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{3}{2}$
- 2)  $v([ABCD]) = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{6} (-1, 2, 2) \cdot (-1, 1, 3) = \frac{3}{2}$
- 3) Comme  $v(ABCP_t) = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AP}_t| = \frac{1}{6} |(-1, 2, 2) \cdot (5, 1, t)| = \frac{|-3+2t|}{6}$ , la condition demandée est équivalente aux deux équations

$$-3 + 2t = 3 \cdot 6 = 18 \quad \text{et} \quad -3 + 2t = -18.$$

Donc les valeurs recherchées sont  $t_1 = 21/2$  et  $t_2 = -15/2$ .

- 4)  $v(ABCP_t) = 0$  si et seulement si  $t = \frac{3}{2}$ . Le point  $P_{\frac{3}{2}}$  appartient au plan  $(ABC)$ .

**Exercice 3.** On considère deux droites dans l'espace affine euclidien définies par

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t_1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t_2 \\ y = 2 + t_2 \\ z = -1 + t_2 \end{cases}$$

avec  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ .

- 1) Soit  $A = (-2, 0, 1)$ .
  - a) Déterminer une équation pour le plan  $\mathcal{P}_1$  passant par  $A$  et qui contient la droite  $\mathcal{D}_1$ .
  - b) Déterminer le point d'intersection de  $\mathcal{P}_1$  avec  $\mathcal{D}_2$ .
  - c) Montrer qu'il existe une unique droite passant par  $A$  et qui coupe  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . Donner des équations paramétriques pour cette droite.
- 2) Donner un argument succinct pour l'affirmation suivante : Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites non coplanaires. Si  $M$  est un point quelconque tel que  $M \notin \mathcal{D}_1$  et  $M \notin \mathcal{D}_2$ , alors il existe une unique droite passant par  $M$  et qui coupe  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . (*Indication:* On ne demande pas d'équations pour cette droite.)

**Solution.**

- 1) On veut trouver la droite passant par  $A$  et qui coupe  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .
  - a) Équation du plan  $\mathcal{P}_1$  : le plan  $\mathcal{P}_1$  contient  $A = (-2, 0, 1)$  et la droite  $\mathcal{D}_1$  (passant par  $B = (1, 0, 0)$  de vecteur directeur  $\vec{u}_1 = (0, 1, 0)$ ). Un deuxième vecteur directeur du plan est  $\vec{AB} = (3, 0, -1)$ . On en déduit le vecteur normal

$$\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{AB} = (0, 1, 0) \times (3, 0, -1) = (-1, 0, -3)$$

et une équation pour  $\mathcal{P}_1$  :  $x + 3z - 1 = 0$ .

b) Pour l'intersection de  $\mathcal{P}_1$  avec  $\mathcal{D}_2$ , on injecte les coordonnées paramétriques de  $\mathcal{D}_2$  dans l'équation de  $\mathcal{P}_1$ . On a

$$(-1 + 2t_2) + 3(-1 + t_2) - 1 = 0$$

et donc

$$t_2 = 1.$$

Le point d'intersection est  $I = (1, 3, 0)$ .

2) Droite unique passant par  $A$  : la droite cherchée est la droite  $(AI)$ . Elle coupe  $\mathcal{D}_2$  en  $I$ . Elle coupe  $\mathcal{D}_1$  car  $I \in \mathcal{P}_1$  et toute droite de  $\mathcal{P}_1$  passant par  $A$  (non parallèle à  $\mathcal{D}_1$ ) coupe  $\mathcal{D}_1$ .

Un vecteur directeur est  $\overrightarrow{AI} = (1 - (-2), 3 - 0, 0 - 1) = (3, 3, -1)$ . Alors, paramétriquement, cette droite est décrite par

$$\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = 3k \\ z = 1 - k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3) Argument général : Pour qu'une droite passe par  $M$  et coupe  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , elle doit être contenue dans les plans  $\mathcal{Q}_1$  défini par  $M$  et  $\mathcal{D}_1$  et, respectivement,  $\mathcal{Q}_2$  défini par  $M$  et  $\mathcal{D}_2$ . La droite recherchée est donc l'intersection  $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ . Comme  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ne sont pas coplanaires et que  $M$  n'appartient à aucune d'elles, ces deux plans ne sont pas confondus et leur intersection est une droite unique.

**Remarque.** Cet argument n'est pas complètement correct. Il est correct dans l'espace projectif. Pour que l'affirmation de l'exercice soit rigoureusement vraie, il faudrait rajouter une condition sur le point  $M$ . La version corrigée de la solution :

*Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites non coplanaires et  $M$  un point hors de ces droites. Notons  $\mathcal{Q}_1$  le plan contenant  $M$  et  $\mathcal{D}_1$ , et  $\mathcal{Q}_2$  le plan contenant  $M$  et  $\mathcal{D}_2$ .*

- *Si  $\mathcal{Q}_1$  n'est pas parallèle à  $\mathcal{D}_2$  (et inversement pour  $\mathcal{Q}_2$  et  $\mathcal{D}_1$ ), les plans se coupent selon une droite unique  $\mathcal{D} = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$  qui n'est parallèle ni à  $\mathcal{D}_1$  ni à  $\mathcal{D}_2$ . Par coplanarité dans chaque plan,  $\mathcal{D}$  coupe obligatoirement  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .*
- *Si  $\mathcal{Q}_1 \parallel \mathcal{D}_2$ , la droite d'intersection  $\mathcal{D}$  est parallèle à  $\mathcal{D}_2$  et l'intersection est vide. Il n'existe alors aucune droite répondant au problème.*

**Barème indicatif : 7 — 6 — 7**