Analyse élémentaire – 2025-2026

DEVOIR N° 1

Devoir à rendre au début de la semaine 29 septembre – 3 octobre

Exercice 1. On considère la fonction f définie par l'expression $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}+1}$ à valeurs réelles.

- 1) Déterminer D_f , le plus grand domaine de définition de f .
- 2) Montrer que f est strictement croissante. (*Indication* : On pourrait comparer les valeurs $f(x_1)$ et $f(x_2)$ quand $x_1 < x_2$.)
- 3) Justifier que f est injective.
- 4) Déterminer $\text{im}(f)$, l'image de f et justifier que $f : D_f \rightarrow \text{im}(f)$ est bijective.
- 5) Déterminer l'expression définissant la fonction réciproque $f^{-1} : \text{im}(f) \rightarrow D_f$, c'est-à-dire calculer la **bonne solution** de l'équation $y = f(x)$. (*Indication* : Organiser l'équation $y = f(x)$ comme une équation de degré deux en $\sqrt{x}$.)

Exercice 2. On considère pour chaque $m \in \mathbb{R}$ la fonction $f_m : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_m(x) = x^2 - 2mx$.

- 1) Esquisser les représentations graphiques des fonctions f_1 et f_{-1} .
- 2) Déterminer l'image de f_1 et puis celle de f_{-1} .
- 3) Déterminer les valeurs du paramètre réel m telles que $\text{im}(f_m) = [-2, +\infty[$.
- 4) Les graphes des fonctions $g_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $g_m(x) = x^2 - 2mx$ sont des paraboles (convexes).
 - a) Déterminer la valeur minimale y_m de $g_m(x)$ ainsi que l'abscisse du point correspondant $(x_m, y_m) \in G_{g_m}$.
 - b) Dessiner le sous-ensemble du plan (dans le même système de coordonnées utilisé au point 1)) décrit par ces points lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.
 - c) Pour chaque $m \in \mathbb{R}$, quelle est la relation reliant f_m et g_m ?