Analyse élémentaire — 2025-2026

Une partie de l'exercice 4 de la feuille n° 4

Calculer $C = \int_{-1}^{2} \max(x^2+2x, 2x^3+1)\, dx$ en utilisant la relation de Chasles.

Solution.
Pour calculer cette intégrale on a besoin de résoudre l'inégalité $x^2+2x \leq 2x^3+1$. Pour ce faire on considère la fonction réelle définie par

$$f(x) = 2x^3+1-(x^2+2x) = 2x^3-x^2-2x+1.$$

On remarque que $f(1)=0$. Il s'ensuit qu'on peut résoudre explicitement sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$, c'est-à-dire qu'on peut factoriser f. On a (car $f(1)=0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3-x^2-2x+1 \\ &= 2x^3-2x^2+x^2-x-x+1 \\ &= 2x^2(x-1)+x(x-1)-(x-1) \\ &= (x-1)(2x^2+x-1) \\ &= (x-1)(2x-1)(x+1). \end{aligned}$$

La dernière expression est donnée par le calcul des racines de $2x^2+x-1=0$. On étudie le signe de f quant x varie dans $\mathbb{R}$. On conclut que

- $f(x) \geq 0$, c'est-à-dire $x^2+2x \leq 2x^3+1$ si et seulement si $x \in [-1, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$
- $f(x) < 0$, c'est-à-dire $x^2+2x > 2x^3+1$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

Alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} \max(x^2+2x, 2x^3+1)\, dx &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2x^3+1)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x^2+2x)\, dx + \int_{1}^{2} (2x^3+1)\, dx \\ &= \left[\frac{2}{4}x^4+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[\frac{2}{4}x^4+x\right]_{1}^{2} \\ &= \frac{1}{32}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}+1-\frac{1}{24}-\frac{1}{4}+8+2-\frac{1}{2}-1 \\ &= \frac{1}{32}+11-\frac{11}{24} = \frac{1015}{96}. \end{aligned}$$

Remarque. Il faudrait voir les graphes des deux fonctions $x \mapsto x^2+2x$ et $x \mapsto 2x^3+1$. On a