Analyse élémentaire — 2025-2026

La fin de l'exercice 3 de la feuille n° 4

On calcule les quatre intégrales de la dernière ligne de l'exercice n° 4.

1)

$$\int_0^1 \frac{s^2}{(s^3+1)^2}\,ds = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(s^3)'\,ds}{(s^3+1)^2} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Dans la deuxième égalité on a fait le changement de variable $t = s^3$, $dt = 3s^2\,ds$.

2) Avec le même changement de variable, $t = x^3$, on a

$$\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{(x^3)'\,dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \frac{1}{3}\int_1^8 \left(2\sqrt{1+t}\right)'\,dt$$
$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{1+t}\right]_1^8 = \frac{2(3-\sqrt{2})}{3}.$$

3) On doit penser à la dérivée de la fonction arcsin.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\arcsin s)'\,ds = \Big[\arcsin s\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 2\,\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

4) Éventuellement on peut utiliser le changement de variable $x = s^2$.

$$\int_0^a \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{(s^2)'\,ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}\Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^{a^2} = 1 - \sqrt{1-a^2}.$$

7 décembre, 2025