Analyse élémentaire — 2025-2026

L'exercice 11 de la feuille n° 3

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ s'annulant en trois points $a < b < c$. Montrer que f' s'annule deux fois et que f'' s'annule une fois sur l'intervalle $]a, c[$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ s'annulant quatre fois sur l'intervalle $[a, b]$ Montrer qu'il existe un point de cet intervalle où sa dérivée troisième s'annule.

3) Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée strictement positive sur]a,b[, alors elle est strictement croissante ($f'(a)$ et/ou $f'(b)$ pourraient s'annuler).

4) Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $t \in \,]a, b[$ on a $f'(t) < g'(t)$. Prédire laquelle des deux différences $f(b) - f(a)$ et $g(b) - g(a)$ est la plus grande. Vérifier (avec une preuve) la prédiction.

5*) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = 0$ et $f'(a) < 0$. Faire un dessin. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \neq 0$ qui satisfait $a < x < a + \delta$ on a $f(x) < 0$.

Solution.

1) On applique le théorème de Rolle à f sur les intervalles $[a, b]$ et respectivement $[b, c]$: il existe $\alpha \in \,]a, b[$ et $\beta \in \,]b, c[$ tels que $f'(\alpha) = 0$ et $f'(\beta) = 0$. Comme f est supposée $\mathcal{C}^2$, c'est-à-dire deux fois dérivable avec f'' continue, on applique le théorème de Rolle à f' sur $[\alpha, \beta]$; on en déduit l'existence de γ dans $]\alpha, \beta[$ tel que $f''(\gamma) = 0$.

Un exemple type serait une fonction polynomiale de degré 3 avec trois racines réelles distinctes. La première dérivée est de degré deux avec le discriminant strictement positif et la deuxième dérivée est de degré un. Il faut remarquer aussi que l'affirmation n'est pas une équivalence.

2) On utilise le même argument basé sur le théorème de Rolle.

3) Si f n'était pas strictemenet croissante, on pourrait trouver $x_1 < x_2$ dans $[a, b]$ tels que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

En appliqueant le thèorème de Rolle sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, on trouverait un point $x_3 \in \,]x_1, x_2[$ tel que

$$f(x_3) = 0$$

ce qui contredirait l'hypothèse.

4) On affirme que $f(b) - f(a) < g(b) - g(a)$. Pour justifier l'affirmation, on suppose par l'absurde que

$$f(b) - f(a) \geq g(b) - g(a).$$

On a

$$f(b) - g(b) \geq f(a) - g(a). \tag{$\sharp$}$$

On applique le théorème des accroissements finis a $f - g$ sur $[a, b]$. On en déduit l'existence de $c \in \,]a, b[$ tel que

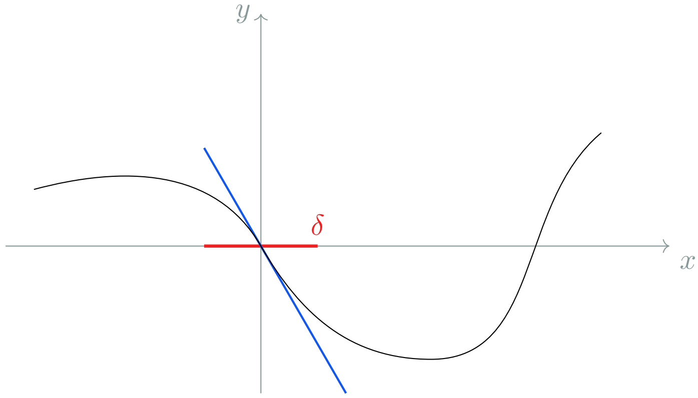
$$f'(c) - g'(c) = (f - g)'(c) = \frac{(f - g)(b) - (f - g)(a)}{b - a} = \frac{f(b) - g(b) - (f(a) - g(a))}{b - a}$$

Donc, d'après ($\sharp$),

$$f'(c) - g'(c) \geq 0$$

ce qui contredit l'hypothèse.

5*) Ci-dessous une esquisse de la courbe représentative d'une fonction vérifiant les hypothèses. La droite tangente au graphe en $(0, 0)$ est représentée en bleu.



En regardant cette esquisse, on voit que la dérivée de f doit être strictement négative dans un voisinage de 0, c'est-à-dire pour tous les points dans un intervalle de la forme $]-\delta, \delta[$. Un tel intervalle est tracé en rouge sur l'esquisse. C'est cette pente toujours négative pour les $x \in [0, \delta[$ qui force les valeurs $f(x)$ d'tre négatives (corollaire du théorème des accroissements finis).

La preuve suit ce chemin intuitif. Comme f est $\mathcal{C}^1$, il s'ensuit que f' est continue. On exprime la continuité en 0 : quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe[1] $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la condition $|x - 0| < \delta(\varepsilon)$ implique

$$|f'(x) - f'(0)| < \varepsilon.$$

Cette inégalité devient

$$-\varepsilon < f'(x) - f'(0) < \varepsilon$$

ou encore

$$-\varepsilon + f'(0) < f'(x) < f'(0) + \varepsilon.$$

Si on prend $epsilon = -\frac{f'(0)}{2}$, alors on a (à droite)

$$f'(x) < f'(0) - \frac{f'(0)}{2} = \frac{f'(0)}{2} < 0.$$

Si on note $\delta = \delta(-\frac{f'(0)}{2})$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la condition $|x| < \delta$ implique

$$f'(x) < 0.$$

Il s'ensit que f est strictement décroissante sur $[0, \delta]$ et donc que pour tout $x \in]0, \delta]$, on a $f(x) < f(0)$.

[1] La notation montre la dépendance de δ de la quantité ε qui le précède et qui est introduite par "quelque soit". Comme règle générale, chaque "il existe" dépend de tous les "quelque soit" qui le précèdent et il est conseillé de montrer ce fait dans la notation.