Exercice 9 de la feuille no 2

Soit φ la fonction réelle définie par $\varphi(x) = e^x \ln(1 - e^{-x})$. On veut étudier le tableau de variations de φ et esquisser son graphe.

1) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de φ. Puis, calculer φ'. En considérant la fonction f définie par $f(x) = e^{-x} + (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x})$, expliciter la relation reliant φ' et f.

2) Quels sont les domaines de définition et de dérivabilité de f.

3) Calculer la dérivée f' de f.

4) Dresser le tableau de variations de f,

5) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et justifier que pour tout $x > 0$ on a $f(x) > 0$.

6) Résoudre l'équation $\varphi(x) = -1$ puis l'inéquation $\varphi(x) \leq -1$.

7) Conclure, c'est à dire dresser le tableau de variations de φ et esquisser son graphe.

Remarque. Il y avait deux erreurs dans l'énoncé ; voir le point 6).

Solution.
Je voudrais résoudre cet exercice sans suivre de près les points demandés. On se propose seulement d'esquisser le graphe de la fonction. La condition d'existence pour l'expression dans le membre de droite est $1 - e^{-x} > 0$, c'est-à-dire

$$e^{-x} < 1.$$

Donc $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Pour esquisser son graphe il faut comprendre le comportement de la dérivée. On a

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= e^x \ln(1 - e^{-x}) + e^x \frac{(1 - e^{-x})'}{1 - e^{-x}} \\
&= e^x \ln(1 - e^{-x}) + \frac{1}{1 - e^{-x}} \\
&= \frac{e^x}{1 - e^{-x}} \left[(1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) + e^{-x}\right].
\end{aligned}$$

Pour déterminer les zéros de la dérivée et la variation de son signe, il faut étudier le deuxième facteur de l'expression ci-dessus, car le premier est toujours strictement positif. On considère donc la fonction définie par

$$f(x) = e^{-x} + (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}),$$

avec $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On a

$$f'(x) = -e^{-x} + e^{-x} \ln(1 - e^{-x}) + (1 - e^{-x}) \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \ln(1 - e^{-x}) < 0$$

car $x > 0$. Donc f est une fonction strictement décroissante. Comme

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x} + (1-e^{-x})\ln(1-e^{-x})\right) = 0 + 1\cdot\ln(1) = 0,$$

on en déduit que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

On retourne à l'étude de φ'. On a obtenu que pour tout $x > 0$, on a $\varphi'(x) > 0$. On en déduit le tableau de variation de φ.

x	0		1		$+\infty$
φ'	$\vert^{+\infty}$	$+$	0.34	$+$	0
φ	$\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	-1.25	$\nearrow$	-1

On a calculé :

- $\varphi(1) = e\ln(1-1/e) \approx -1.25$ et $\varphi(1) \approx 0.34$

  (Ces deux calculs ne sont pas nécessaires. Ils sont là seulement pour nous rassurer.)

- $\lim_{x\to0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to0^+} e^x \ln(1-e^{-x}) = -\infty$ et

  $$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x \ln(1-e^{-x}) = \lim_{t\to0^+} \frac{\ln(1-t)}{t} = -1$$

  avec le changement de variable $t = e^{-x}$

  Le graphe de φ admet une asymptote verticale en 0^+ et une horizontale en $+\infty$.

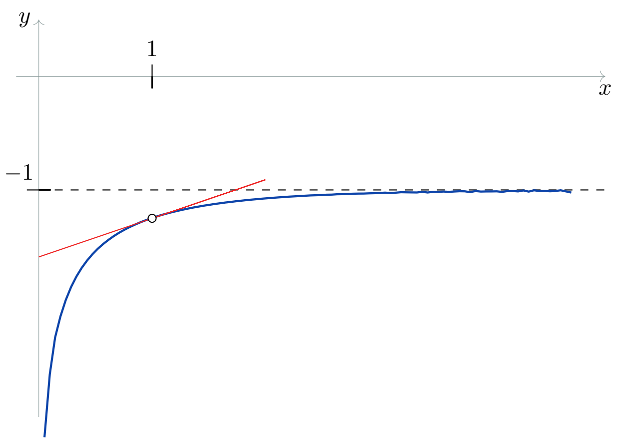

Figure 1: Le graphe de φ