Fonctions dérivables, intégration

Dérivée

Exercice 1. Dans la vie courante, par exemple sur les routes du tour de France, la pente moyenne entre deux points distincts M, N est $\frac{D_y}{D_x}$, où $D_y \geq 0$ est la différence d'altitude entre les deux points, et $D_x > 0$ la distance horizontale qui les sépare.

1) Deux points M, N de la route sont séparés de 100m horizontalement et de 5 mètres verticalement. Faire un dessin. Calculer la pente entre ces deux points.

2) En mathématiques, la pente n'est pas toujours positive. La pente entre deux points M et N du plan est $p(M,N) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$. Est-ce toujours bien défini ? Donner un exemple de couple (M,N) de pente négative et un exemple de pente positive.

3) Choisir un repère orthonormé du plan, où l'axe des x est l'horizontale et l'axe des y la verticale. Calculer la pente $p(M,N)$ avec les données de la question 1). Montrer que la pente est 0.05 ou -0.05 selon le choix de l'orientation de l'axe des x.

4) Que se passe-t-il si on change l'ordre des points ? Comparer $p(M,N)$ et $p(N,M)$.

5) Montrer que si on choisit deux points distincts quelconques M et N sur la droite d'équation $y = ax + b$, alors $p(M,N) = a$. On dit que a est la pente de la droite.

6) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. La pente de la fonction entre les abscisses x_1 et x_2 est par définition la pente entre $M = (x_1, f(x_1))$ et $N = (x_2, f(x_2))$. Calculer la pente pour $f : x \to x^2$ entre $x_1 = 3$ et $x_2 = 4$.

7) On prend $f : x \to x^2$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 3 + \epsilon$. Calculer la pente, puis sa limite quand ϵ tend vers 0. Qu'avez-vous démontré ?

8) En généralisant le calcul précédent, faire une démonstration montrant que la dérivée de la fonction $x \to x^2$ est la fonction $x \to 2x$.

Exercice 2. Utiliser la définition de la dérivée pour calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{2x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}.$$

En déduire (en utilisant la quatrième limite) que $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ et que $\lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$.

Exercice 3 (Dérivées et règles de dérivation)**.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leur domaine de dérivabilité.

$$x \mapsto (2x+1)(1+x+x^2) \qquad x \mapsto x(2x^2 + \sqrt{x} + 1) \qquad x \mapsto \frac{1}{4x^2 - 8x + 4}$$

$$x \mapsto \frac{x^2+1}{-x^2+2x+3} \qquad x \mapsto \frac{x^2+ax+2}{bx+1} \qquad x \mapsto \frac{x^2+1}{(2x+1)^2}$$

$$x \mapsto (2x+1)^3(1+x)^5 \qquad x \mapsto \sqrt{3x^2+1} \qquad x \mapsto (2x^3 + \sqrt{2x+2} + 1)^2$$

$$x \mapsto e^{x^2} \qquad x \mapsto \frac{\ln(x^2-1)}{e^{3x}} \qquad x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$x \mapsto \cos(x + e^{x^2}) \qquad x \mapsto \tan(x/2) \qquad x \mapsto e^{\sin(x)} \ln\left(1 + \cos^4(x)\right)$$

Exercice 4 (Tangente)**.** Trouver l'équation de la tangente au point indiqué au graphe de chacune des fonctions suivantes.

$$x \mapsto x(\sqrt{x}-1) \text{ en } x=1 \qquad\qquad x \mapsto x(2\sqrt{x-1}-3) \text{ en } x=1$$

$$x \mapsto \frac{|x-1|}{x^2+1} \text{ en } x=1 \text{ et } x=-1 \qquad\qquad x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}+1} \text{ en } x=4$$

$$x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \text{ en } x=0 \text{ et } x=a \qquad\qquad x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ en } x=0$$

Exercice 5. On pose $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+x}$.

1) Déterminer le domaine maximal de définition de f.

2) Calculer la dérivée f' de f en précisant le domaine de dérivabilité de f, c'est à dire le domaine maximal de définition de f'.

3) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites de f au bord de son domaine de définition.

4) Calculer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 1$.

5) Dans le plan rapporté au repéré orthonormé Oxy, tracer le graphe de f ainsi que la tangente précédente.

Exercice 6. On considère la fonction $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$.

1) Déterminer son l'ensemble de définition, sa plus petite période et sa parité. En déduire un intervalle d'étude I de f.

2) Calculer la dérivée de f et déterminer son signe sur I.

3) Dresser le tableau de variations de f sur I puis tracer l'allure de sa courbe représentative sur une période.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1) $e^{x^2} = \frac{1}{9}$

2) $e^{2x} - 2e^x - 3 \leq 0$

3) $\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1) < -2\ln(2)$

Exercice 8. On pose $f(x) = \ln(x^2+1) - \ln(x) - 1$.

1) Déterminer D_f, le domaine (maximal) de définition de f.

2) Calculer la dérivée f' de f en précisant le sous-ensemble maximal de D_f où f' est définie.

3) Dresser le tableau de variations de f et calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

4) Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 2$.

5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ puis l'inéquation $f(x) \geq 0$.

6) Tracer l'allure de la courbe représentative de f ainsi que la tangente précédente.

Exercice 9. Soit $\varphi(x) = e^x \ln(1-e^{-x})$. On veut étudier le tableau de variations de φ et esquisser son graphe.

1) Calculer φ'. On pose $f(x) = e^{-x} + (1-e^{-x})\ln(1-e^{-x})$. Expliciter la relation reliant φ' et f.

2) Déterminer le domaine de définition de f ainsi que celui de φ.

3) Calculer la dérivée f' de f en précisant où f' est définie.

4) Dresser le tableau de variations de f,

5) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et justifier que pour tout $x > 0$ on a $f(x) > 0$.

6) Résoudre l'équation $f(x) = 1$ puis l'inéquation $f(x) \leq 1$.

7) Conclure, c'est à dire dresser son tableau de variations de φ et esquisser son graphe.

Autour des théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Exercice 10. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ ($a < b$) et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1) Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b]$

2) Soit $p = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et soit h la fonction définie par $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}.$$

3) On suppose que $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ où ℓ est un nombre réel. Montrer que $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell$. Ce résultat est un cas particulier de la règle de l'Hospital. Remarquer qu'on aurait pu faire le même raisonnement en échangeant les rôles de a et de b.

4) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}.$$

Exercice 11. Soient $x < x' \in]0,+\infty[$.

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{x'} < \frac{\ln(x') - \ln(x)}{x'-x} < \frac{1}{x}.$$

2) On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(\alpha) = \ln\big(\alpha x + (1-\alpha)x'\big) - \alpha \ln(x) - (1-\alpha)\ln(x')$. De l'étude de f et du point précédent déduire que pour tout $\alpha \in]0,1[$ on a

$$\alpha \ln(x) - (1-\alpha)\ln(x') < \ln\big(\alpha x + (1-\alpha)x'\big). \tag{$\sharp$}$$

(On dit que la fonction logarithme est *concave*.)

3) Interpréter géométriquement l'inégalité ($\sharp$) sur le graphe du ln.

4) Démontrer par récurrence que pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, et pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n \in]0,+\infty[$, on a

$$\alpha_1 \ln(x_1) + \alpha_2 \ln(x_2) + \cdots + \alpha_n \ln(x_n) \leq \ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

5) En déduire l'inégalité des moyennes.

Exercice 12. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On rappelle que, pour $x > 0$, x^α est par définition l'expression $e^{\alpha \ln(x)}$. Par la suite on considère la fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ défnie par $f(x) = \big((x-1)(x-2)(x-3)\big)^{\sqrt{2}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variations de f. Compléter le tableau de variations en calculant les limites de f au bord de son domaine de définition.

3) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 13. On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{3}\cos(3x) - \dfrac{3}{4}\cos(2x)$.

1) Déterminer son ensemble de définition, sa plus petite période et sa parité. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $I = [0,\pi]$.

2) Exprimer $\cos(3x)$ et $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et en déduire l'expression de f comme fonction polynomiale en $\cos(x)$.

3) Justifier l'existence et l'unicité de $x_0 \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x_0) = -\frac{1}{2}$. Par la calculatrice, donner une estimation de x_0 à 0.01 près.

4) Calculer la dérivée de f et déterminer son signe sur I. Dresser le tableau de variations de f sur I. On calculera $f(0)$, $f(\pi)$ et $f(x_0)$ sous forme rationnelle.

5) Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur 2 périodes.

6) (*) Déterminer par dichotomie une valeur approchée de $\max\limits_{x\in[0,\pi]} f(x)$ à 0.01 près. *(La condition dans l'algorithme devrait porter sur le signe de la dérivée.)*

Fonctions réciproques

Exercice 14. Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

1) Construire le tableau de variations de f et préciser son image, $f(]-1, +\infty[)$.

2) Montrer que f définit une bijection de $]-1, +\infty[$ dans $f(]-1, +\infty[)$. En déduire le tableau de variations de f^{-1}.

3) Calculer $f(1)$, $f^{-1}(\frac{1}{2})$ et $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.

4) Déterminer l'expression de f^{-1} et vérifier les résultats précédents.

5) Représenter graphiquement les fonctions f et f^{-1} dans un même système de coordonnées. *Il faut comprendre que les graphes de la fonction et de la fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

Exercice 15 (arcsin)**.** Soit

$$f : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto f(x) = \sin(x)$$

la restriction de la fonction sinus au segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1) Justifier que f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et que son image est l'intervalle $[-1, 1]$.

2) Justifier que f est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.

3) Justifier que la fonction réciproque f^{-1} est impaire, continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$.

4) Montrer que pour tout $y \in]-1, 1[$, on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Cette fonction f^{-1} est notée **arcsin** et s'appelle la fonction *arc sinus*.

$$\begin{tikzcd} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ni x \arrow[r, mapsto, "\sin"] & y \in [-1,1] \arrow[l, bend left, "\arcsin"] \end{tikzcd}$$

Exercice 16. On rappelle que l'inverse (ou la réciproque) de la fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est notée $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) Calculer la dérivée de arctan.

2) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

— Montrer que f est une fonction impaire.

— Étudier sa limite en 0^+ et $+\infty$.

— Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

— En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Intégration

Exercice 17. Après avoir vérifié qu'elles sont bien définies, calculer les intégrales suivantes en exhibant une primitive (de la fonction à intégrer).

$$\int_{-1}^{1}(t+1)(t+2)\,dt \qquad \int_0^1 (x^3+2\sin x+e^{2x})\,dx \qquad \int_1^2 \frac{dx}{x^4} \qquad \int_1^4 \frac{dy}{y\sqrt{y}}$$

$$\int_1^2 \sqrt{2t}\,dt \qquad \int_0^1 x\sqrt[3]{8x}\,dx \qquad \int_2^3 3^x\,dx \qquad \int_0^1 (2x-1)e^{x^2-x}\,dx$$

$$\int_0^{\pi/4}\sin\Big(2x+\frac{\pi}{2}\Big)dx \qquad \int_0^{\pi/3}\sin^3(y)\cos(y)\,dy \qquad \int_0^{\pi/6}\frac{dt}{\cos^2(2t)} \qquad \int_0^{\pi/6}\frac{\sin(2t)}{\cos^2(2t)}\,dt$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{x+1} \qquad \int_0^1 \frac{y}{y^2+1}\,dy \qquad \int_2^3 \frac{dt}{t\ln t} \qquad \int_0^1 \frac{s^2}{s^3+1}\,ds$$

$$\int_0^1 \frac{s^2}{(s^3+1)^2}\,ds \qquad \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \qquad \int_{-\frac12}^{\frac12}\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \qquad \int_0^a \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

Exercice 18. Calculer les intégrales suivantes en observant que la fonction à intégrer peut s'écrire comme une somme de dérivées usuelles.

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx \qquad \int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx \qquad \int_0^2 \frac{x}{(x+2)^2}\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2(x)\,dx \qquad \int_0^{\pi/4}\sin^3(t)\,dt \qquad \int_0^{\pi/3}\tan^2(2x)\,dx$$

Exercice 19. Calculer les intégrales suivantes en utilisant la relation de Chasles.

$$A=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx \qquad B=\int_{-2}^{3}|x^2-x-2|\,dx \qquad C=\int_{-1}^{2}\max(x^2+2x,2x^3+1)\,dx$$

Exercice 20. À l'arrêt à l'instant $t=0$, une voiture accélère à raison de 2.7 m/s^2 pendant 10 secondes, puis roule à vitesse constante pendant 5 minutes. Au bout de ce temps, elle freine brusquement, à raison de -9 m/s^2, jusqu'à ce qu'elle s'immobilise. Calculer la vitesse moyenne de la voiture durant le trajet effectué et la distance parcourue.

Exercice 21.

1) Calculer la dérivée de la fonction $t\mapsto \ln(t+\sqrt{t^2+1})$. En déduire une primitive de $s\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.

2) Calculer chaque intégrale en précisant le domaine de définition de la fonction (de a) ainsi obtenue. Pour le dernier calcul, on pourra utiliser la décomposition $\dfrac{2}{t^2-1}=\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1}$.

$$\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \int_0^a \frac{dt}{1+t^2} \qquad \int_0^a \frac{dt}{1-t^2}$$

Exercice 22. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties.

$$A=\int_{-1}^{1}xe^{3x}\,dx \qquad B=\int_0^1 (t^2+t)e^{2t}\,dt \qquad C_n=\int_1^e s^n\ln(s)\,ds,\quad n\in\mathbb{N}$$

$$D=\int_{\sqrt{e}}^{e}\ln x\,dx \qquad E=\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx \qquad F=\int_1^e \ln^2(t)dt$$

$$G=\int_0^{\pi}y\cos(2y)\,dy \qquad H=\int_a^b x^3e^{-x^2/2}\,dx \qquad I=\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$$

$$J=\int_0^a \arcsin(t)\,dt \qquad K=\int_0^{\sqrt3}\arctan(s)\,ds \qquad L_n=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n},\quad n\in\mathbb{N}$$

Pour L_n on pourra commencer par écrire le numérateur sous la forme $1=(1+x^2)-x^2$.

Exercice 23. À l'aide du changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx, \quad t=\ln x \qquad \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}, \quad x=\ln t \qquad \int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \quad x=t^2$$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx, \quad x=t^2 \qquad \int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)}, \quad x=s^3 \qquad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx, \quad x+1=t^2$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx, \quad x=3\sin\theta \qquad \int_{-1}^1 \frac{x^2}{4+x^2}\,dx, \quad x=2\tan\theta \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}, \quad x=\tan\theta$$

Exercice 24. Calculer les intégrales suivantes :

1) $W_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$, $W_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx$ et, plus généralement, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ avec $n \in \mathbb{N}$.

2) $I_5 = \displaystyle\int_1^{\frac{4}{3}} \frac{x^2}{(3x-2)^5}\,dx$ et, plus généralement, $I_n = \displaystyle\int_1^{\frac{4}{3}} \frac{x^2}{(3x-2)^n}\,dx$ avec $n \in \mathbb{N}$.

3) (*) $J = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{x+4}{x+1}}\,dx$. On pourra commencer par le changement de variable $t^2 = \dfrac{x+4}{x+1}$.

Exercice 25.

1) Dans le plan, on considère le disque unité D d'équation cartésienne $x^2+y^2 \leq 1$. Trouver une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ telle que l'intersection de D avec le quart de plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ s'écrive

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

Calculer l'intégrale de f sur le segment $[0,1]$ et en déduire l'aire de D.

2) Pour $a, b > 0$, calculer l'aire de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

3) L'ellipsoïde de rotation d'équation $x^2+4y^2+z^2=4$ peut être obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox dans l'espace le graphe de la fonction $x \mapsto y = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ vu dans le plan Oxy. Calculer son volume.

Exercice 26. On rappelle qu'une des conséquence du théorème de Leibniz-Newton est que si f est continue sur $I \ni 0$, alors la fonction

$$x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f sur I.

1) Calculer la dérivée des fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ et $x \mapsto \displaystyle\int_0^{3x^2} e^{t^2}\,dt$.

2) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^8}\,dt$.

Exercice 27 (Encadrement d'une intégrale)**.** Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx.$$

1) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

2) En déduire l'encadrement $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, puis la limite de la suite $(I_n)_n$.

Exercice 28 (Approximation du nombre e)**.** Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n e^x}{n!}\, dx.$$

1) Calculer I_0 et montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \geq 0$,

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}.$$

En déduire que $e = s_n + I_n$ pour tout $n \geq 0$.

2) Après avoir étudié les variations de $z \mapsto (1-x)e^x$ sur l'intervalle $[0,1]$, démontrer l'encadrement

$$0 < \int_0^1 (1-x)^n e^x\, dx < \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

3) Établir l'encadrement $0 < e - s_n < \dfrac{1}{n \cdot n!}$, puis démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e$.

4) Démontrer que le nombre e n'est pas rationnel. *(Indication : en supposant que $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ et $q \neq 0$, on s'intéressera à la nature du nombre $(e - s_q)q!$ et à sa localisation.)*

Exercice 29. Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable avec f'' continue sur I. En partant du théorème de Leibniz-Newton et puis en utilisant l'intégration par partie, montrer successivement que pour tous $a, b \in I$ on a

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t) f'(t)\, dt \\ &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2!} f''(t)\, dt. \end{aligned}$$