Analyse élémentaire — 2025-2026

L'exercice 14 de la feuille n° 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On rappelle que, pour $x > 0$, x^α est par définition l'expression $e^{\alpha \ln(x)}$. Par la suite on considère la fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = [(x-1)(x-2)(x-3)]^{\sqrt{2}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. (Calculer les limites de f aux bords du domaine déterminé par les conditions d'existences pour éventuellement la prolonger par continuité en les points où les limites existent et sont finies.)

2) Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variations de f.

3) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Solution.

1) Comme
$$f(x) = ((x-1)(x-2)(x-3))^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln(x-1)(x-2)(x-3)},$$
son domaine de définition est déterminé par la condition d'existence
$$(x-1)(x-2)(x-3) > 0.$$
Donc l'expression $f(x)$ est définie pour
$$x \in \left]1, 2\right[\cup \left]3, +\infty\right[.$$
Comme
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ((x-1)(x-2)(x-3))^{\sqrt{2}} = 0$$
et similairement,
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$$
on en déduit que f se prolonge par continuité en 1, 2 et 3, avec $f(1) = f(2) = f(3) = 0$. Le domaine de définition de f est
$$D_f = [1, 2] \cup [3, +\infty[\,.$$

2) La fonction f est la composition de la fonction puissance $t \mapsto t^{\sqrt{2}}$ et de la fonction polynomiale $p : x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)$. Par conséquent,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2}((x-1)(x-2)(x-3))^{\sqrt{2}-1}((x-1)(x-2)(x-3))' \\ &= \sqrt{2}((x-1)(x-2)(x-3))^{\sqrt{2}-1}((x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)) \\ &= \sqrt{2}(3x^2 - 12x + 11)((x-1)(x-2)(x-3))^{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$
Le signe de f' est celui de la fonction polynomiale de degré deux
$$x \longmapsto 3x^2 - 12x + 11$$
dont les racines sont
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-33}}{3} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
Il s'ensuit que $f'(x) = 0$ a comme unique solution $x_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \in D_f$.

En mettant toutes ces informations ensemble, on obtient le tableau de variations de f.

x	1		x_1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0		0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

On note que

$$f(x_1) = \left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)^{\sqrt{2}} = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}. \approx 0.385^{\sqrt{2}} \approx 0.26$$

et que

$$\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)^{2} \approx 0.148.$$

3)

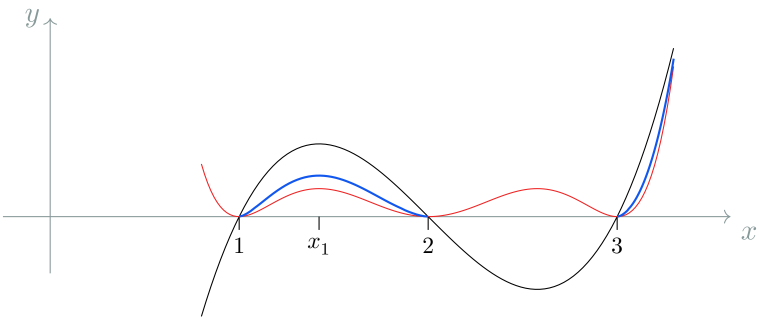

Figure 1: Les courbes représentatives de f (en bleu) et des fonctions polynomiales $x \mapsto p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ (en noir) et $x \mapsto p(x)^2$ (en rouge) pour comparaison.

Quelques questions. Les trois branches passent-elles par un point commun d'abscisse $x^* > 3$? Si oui, décrire ce point. Pour la corbe représentative de f, où est "passée" la partie "au-dessus" de l'intervalle $]2, 3[$?

Remarque. Il ne faut pas confondre les fonctions exponentielle en base $a > 0$, $a \neq 1$, et puissance α. On note $A(t) = a^t$ et $P(t) = t^\alpha$, avec $\alpha > 0$, non entier. Par définition

$$A(t) = a^t := e^{t \ln a} \qquad \text{et} \qquad P(t) = t^\alpha := e^{\alpha \ln t}.$$

On en déduit que A est définie sur $\mathbb{R}$ et que P l'est sur $]0, +\infty[$ et qu'elle se prolonge par continuité en 0 (on a supposé $\alpha > 0$). Par ailleurs,

$$A'(t) = \left(e^{t \ln a}\right)' = e^{t \ln a}\,(t \ln a)') = \ln(a)\, e^{t \ln a} = \ln(a)\, a^t$$

et

$$P'(t) = \left(e^{\alpha \ln t}\right)' = e^{\alpha \ln t}\,(\alpha \ln t)' = \frac{\alpha}{t}\, e^{\alpha \ln t} = \frac{\alpha}{t}\, t^\alpha = \alpha\, t^{\alpha-1}.$$

Il s'ensuit que A est $\mathcal{C}^1$ (à vrai dire $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ et que P l'est sur $[0, +\infty[$ ou $]0, +\infty[$ si $a > 1$ ou $a < 1$, respectivement.